MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE

ET IMPRIMÉS PAR SON ORDRE

PARIS

IMPRIMERIE NATIONALE

M DCCC LXXVII

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE

S. 804. D. 22.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

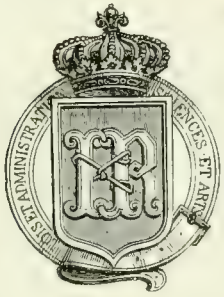
A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE

ET IMPRIMÉS PAR SON ORDRE

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

TOME NEUVIÈME



PARIS

IMPRIMÉ PAR AUTORISATION DU ROI

A L'IMPRIMERIE ROYALE

M DCCC XLVI

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS LE NEUVIÈME VOLUME DES SAVANTS ÉTRANGERS.

Mémoires sur les développements des végétaux; par M. Payen :

3^me^ mémoire ..... Page 1

4^me^ mémoire 43

5^me^ mémoire 77

6^me^ mémoire 127

7^me^ mémoire 148

Répertoire des principaux sujets des sept mémoires sur les développements des végétaux et des deux séries de planches, contenus dans les tomes VIII et IX 245

Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point; par M. Bravais 255

Sur les dents des musaraignes, considérées dans leur composition et leur structure intime, leurs rapports avec les mâchoires, leur développement et leur succession; par M. G. L. Duvernoy 333

Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres; par le D^r^ Poiseuille 433

Études anatomiques et physiologiques sur une mouche; par M. Léon Dufour. 545

Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes; par M. Chasles 629

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

MÉMOIRE

SUR

LES DÉVELOPPEMENTS DES VÉGÉTAUX;

ÉTATS DIFFÉRENTS D'AGRÉGATION

DU TISSU DES PLANTES;

CARACTÈRES DISTINCTIFS ENTRE LES MEMBRANES VÉGÉTALES ET ANIMALES [1];

PAR M. PAYEN.

TROISIÈME MÉMOIRE.

CELLULOSE.

COMPOSITION CHIMIQUE, CARACTÈRES DUS AUX DIFFÉRENTS ÉTATS DE SA COHÉSION, PROPRIÉTÉS DISTINCTIVES ENTRE LES CELLULES VÉGÉTALES ET LES MEMBRANES DES ANIMAUX.

Les recherches que nous avons exposées dans le mémoire précédent avaient paru fixer le rôle physiologique de l'amidon, en démontrant comment ce principe immédiat s'accumule dans les

[1] Voyez les deux premiers mémoires, tome VIII du recueil des Savants étrangers.

plantes et comment il se peut dissoudre sous l'influence de la diastase, à certaines époques où la végétation épuise cette réserve et forme de nouveaux tissus.

Or, durant la germination des graines, de même qu'aux époques de la végétation souterraine des tubercules, les plantes, privées des fonctions des organes foliacés, ne sauraient encore s'approprier le carbone de l'acide carbonique : les nouveaux tissus semblaient donc ne pouvoir admettre dans leur composition élémentaire plus de carbone que l'amidon lui-même, s'il leur avait réellement donné naissance.

Telle fut la pensée qui me dirigea dans cette nouvelle série de recherches; elle me conduisit à reconnaître que toutes les analyses jusqu'alors connues sur la matière que l'on considérait à tort comme le tissu pur des végétaux; toutes ces analyses, dis-je, avaient eu lieu sur des mélanges complexes. Si elles indiquaient des proportions de carbone toutes trop fortes et variables entre 47 et 51 centièmes, cela tenait non, à des erreurs d'analyses élémentaires, mais bien à ce que plusieurs substances interposées, plus riches en carbone, avaient altéré la véritable composition de la trame pure de ces tissus.

Ce fut encore le mélange ou l'interposition de corps étrangers qui, donnant à la trame résistante de certains organismes des propriétés nouvelles et une composition variable, détermina l'adoption des noms de *fungine*, de *lignine*, de *lichénine*, de *médulline*, qu'il faut actuellement rayer des nomenclatures scientifiques.

Et par une circonstance bien remarquable dans l'histoire de ces recherches, il est arrivé qu'après avoir vainement cherché une composition rationnelle parmi ces tissus complexes, on parvint à constater plusieurs réactions exactes, notamment les transformations du tissu végétal en substance gommeuse, puis en glucose; mais c'est qu'alors on opéra sur un principe immédiat accidentellement obtenu presque pur, parce que l'on avait agi sur des linges usés et blanchis ou sur du papier blanc non collé,

tandis que pour toutes les analyses on avait employé la substance ligneuse de différents bois[1].

Démêler la véritable composition chimique et les propriétés caractéristiques de la trame végétale, au milieu de tant de données applicables à des substances hétérogènes, eût été chose bien difficile. Il valait mieux, sans doute, recommencer tout le travail, en observant à la fois les développements physiologiques et les modifications survenues par degrés dans la composition immédiate et élémentaire des différentes parties de l'organisme : telle fut en effet la marche qui me permit d'arriver au but.

Je me suis donc efforcé de déterminer la composition chimique des *cellules naissantes*, puis de les examiner après une végétation graduellement prolongée, de les suivre enfin dans les différents bois lorsqu'elles sont épaissies par la superposition des couches concentriques ligneuses[2].

[1] Voyez sur les *bois*, le *ligneux*, la *lignine*, la *médulline*, la *lichénine*, la *fungine* :
Fourcroy, *Système des connaissances chimiques;*
Rumford, *Mémoire sur le bois et le charbon*, p. 15;
Thénard et Gay-Lussac, *Recherches physico-chim.* t. II, p. 295;
Prout, *Annales de chimie et de physique*, t. XXXVI, p. 371;
Bérard, *Mémoire sur la maturation des fruits*, p. 32;
Dutrochet;
Decandolle, *Théorie élémentaire*, 1re édition, p. 417;
Raspail, *Journal des sciences d'observations*, II, p. 415;
Braconnot, *Annales de chim. et de phys.* XII, p. 172, et *Bull. des sciences chim.* Ferussac, X, p. 224;
Ant. Morin;
Guérin, *Annales de chim. et de phys.* LI, p. 242;
Payen (Cellulose, Lignose, Lignone, Lignin), *Académ. des sciences*, 17 décembre 1838; *Annales des sciences naturelles*, 1839; *Comptes rendus*, juin 1840, et t. IX du recueil des Savants étrangers.

[2] Nous verrons plus loin que toutes les parties ligneuses et herbacées des plantes, c'est-à-dire *les végétaux* pris en masse, *donnent, à l'analyse élémentaire, du carbone et les éléments de l'eau, plus un excès d'hydrogène.* On le comprendra bien, en se rappelant que trois substances organiques, caractérisant le *bois* ou les *tissus ligneux*, que les *matières azotées*, les *huiles essentielles*, les *résines*, la *cire*, les *matières grasses*, *etc.* disséminées dans les plantes, contiennent toutes, sans exception, un excès d'hydrogène, excès prédominant, d'ailleurs, malgré la présence des sels à acides organiques dans lesquels l'oxygène domine, et de ceux qui sont tout à fait exempts d'hydrogène, tels que les oxalates, si universellement répandus dans le règne végétal.

EXTRACTION DU TISSU VÉGÉTAL À L'ÉTAT NAISSANT OU TRÈS-JEUNE.

Pour atteindre le but principal de ces recherches, il était nécessaire d'obtenir le tissu des végétaux récemment formé, afin qu'il fût moins compliqué dans sa composition par les divers principes immédiats qui, plus tard, doivent y être sécrétés; il fallait encore extraire à part le tissu élémentaire des différentes parties des plantes, pour s'assurer de l'identité des résultats analytiques sur toutes ces parties.

J'y suis parvenu en enlevant avec soin les jeunes tissus à l'état gélatiniforme que contiennent, 1° les ovules non fécondés des amandes de l'*amygdalus sativa*; 2° les ovules renfermés dans les fleurs de l'*helianthus annuus*; 3° ceux que l'on trouve dans les fleurs des abricotiers, pommiers et cerisiers.

Une autre série de très-jeunes membranes a été obtenue, en excisant avec précaution les extrémités à l'état normal des radicelles et des fibrilles radicellaires de plusieurs plantes ligneuses ou herbacées.

Je me procurai des membranes plus rapprochées encore de l'état rudimentaire en réunissant les parties membraniformes extraites des gouttelettes coagulées qui s'extravasent de la section faite aux vaisseaux d'un concombre.

La moelle des pousses vigoureuses venues en deux mois sur des pieds de sureaux cultivés dans un sol riche et arrosé, offrit des circonstances favorables à l'extraction de cellules peu imprégnées de substances étrangères ou *ligneuses*.

Enfin, je trouvai une heureuse occasion d'obtenir en abondance et d'épurer sans peine un tissu analogue, en opérant sur la moelle blanche de l'*æschynomene paludosa* (connue sous le nom vulgaire de papier de riz) et sur les poils des graines du cotonnier.

Chacune des substances membraneuses obtenues a été immédiatement débarrassée des divers produits communs à toutes, en

les traitant par l'acide chlorhydrique étendu et par l'ammoniaque à plusieurs reprises, puis par des lavages intermédiaires à l'eau pure, enfin par l'alcool et l'éther. L'épuration étant terminée, on a procédé à leur dessiccation, qui s'est achevée à la température soutenue de 100° dans le vide.

Pour soumettre ces matières à l'analyse, il était nécessaire de les pulvériser; mais, en raison de leur faible épaisseur et de leur souplesse, cette opération présentait une difficulté que j'ai pu vaincre toutefois, et voici comment : la substance humectée fut fortement tassée dans un tube; on l'y laissa contracter des adhérences entre ses parties. Repoussée du cylindre et obtenue ainsi moulée, elle fut desséchée à l'air : alors sa cohésion était assez forte pour qu'il fût facile de la réduire en poudre à l'aide d'une râpe fine.

La matière ainsi divisée fut de nouveau desséchée dans le vide sec par une température de 100 à 150°, soutenue pendant trois heures : l'analyse après cela n'offrit plus de difficultés.

Voici les nombres obtenus en opérant sur les membranes élémentaires épurées de cette manière et bien divisées, qui alors ont offert à l'analyse une composition sensiblement constante, isomérique avec celle de l'amidon, ce qui justifiait mes prévisions sur la nature de la trame des tissus et la dénomination de cellulose.

	OVULES de l'amandier.	OVULES du poirier et du pommier.	OVULES de l'*helianthus annuus*.	MATIÈRE membraneuse des concombres.	TISSU d'un concombre.	MOELLE de sureau.
Carbone.....	43,57	44,7	44,1	43,9	43,8	43,87
Hydrogène....	6,11	6,1	6,2	6,32	6,1	6,04
Oxygène.....	50,32	49,2	49,7	49,78	50,1	50,09
	100	100	100	100	100	100

	COTON épuré une fois.	COTON épuré deux fois.	SPONGIOLES des radicelles.	MOELLE d'*æschynomene paludosa*.	(2e) MOELLE d'*æschynomene paludosa*.	(3e) MOELLE d'*æschyn. palud.* analysée avec M. Dumas.
Carbone.....	45,00	44,35	43,50	43,2	43,59	43,4
Hydrogène....	6,22	6,14	6,18	6,5	6,2	6,3
Oxygène.....	48,55	49,51	50,32	50,3	50,23	50,3
	100	100	100	100	100	100

RÉACTIFS QUI DÉCÈLENT DIRECTEMENT LA PRÉSENCE DE LA CELLULOSE PURE SOUS LE MICROSCOPE.

Une expérience curieuse et facile à répéter sur le porte-objet du microscope permet de reconnaître les parties des tissus végétaux formées de cellulose sans leur faire subir d'épuration préalable, lors même que les cellules sont remplies de substance azotée, mais pourvu que celle-ci n'ait pas pénétré en proportions notables dans l'épaisseur de leurs parois.

Ainsi, par exemple, on posera dans une goutte d'eau sur la lame de verre une tranche très-mince de la moelle d'æschynomène (voyez planche I, figure, *a*, *a*, cellules à l'état normal) que l'on recouvrira avec une lamelle de verre; si l'on fait ensuite passer entre les deux lames deux ou trois gouttes de solution aqueuse d'iode dont l'excès soit absorbé par un morceau de papier à filtre mis en contact avec le liquide sur le côté opposé, on verra une légère teinte jaune colorer la paroi intérieure des cellules; posant alors une goutte d'acide sulfurique concentré qui s'insinuera de la même manière, on verra les premières cellules *b*, *b*, au contact de l'acide commencer à se désagréger, puis aussitôt acquérir la nuance bleu-violet communiquée par l'iode à la cellulose réduite à l'état d'agrégation des groupes de particules amylacées. Bientôt une dissolution complète effacera spontanément cette sorte de teinture, et il ne restera plus que les traces légères et jaunâtres *c*, *c*, des substances azotées qui étaient appliquées contre la paroi interne de chaque cellule.

Les figures *r*, *r'*, *r''*, *r'''* de la planche VIII montrent des réactions analogues sur une tranche de radicelle de jacinthe. En *r* on voit deux rangées de cellules courtes de la spongiole à l'état normal; en *r'* une rangée de semblables cellules laisse apercevoir l'abondante substance azotée que renferme chacune d'elles, colorée en jaune orangé par l'iode; une autre rangée adhérente à celle-ci

fait apparaître la cellulose bleuie par l'action de l'acide sulfurique en présence de l'iode; enfin, la dernière rangée r'' montre la dislocation des cellules opérée par une réaction plus forte ou plus prolongée de l'acide.

En r''' les mêmes phénomènes se manifestent sur une tranche de la radicelle, prise à quelques centimètres du bout des spongioles: on voit qu'en cet endroit les cellules plus allongées éprouvent les mêmes effets de colorations et de dislocation sous les influences combinées des deux réactifs.

La figure 7, planche I, montre la même coloration violette, qui, sous de semblables influences encore, caractérise la cellulose formant les tubes minces des poils de coton, tandis que la couleur orangée indique les corps azotés adhérents à ces poils; les figures 6 et 5 font voir, soumis aux mêmes réactions, les tubes plus épais constituant les fibres textiles du lin et du chanvre.

COMPOSITION DE LA CELLULOSE DES FEUILLES.

L'épuration complète de ce tissu, et en général des parties herbacées des plantes, présenta d'assez grandes difficultés. En effet, les feuilles traitées même par la solution bouillante de potasse, et ainsi dépouillées d'une partie de leurs substances grasses retinrent, malgré les lavages et les traitements ultérieurs par l'eau et l'acide chlorhydrique, l'éther et l'alcool, une matière de consistance cireuse qui augmentait la proportion du carbone. Mais, après avoir été entièrement épuré, le tissu offrit la même composition chimique que les membranes extraites des autres parties des plantes. Il me fut d'ailleurs plus facile d'extraire la cellulose pure du tissu blanc volumineux pris dans l'épaisseur d'une feuille d'*agave americana*.

Feuilles de chicorée endive (*scariole*).

Soumises à la coction dans l'eau, desséchées, pulvérisées, trai-

tées par la potasse, l'acide chlorhydrique, l'ammoniaque et l'eau, elles ont donné les résultats suivants :

Matière employée	434 millig.		C = 45,08	
Acide carbonique	674	D'où	H = 6,74	= 100
Eau	240		O = 48,28	

Les mêmes, traitées une deuxième fois par la potasse, l'acide chlorhydrique, et toujours par des lavages intermédiaires à l'eau :

Substance	634 millig.		C = 43,40	
Acide carbonique	674	D'où	H = 6,12	= 100
Eau	240		O = 50,38	

Feuilles d'*aylanthus glandulosa*.

Broyées et traitées par la potasse, le chlore, l'acide chlorhydrique, l'alcool et l'éther; séchées à + 160° :

Matière employée	0,168 millig.		C = 45,95	
Acide carbonique	0,271	D'où	H = 6,19	= 100
Eau	0,091		O = 47,86	

Deuxième échantillon des feuilles d'*aylanthus*.

Feuilles soumises à un traitement semblable. Séchées à + 160° :

Matière	0,371 millig.		C = 45,82	
Acide carbonique	0,615	D'où	H = 6,44	= 100
Eau	0,216		O = 47,74	

TISSU INTÉRIEUR DES FEUILLES DE L'*AGAVE AMERICANA*.

Les particularités qu'il présente dans son volume et ses formes m'ont déterminé à faire l'analyse de ce tissu. Débarrassé mécaniquement de la couche verte qui l'environne, il fut divisé le plus possible à l'aide d'une lame bien tranchante. Soumis alors aux opérations successives d'une épuration par l'eau,

l'ammoniaque, l'acide chlorhydrique, la potasse, l'alcool et l'éther, il fut dès ce premier traitement amené à l'état de cellulose pure, ainsi que le prouvent les résultats analytiques suivants :

Substance employée	302		
Acide carbonique	490	D'où	C = 44,70 H = 6,39 O = 48,91 = 100
Eau	174		

COMPOSITION CHIMIQUE DES TRACHÉES.

MM. de Jussieu et Brongniart m'avaient engagé à vérifier par l'analyse si la cellulose formait aussi la trame de trachées des plantes; je saisis l'occasion qui me fut offerte d'aller prendre, dans les serres du Jardin des plantes, une tige et des feuilles d'un bananier (*musa sapientum*). Les trachées extraites, et seulement épurées par l'acide chlorhydrique faible, contenaient des substances étrangères, car, analysées en cet état, elles ont donné 0,484 de carbone, tandis qu'épurées par la potasse à chaud, puis analysées alors, elles offrirent la composition du tissu normal, c'est-à-dire 0,444 de carbone. Une contre-épreuve fut trouvée dans le traitement de la solution de potasse, qui, saturée par l'acide chlorhydrique faible, donna un précipité contenant des matières du *ligneux* incrustant.

Analyse des trachées du bananier (*musa sapientum*).

Epurées seulement par l'ammoniaque, l'acide chlorhydrique faible, l'alcool et l'eau (retenant encore des matières incrustantes):

Substance employée	256		
Acide carbonique	449	D'où	C = 48,43 H = 6,91 O = 44,66 = 100
Eau	160		

Deuxième analyse des trachées du bananier.

Débarrassées de toute matière étrangère par la solution de

potasse caustique et l'ébullition au bain d'huile jusqu'à siccité. puis les autres agents ordinaires d'épuration :

Matière séchée à + 130°....	0,236	D'où l'on tire	C = 44,22 H = 6,50 O = 49,28 = 100
Acide carbonique obtenu....	0,275		
Eau.....	0,139		

RADICELLES DE MAÏS.

M. Magendie me remit pour les examiner des radicelles recouvertes, à la partie inférieure, d'une matière gluante, diaphane et blanche, qu'il avait observées, en cet état dans un champ de maïs après une pluie abondante.

Examinée sous le microscope, la substance gélatiniforme présentait un grand nombre de cellules allongées, cylindroïdes ou elliptiques, séparées par une matière visqueuse. Chacune d'elles contenait une substance azotée, dont plusieurs réactifs, et l'iode notamment, faisaient mieux ressortir les contours en la colorant en jaune orangé et déterminant une contraction notable.

La présence des granulations ou corps amorphes, à composition azotée, fut aussi démontrée dans la matière visqueuse empâtant les cellules; je retrouvai le même enduit visqueux avec les mêmes propriétés chimiques, vers le bout des radicelles qui avaient pénétré de plusieurs centimètres dans le sol.

Les membranes végétales non colorables en jaune par l'iode, ni par le tanin, et formant la mince tunique des cellules en question, offrirent les propriétés et la composition ternaire de la cellulose, principe immédiat du tissu propre des végétaux.

PARTIES DES TISSUS QUI ONT RÉSISTÉ À LA DIGESTION DES ANIMAUX.

Je suis parvenu à rendre plus prompte l'épuration du tissu des feuilles en les broyant fraîchement cueillies, puis les malaxant dans l'eau tiède et les pressant à plusieurs reprises. jusqu'à ce que le liquide sortît clair ou très-peu chargé.

Le traitement par les acides, la potasse et les autres agents fut alors bien plus efficace.

Espérant trouver des conditions plus favorables encore dans une sorte d'épuration toute faite par les organes digestifs, j'essayai d'extraire les membranes végétales des excréments des vaches nourries dans une prairie naturelle. Cette expérience me parut pouvoir, en outre, par la composition de ce résidu de la digestion, donner l'évaluation approximative de la qualité nutritive des diverses plantes, ou d'une plante à différents degrés de développement, suivant encore la nature du sol, des engrais et certaines conditions atmosphériques.

La préparation de cette cellulose à l'état de pureté fut effectivement bien plus facile et plus complète après le traitement par les différents réactifs. Observée sous le microscope, elle montrait alors un grand nombre de vaisseaux diaphanes blancs, ayant conservé leurs formes; l'analyse élémentaire suivante prouva son identité avec les autres membranes pures :

Matière employée	323	D'où	C = 44,92	= 100
Acide carbonique	525		H = 6,40	
Eau	189		O = 48,59	

TISSU DU PÉRISPERME DES BLÉS ET DU MAÏS.

Les membranes extraites pures des fruits du blé donnent à l'analyse les résultats des autres tissus végétaux; mais comme les agents employés pour cette épuration auraient pu dissoudre une partie de ce tissu de composition différente, et notamment le gluten, que l'on avait supposé formé de membranes végétales, il était utile de montrer que la substance formant les cellules a des propriétés différentes du gluten et des autres matières azotées qu'elles renferment; enfin, qu'il est possible d'extraire une partie ou la totalité de ces substances sans extraire en dissolution le véritable tissu végétal. On y parvient de plusieurs manières. En examinant au microscope des tranches minces du

périsperme des blés, on voit une matière grisâtre plus ou moins translucide, remplissant les cellules près de la périphérie du grain, offrant sous le microscope un aspect granuleux comme le montre la figure 1re de la planche XII. La matière qui remplit cette rangée de cellules sous-épidermiques offre les caractères des organismes azotés. Si on l'imprégne d'une solution, aqueuse alcoolisée, d'iode, elle jaunit et se contracte; si alors on introduit (sur le porte-objet entre les deux lames de verre) une goutte d'acide sulfurique, la substance granuleuse azotée se désagrége, laisse exsuder une matière grasse oléiforme, ainsi qu'on le remarque en *d''*, sur le dessin colorié. Le phénomène de cette jolie réaction se complète en montrant la cellulose qui, désagrégée graduellement, se colore en bleu violet, à l'instant où ses particules disloquées affectent les apparences des groupes des particules amylacées; on discerne enfin à sa coloration jaune-citron due au contact de l'iode, et à ses filaments étirés, la substance souple, élastique qui empâte les grains d'amidon dans les parties *e*, *f*, plus internes du périsperme. Cette matière hydratée offre les propriétés physiques du gluten. Tous les réactifs applicables à ce principe immédiat accusent sa présence en le contractant, changeant son aspect, ou l'entraînant en dissolution.

Ainsi le tanin le colore et le contracte, l'ammoniaque et l'acide acétique le dissolvent sans attaquer le tissu véritable qui apparaît, au contraire, plus net et mieux dégagé; l'alcool (étendu à 0,6) en dissout une partie; la solution d'iode, colorant en jaune toute la masse du gluten, en violet très-foncé l'amidon, et laissant les membranes végétales incolores, offre une autre démonstration élégante des mêmes faits.

Après la germination du blé à l'aide de l'eau, lorsque les développements de la tige, des feuilles et des radicelles ont épuisé les aliments accumulés dans le fruit, presque tout le caseum, l'albumine, l'huile, le gluten et l'amidon ont disparu: alors on ne retrouve plus que le tissu végétal avec sa composition chimique primitive.

Le gluten est donc au nombre des principes immédiats renfermés dans les cellules du périsperme des blés; on l'y trouve en proportion très-variable depuis 0,08 jusqu'à 0,20; il se compose de la réunion de plusieurs substances azotées, l'une très-ductile et élastique, soluble dans l'alcool à 0,6, plus à chaud qu'à froid; une autre insoluble moins souple; une troisième analogue à la matière caséeuse; enfin, une quatrième de nature albumineuse. Aucun de ces principes azotés ne fait partie constituante des membranes du tissu végétal.

La figure 12 présente une coupe perpendiculaire à l'axe du fruit du blé : *a*, cellulose constituant les épaisses parois de l'épisperme; *a'*, les mêmes cellules disloquées par l'action de l'acide sulfurique en présence de l'iode qui les bleuit et montre leurs couches concentriques; *b*, *b'*, *b''*, pellicule périphérique ou cuticule imprégnée d'une substance azotée qui la rend résistante à l'acide et lui fait prendre une coloration orangée par l'iode; *c*, pellicule semblable enveloppant le périsperme; *d*, *d'*, *d''*, rangée de cellules oléifères contenant un léger tissu azoté, jauni par l'iode, et qui, se désagrégeant par l'acide sulfurique, laisse exsuder l'huile, tandis que la cellulose qui forme les parois des cellules est colorée en bleu-violet. On voit sous cette rangée de cellules en *e f*, les premières cellules de la masse du périsperme qui contiennent l'amidon enchâssé dans le gluten. Celui-ci s'est trouvé dans la coupe, étiré en filaments jaunis par l'iode, tandis que l'amidon, globuliforme, est teint en violet foncé par le même réactif.

COMPOSITION DU PÉRISPERME DU *PHYTELEPHAS*.

On importe en France ces fruits, dont le périsperme blanc possède une dureté telle, qu'on le peut tailler et polir pour en confectionner divers menus objets de tabletterie imitant l'ivoire. M. Brongniart, en examinant le tissu de ce périsperme, pensa qu'il serait intéressant de rechercher si l'épaississement considérable des cellules dépendait d'une incrustation particulière ou de

couches ligneuses, ou enfin de la formation graduelle d'une substance homogène : il voulut bien me remettre un de ces fruits.

Les tranches, vues sous le microscope, offraient l'apparence d'un tissu celluleux à parois très-épaisses, renfermant des gouttelettes oléiformes près de la surface du périsperme et des granulations albuminoïdes dans toutes les cavités. Débarrassées par l'acide chlorydrique, l'ammoniaque, l'eau, l'alcool et l'éther, de la plus grande partie de ces corps étrangers, les épaisses membranes n'avaient éprouvé aucun changement visible.

La substance ainsi épurée, après avoir été préalablement réduite en poudre très-fine à l'aide d'une lime, était d'une blancheur remarquable; desséchée dans le vide à la température de 125°, puis analysée, elle donna les résultats suivants :

Substance employée	340		C = 44,14	
Eau	195	D'où	H = 6,30	= 100
Acide carbonique	543		O = 49,56	

D'ailleurs elle se transformait en dextrine par l'acide sulfurique, et en xyloïdine par l'acide azotique sans coloration; c'était évidemment de la cellulose pure, sauf des traces de silice, et elle avait été extraite en cet état plus facilement que d'aucun autre tissu jusques alors analysé. Elle offre donc un des exemples les plus nets et les plus faciles à démontrer, de la composition des cellules végétales.

Les réactions microscopiques observées à l'aide des procédés décrits ci-dessus (voyez p. 6) confirmèrent les déductions qui précèdent sur la composition chimique de ces périspermes; ces réactions sont représentées sur la planche I.

La figure 2 montre une coupe passant dans l'axe du périsperme de *phytelephas*, et la figure 3, une coupe perpendiculaire à la précédente. Les mêmes lettres correspondent aux parties semblables des deux figures : en *a*, on remarque les épaisses parois des cellules; en *b*, on voit les cellules elles-mêmes. Ce sont des cavités cylindroïdes auxquelles aboutissent un grand nombre

de canalicules dirigés vers les pertuis des cellules voisines; *a'* et *b'* indiquent les mêmes parties sous l'influence de la solution aqueuse d'iode. Cette solution colore en jaune orangé les substances organiques azotées renfermées dans les cellules et dans les canalicules. En *a''* et *b''*, on aperçoit le phénomène de désagrégation de la cellulose par l'acide sulfurique en présence de l'iode et la teinture violette qui en est la conséquence. La figure 4 indique les mêmes phénomènes observés sur une coupe perpendiculaire au rayon de ce périsperme et près de sa périphérie : là on distingue les lignes de démarcation entre les cellules, et la séparation se manifeste par l'action de l'acide sulfurique. Cet acide, en désagrégeant l'abondante sécrétion organique azotée qui remplit ces cellules près de la périphérie, met en liberté la matière grasse logée dans le tissu azoté. Nous avons vu plus haut, pages 12 et 13, que les périspermes des graminées contiennent aussi dans des cellules spéciales rapprochées de la superficie une abondante sécrétion oléifère.

COMPOSITION DU PÉRISPERME DU DATTIER.

Il en est ainsi des membranes épaisses du périsperme du dattier, que les solutions alcalines gonflent à froid, désagrégent et dissolvent à chaud. Ces membranes contribuent sans doute à la qualité alimentaire de ce périsperme, que l'on nomme le noyau des dattes, qui d'ailleurs renferme du sucre 0,053, des matières azotées 0,284, des substances grasses 0,145 et quelques sels solubles[1]. Le tissu bien épuré pèse 0,517, et donne les produits qui représentent la composition des membranes végétales.

COTON DES GRAINES DU PEUPLIER DE VIRGINIE.

Afin de vérifier encore sur cette sorte de poils végétaux la

[1] Les dattes elles-mêmes présentent, seulement auprès de l'épiderme de leur péricarpe, une rangée de cellules remplies de matière incrustante, ligneuse.

composition trouvée dans l'analyse du coton ordinaire, je les soumis à une épuration complète afin de les débarrasser ainsi de leur abondante matière grasse. Les analyses donnèrent alors les résultats suivants, qui représentent la composition du tissu végétal pur :

	COTON ÉPURÉ.	COMPOSITION.	
Matière employée	374	Carbone	44,11
Acide carbonique	598	Hydrogène	6,52
Eau	220	Oxygène	49,37

MEMBRANES VÉGÉTALES COMPOSANT LE SQUELETTE D'UN NID DE GUÊPES.

M. Magendie supposait, d'après les circonstances de la construction d'un nid de guêpes (*vespa gallica*), que les parois des cellules de ce nid devaient contenir une substance analogue à celle des membranes végétales. Il voulut bien me soumettre ce doute. L'échantillon fut lentement et assez difficilement épuré par les traitements indiqués ci-dessus, de plusieurs matières analogues à celles qu'on trouve dans les végétaux et de la substance collante particulière qui réunissait les matériaux de ce nid.

Après l'épuration complète, on vit distinctement sous le microscope que la substance désagrégée se composait de tubes plus ou moins longs, avec les formes des parties du tissu vasculaire des plantes.

Analysée alors, elle donna effectivement les nombres qui suivent, équivalents à ceux de la composition des membranes végétales :

Matière employée	250	C = 44,15	
Acide carbonique	400	D'où H = 6,22	= 100
Eau	141	O = 49,63	

J'avais précédemment montré qu'en traitant les bois incrustés par l'acide azotique à 36°, puis par la potasse et les autres dis-

solvants, on parvenait à éliminer toute la matière incrustante du bois, et qu'alors les membranes qui avaient résisté offraient la composition normale des tissus végétaux; mais il me parut probable qu'après une macération dans un acide faible, les traitements réitérés à chaud, par les solutions alcalines, devaient suffire pour dissoudre toute la matière ligneuse incrustante, et d'autres substances étrangères. En effet, le bois de cœur de chêne amené par la molette à une division très-grande, traité par un acide étendu, et trois fois alternativement par la solution de potasse bouillante jusqu'à siccité, puis par les autres dissolvants, laissa un résidu composé de membranes apparaissant diaphanes et incolores sous le microscope. Analysées alors, elles donnèrent la composition normale des tissus végétaux.

Analyse des membranes extraites pures du cœur du chêne.

Matière employée	366	D'où	C = 44,53 H = 6,03 O = 49,17
Acide carbonique	592		= 100
Eau	210		

J'obtins les mêmes résultats en appliquant un mode d'épuration semblable aux bois de hêtre, d'acacia et d'*aylanthus glandulosa*.

Il en fut de même encore d'un jeune tissu formé sur l'aubier d'une branche de peuplier, extrait au mois d'août. (Ce tissu contenait, outre les corps azotés, de nombreux granules globuliformes d'amidon, ayant au plus un demi-centième de millimètre.)

Épuré facilement, il offrit à l'analyse 44,5 de carbone et 55,5 d'eau.

COMPOSITION DU BOIS DES CONIFÈRES.

Après le grand nombre d'analyses que j'avais faites des tissus végétaux, l'examen chimique du tissu ligneux des conifères pouvait encore offrir de l'intérêt en raison des particularités qui distinguent la structure de ces bois.

En me livrant à ce travail, je ne tardai pas à constater plusieurs différences qui persistent jusqu'à l'époque de l'épuration complète des membranes.

Le bois de sapin réduit en poudre par la lime, épuré par l'eau, l'alcool, l'éther, les acides et les alcalis faibles, puis par la solution concentrée de soude caustique à chaud, l'acide chlorhydrique et l'eau, contenait encore des quantités sensibles de matière incrustante et de substance azotée qui étaient interposées dans les membranes. Celles-ci, en effet, étaient brunies par l'acide sulfurique; la solution aqueuse d'iode les colorait en jaune dans toute leur épaisseur. Calcinées avec de la potasse, elles laissaient dégager de l'ammoniaque. Enfin, la composition élémentaire s'éloignait beaucoup de celle qui représente la cellulose. On en jugera facilement par les deux analyses suivantes :

	1re.	2e			1re.	2e.
Matière employée....	398millig.	417	D'où	Carbone.....	52,01	51,79
Eau obtenue.....	227	237		Hydrogène.....	6,33	6,28
Acide carbonique....	750	784		Oxygène.....	41,57	41,93
					100	100

Afin d'obtenir l'épuration complète de cette cellulose, il fallut la broyer à l'eau sous la molette, puis la traiter par un courant de chlore, reprendre par la potasse l'acide chlorhydrique et l'eau. Devenue blanche alors, elle n'était plus brunie par l'acide sulfurique, qui la transformait à froid en dextrine; l'iode en solution aqueuse ne la colorait plus sous le microscope; elle ne dégageait plus d'ammoniaque à la calcination; enfin, desséchée à 120° dans le vide, elle donna les résultats analytiques ci-après indiqués :

	1re.	2e.	3e.			1re.	2e.	3e.
Substance employée..	312	394	251,2	=	Carbone.....	45,09	44,77	44,77
Eau obtenue.....	183	234	157		Hydrogène...	6,47	6,58	6,96
Acide carbonique....	509	638	407		Oxygène.....	48,44	48,65	48,66
						100	100	100

Ainsi, une fois amenée, sans perdre sa structure membraniforme, à l'état de pureté complète, la cellulose du sapin est identique avec la substance qui constitue les membranes des cellules de tous les végétaux.

PROPRIÉTÉS PHYSIQUES ET COMPOSITION ÉLÉMENTAIRE DU TISSU DES CRYPTOGAMES.

Les nombreuses analyses que j'avais faites des divers tissus des végétaux phanérogames conduisaient à supposer une composition élémentaire uniforme dans toutes leurs membranes; mais il restait à découvrir si la cellulose formait aussi la trame des parois cellulaires dans les cryptogames : tel fut l'objet de cette seconde série de recherches.

Analyses des *conferva rivularis* et *oscillatoria*.

J'essayai donc de traiter sous les mêmes points de vue plusieurs conferves. La soude, en désagrégeant à chaud la membrane enveloppante des filaments tubuleux de *conferva rivularis*, isola les unes des autres les longues cellules qui, appuyées bout à bout et plus ou moins remplies de matière verte, occupaient toute la capacité tubulaire.

Pour éliminer entièrement la matière verte, il fallait ouvrir les cellules qui la tenaient en partie à l'abri des dissolvants. J'y

parvins en les agglomérant ensemble, à l'état humide, par une pression graduée, desséchant la masse, puis la soumettant à l'action d'une lime. Alors l'alcool, l'ammoniaque, les solutions de soude et de potasse, étendues, enlevèrent les substances azotées et la matière verte en dissolution; le chlore en fit disparaître les dernières traces en éliminant aussi une substance brune; l'acide chlorhydrique, l'eau, l'éther et l'alcool achevèrent l'épuration en enlevant du carbonate de chaux et des substances grasses. Les membranes épurées des *conferva rivularis* et *oscillatoria* [1] offrirent alors la composition des autres tissus, ainsi que le prouvent les détails analytiques suivants :

Première analyse des conferves (*rivularis*).

Membranes épurées séchées à + 120°.

Matière employée	= 0,233		C = 44,50	
Acide carbonique	= 0,372	D'où	H = 6,32	= 100
Eau	= 0,134		O = 49,18	

Deuxième analyse des conferves (*rivularis*).

Desséchée à + 180° dans le vide.

Substance employée	= 0,442		C = 44,57	
Acide carbonique	= 0,716	D'où	H = 6,30	= 100
Eau	= 0,259		O = 49,68	

Analyse de l'oscillaire épurée par les réactifs *ci-dessus indiqués*.

Desséchée dans le vide à + 180°.

Matière employée	= 0,161		C = 45,34	
Acide carbonique	= 0,264	D'où	H = 6,58	= 100
Eau	= 0,096		O = 48,08	

[1] Ces conferves, après une complète épuration, présentaient, sous le microscope, les débris de leurs cellules vides.

La petite surcharge de carbone et d'hydrogène, dans cette analyse, m'a conduit à trouver encore, dans l'oscillaire, malgré son épuration, une quantité notable de matière de consistance grasse, fluide à chaud, figée à froid, soluble dans l'éther et dans la potasse [1].

Une deuxième analyse, faite en employant la substance épurée complétement par l'éther, et desséchée dans le vide à + 180°, donna les résultats suivants :

Matière employée.....	237	équivalent à	C = 44,89
Acide carbonique.....	385		H = 6,16
Eau.....	132		O = 48,95

Composition du tissu des champignons.

Les champignons encore, parmi les cryptogames, méritaient une attention sérieuse; car, sur l'autorité d'un savant analyste, on y admettait un tissu d'une composition particulière qui avait reçu le nom de *fungine;* l'auteur l'avait extrait du *boletus igniarius.*

J'apportai les plus grands soins à son examen; l'épuration complète nécessita les mêmes manipulations que pour les conferves, et beaucoup plus de précautions encore, car il est formé de membranes altérables, et la grande quantité de matières colorables en brun, grasses, azotées, etc. qu'il recèle, ne peuvent être totalement enlevées qu'en faisant passer un courant de chlore gazeux dans le liquide [2]. Je lui trouvai enfin, comme le prouvent les détails analytiques, la composition des membranes des autres végétaux.

[1] Sans doute elle était restée interposée, faute de lavages suffisants après l'action de la potasse.

[2] Cette méthode d'épuration doit être suivie avec ménagement, car elle est efficace par la réaction sur la cellulose qui, altérée et dissoute à sa superficie, ne peut plus conserver d'adhérence avec les corps étrangers en contact avec les parois, ou même qui ont pénétré dans leur épaisseur.

Analyse de la cellulose extraite du *boletus igniarius*.

Matière employée.....	= 0,417		C = 44,45
Acide carbonique.....	= 0,685	D'où	H = 6,14 } = 100
Eau.....	= 0,231,5		O = 49,41

Composition des membranes du champignon de couches (*agaricus edulis*).

Avant de prononcer définitivement sur la matière du tissu des champignons, il pouvait paraître utile de vérifier les premiers résultats en procédant à l'analyse d'une sorte très-différente de la première, par les circonstances de sa végétation comme par sa consistance. Les champignons de couches furent employés dans cette vue; l'analyse immédiate y démontra des proportions considérables de substances azotées, d'une matière grasse cristallisable, volatilisable en partie dans le vide à + 180°, des sels, etc. Leur épuration complète fut obtenue en les lavant d'abord à l'eau froide, puis exprimant avec force; séchés alors, on put les réduire en poudre qui fut tamisée. On fit réagir sur celle-ci alternativement l'éther, l'alcool, l'ammoniaque à chaud, l'acide chlorhydrique, une solution faible de potasse, le chlore, l'acide chlorhydrique et l'éther. Des lavages intermédiaires eurent lieu à l'eau chaude. Séchée alors dans le vide à + 160°, la substance membraneuse offrit la composition des autres membranes, comme l'indiquent les données analytiques suivantes :

Analyse des membranes du champignon de couches.

Tissu bien épuré, puis desséché dans le vide à + 160°.

Matière employée.....	316 millig.		C = 44,52
Acide carbonique.....	534	D'où	H = 6,67 } = 100
Eau.....	190		O = 48,81

Ainsi les champignons ne sont point formés d'un tissu particulier. Ce sera donc encore une anomalie éliminée de la science.

Composition des membranes du *chara hispida*.

Je crus pouvoir déterminer sous les mêmes points de vue la composition élémentaire des membranes du *chara*, sur lequel les physiologistes nous ont appris de si importantes particularités. Après avoir éliminé mécaniquement ou par dissolution le liquide et les granules verts à compositions azotées, puis le carbonate de chaux et toutes les substances étrangères [1], j'obtins les membranes blanches diaphanes et pures. Leur analyse, ci-dessous indiquée, offrit la composition normale des tissus végétaux.

Analyse des membranes du *chara*.

Substance	= 0,216		C = 44,28	
C^2 O^2	= 0,348	D'où	H = 6,29	= 100
H^2 O	= 0,123		O = 49,43	

CARACTÈRES DISTINCTIFS ENTRE LES CELLULES DES VÉGÉTAUX ET DES MEMBRANES DES ANIMAUX.

Si j'ai réellement fait disparaître les variétés de composition attribuées à la trame du tissu des plantes pour y substituer une formule unique, il me sera peut-être permis d'énoncer une opinion que j'ai conçue il y a plusieurs années. Alors elle était basée seulement sur deux séries parallèles de réactions chimiques moins certaines, bien qu'elles se trouvent vérifiées aujourd'hui. Dès cette époque, en effet, il m'avait paru possible d'établir une distinction rationnelle entre les animaux et les végétaux, près de cette limite où plusieurs caractères semblent les confondre. Les membranes végétales bien agrégées sont inaltérables sensiblement en présence d'une foule d'agents, tels que l'iode, le chlore

[1] Le *chara* contient des granules d'amidon, des corps verdâtres azotés, des substances azotées, solubles, des matières grasses, une substance colorante, un principe odorant rappelant l'odeur marécageuse de plusieurs conferves, du chlorure de potassium, du carbonate de chaux adhérent aux membranes externes et de la silice. On ne voit pas de carbonate calcaire sur le *chara translucens*.

affaibli, les alcalis et les acides étendus, le tanin, plusieurs sels neutres, l'alcool et la créosote, qui colorent, attaquent, dissolvent ou contractent fortement les membranes des animaux. Mais la distinction qui se fonde sur leur composition élémentaire est encore plus certaine.

En effet, les combinaisons organiques quaternaires font partie constituante des membranes animales, tandis que les combinaisons azotées n'entrent pas dans la nature intime des membranes végétales. Celles-ci offrent constamment une composition ternaire bien définie C^{24} H^{20} O^{10} ou H^2 O, C^{24} H^{18} O^9.

D'une part, les proportions considérables de substances azotées que m'ont offertes les analyses de tous les jeunes organes des végétaux, et, d'un autre côté, les propriétés physiologiques, notamment une grande énergie vitale, démontrée par M. Dutrochet dans ces parties des plantes où j'ai trouvé le plus d'azote, sembleraient, au premier abord, devoir faire repousser la distinction que j'essaye d'établir; mais, en y réfléchissant un peu, on verra qu'il n'y a aucune contradiction entre ces faits; on verra qu'ils s'accordent au contraire très-bien entre eux; qu'ils sont en harmonie avec les observations relatives, soit au rôle des matières azotées dans les engrais les plus favorables au développement des végétaux, soit à la composition quaternaire des substances contenues dans les organes qui prennent part directement à la fécondation des plantes : c'est que, dans toutes ces circonstances, les corps azotés semblent accomplir les fonctions principales; ils sont enveloppés dans les cellules végétales, sans faire partie intégrante des parois de ces cellules.

NATURE AMYLACÉE DE QUELQUES TISSUS VÉGÉTAUX.

Les considérations qui précèdent m'ont conduit à résoudre une question que j'avais autrefois vainement étudiée. Il s'agissait de savoir où est situé, dans le tissu du lichen d'Islande, l'amidon que l'analyse chimique y démontre en abondance.

Bien certain aujourd'hui que la substance des cellules végétales est isomérique avec l'amidon et n'en diffère, dans les réactions physiques, que par une agrégation considérablement plus forte entre ses particules, je crus pouvoir admettre qu'il existait dans le lichen d'Islande des membranes assez faiblement agrégées pour présenter quelques-uns des caractères de l'amidon.

Dans la vue de vérifier cette induction, je purifiai d'abord le lichen en le soumettant aux réactifs, tels que l'eau, l'acide acétique et l'ammoniaque, qui, sans attaquer son tissu, dissolvent les substances étrangères. Alors l'iode, ajouté sur des tranches minces, observées sous le microscope, développa une teinte bleue dans les membranes du tissu sous les parties corticales; celles-ci prirent une teinte jaunâtre, légèrement orangée.

La nuance bleue diparaissait sous l'influence des alcalis; la potasse et la soude opéraient en outre un gonflement rapide, puis une dissolution graduelle des membranes. Ces phénomènes caractéristiques, appartenant à la substance amylacée, m'encouragèrent à pousser plus loin mes investigations. Je procédai à l'extraction de la gelée du lichen, et je constatai sans peine qu'elle était obtenue des membranes susceptibles de bleuir par l'iode; qu'elle avait acquis elle-même cette propriété, tandis que la couche corticale, non colorable en bleu par l'iode, n'était pas dissoute par l'eau bouillante, même à une température de $+170°$ en vase clos.

Traitant alors la gelée du lichen par la diastase à $+75°$ cent. je rendis soluble à froid la substance identique avec l'amidon en la convertissant en dextrine et en sucre.

Je parvins de cette manière à séparer l'inuline restée intacte en présence de la diatase.

Ayant constaté que l'acide acétique transforme à chaud l'inuline en glucose soluble à l'eau froide et même dans l'alcool, il me fut facile d'éliminer cette substance, à son tour, et d'obtenir l'amidon isolément.

Ainsi donc la gelée du lichen, aussi blanche et pure qu'on

ait pu se la procurer directement, contient de l'amidon hydraté, plus de l'inuline.

Ce résultat n'est peut-être pas sans intérêt, après les travaux de plusieurs savants chimistes, dont l'un avait indiqué les deux substances sans les extraire; un autre, depuis, n'y trouva que de l'amidon, et, plus récemment encore, un troisième, considérant l'ensemble comme un principe immédiat particulier, lui donnait une dénomination spéciale.

L'analyse, ci-dessous indiquée, des membranes épurées du lichen donna les nombres qui représentent la composition de la substance amylacée.

Substance séchée à 130° dans le vide.	0gr,519		
Acide carbonique	842millig.	= Carbone	44,70
Eau	291	Hydrogène	6,21
		Oxygène	49,09

L'amidon ne se trouve donc pas contenu à l'état de granules dans les cellules du lichen; il est partie intégrante de la membrane des cellules elles-mêmes.

Cette composition et la facile dissolubilité des membranes en question expliquent la qualité alimentaire de certains lichens, et une propriété semblable dans des tissus végétaux facilement désagrégeables.

Les membranes des sporules de plusieurs champignons, débarrassées des matières riches en azote (à l'aide d'une solution à 0,1 de potasse tenue une heure à 100°), présentent, sous l'influence de l'iode, les caractères de la substance amylacée. C'est un nouvel exemple du fait que j'ai observé dans le lichen, et qui, sans doute, se reproduira ailleurs encore.

TRANSFORMATION ARTIFICIELLE DU TISSU VÉGÉTAL EN DEXTRINE, CARACTÉRISÉE PAR SON ACTION SUR LA LUMIÈRE POLARISÉE ET PAR L'ANALYSE DE SES DIFFÉRENTES COMBINAISONS.

Ayant vu que la matière du tissu élémentaire des végétaux, que j'avais isolée, offrait une composition pareille à celle de la

dextrine; qu'en outre, sous certaines conditions de désagrégation, elle était teinte en bleu par l'iode, j'ai pensé qu'il serait utile d'examiner si la constitution moléculaire, indiquée par les caractères optiques, indépendamment de l'agrégation, se trouvait d'accord avec les données précédentes.

Cet accord s'est en effet réalisé, car, une petite quantité de la matière étant dissoute dans l'acide sulfurique à l'aide d'une température d'environ 60 degrés, la solution, étudiée par la lumière polarisée, exerçait la rotation vers la droite comme la dextrine, et correspondait à cette substance par son énergie.

Quoique l'état de l'atmosphère et la très-petite quantité de matière employée n'eussent pas permis de donner à cette observation tout le développement dont elle serait susceptible, les effets observés ont été assez nets et assez certains pour démontrer l'existence du pouvoir rotatoire avec une intensité tout à fait comparable à celle de la dextrine; et cela n'a pas paru ainsi seulement à moi, mais aussi à M. Biot, avec les appareils duquel j'ai fait ces observations au collége de France.

Il convenait, pour lever tous les doutes, de contrôler ces observations par l'analyse immédiate et élémentaire. Dans cette vue, je soumis du tissu épuré à l'action de l'acide sulfurique froid. Dès que la désagrégation et la dissolution furent opérées, on étendit d'eau, puis on élimina l'acide sulfurique par une saturation exacte avec la baryte. La solution filtrée fut alors évaporée rapidement, et le résidu, sec, broyé, puis exposé dans le vide à une température soutenue de 140 degrés, fut analysé et donna les nombres correspondants encore à la dextrine; enfin, uni à la baryte, il offrit un composé soluble présentant les caractères du dextrinate neutre de baryte et la même composition.

Plusieurs autres combinaisons offrant des moyens de vérification de l'identité moléculaire ci-dessus indiquée, j'ai dû m'efforcer encore de les obtenir. Les fibrilles du coton épuré, broyées avec l'acide azotique, se sont peu à peu désagrégées sans dégagement de gaz. L'addition de l'eau précipita la xyloï-

dine, et l'augmentation de poids correspondit avec ce composé.

Les résultats ainsi obtenus permettent de suivre les phénomènes de la jolie expérience de M. Pelouze : on plonge dans l'acide azotique concentré un tissu de coton pur; au bout de quelques heures on le retire pour l'immerger dans un grand excès d'eau; desséché, alors on remarque que ce tissu est devenu plus épais, plus lourd, moins flexible, imperméable à l'eau. L'analyse prouve qu'il est composé de xyloïdine et de membranes non attaquées.

Les essais que nous allons rapporter indiquent la marche à suivre pour cette analyse, et permettent de varier les curieux résultats de l'expérience.

Si l'on retire à des intervalles différents, de deux en deux heures, par exemple, plusieurs morceaux de toile de coton placés simultanément dans l'acide, qu'on les lave et les dessèche comme nous venons de le dire, les changements décrits se réaliseront d'autant plus prononcés que la réaction aura été plus longue.

Chacun des morceaux de toile étant alors plongé dans la potasse, la xyloïdine sera peu à peu défaite; ses éléments, dissous dans le liquide, y laisseront le tissu d'autant plus léger, souple ou même désagrégé, que la formation de la xyloïdine avait été plus abondante. En rapprochant le liquide par la quantité de nitrate, on se rendra compte de la première augmentation de poids du tissu, de la perte qu'il a éprouvée, enfin de la composition de la xyloïdine produite. On en devra conclure que, dans ces expériences, les membranes sont graduellement attaquées dans leurs parties le plus faiblement agrégées. La xyloïdine, adhérente aux membranes des cellules, s'y fixe au moment de sa précipitation par l'eau; elle produit les changements ci-dessus décrits, et cette grande combustibilité que M. Pelouze a fait connaître.

L'action des alcalis (soude et potasse) en solution concentrée, lorsqu'on la favorise par des broyages énergiques, permet aussi de dissoudre les parties des membranes qui sont douées d'une

moindre force d'agrégation; on parvient même, au moyen de la soude caustique, à réduire la totalité en une masse mucilagineuse; et tous ces produits, plus ou moins divisés, dissous ou combinés, offrent la composition chimique élémentaire et le poids atomique de la dextrine.

Les composés de soude ou de potasse avec la substance désagrégée furent lavés par l'alcool, qui entraîna l'excès d'alcali, laissant la combinaison opérée entre un équivalent de la base et un équivalent de la dextrine : l'incinération et la conversion en sulfate le démontrèrent.

Ainsi le tissu propre des plantes offre un cas d'isomérie dépendante d'une force d'agrégation particulière avec l'amidon, et tous deux sont isomériques avec la dextrine.

COMPOSITION CHIMIQUE DU POLLEN DU CHARA.

Les vésicules de couleur orangée qu'on voit sur les rameaux du chara contiennent, comme on le sait, des cellules très-longues et souples. J'ai reconnu que leurs minces membranes ont la composition chimique du tissu végétal, tandis que les substances renfermées par elles offrent la composition azotée propre aux corps enveloppés dans les plus jeunes organes des plantes.

Ces résultats analytiques me semblent être des conséquences naturelles de la constitution des organes reproducteurs du chara, telle que M. Brongniart l'a indiquée, non-seulement quant à la graine monosperme, mais encore relativement aux substances azotées contenues dans les membranes végétales, et qui se rapporteraient au pollen de l'organe mâle.

COMPOSITION CHIMIQUE DES CORPS DOUÉS DE MOUVEMENTS SPONTANÉS DANS LES PLANTES.

Les faits chimiques que je viens d'exposer sont encore en harmonie avec les observations de M. Meyen et celles de M. Bron-

gniart sur les mouvements spontanés des petits corps renfermés dans ce pollen (*Annales des Sciences naturelles*, novembre et décembre 1838); car tous les corps capables de manifester des mouvements spontanés, autres que ceux des particules de Brown, et tels, par exemple, que les corpuscules organiques renfermés dans les tubes du chara, se sont trouvés, d'après mes expériences, avoir une composition quaternaire azotée analogue à la composition chimique des animaux.

SUBSTANCES GRASSES RENFERMÉES DANS LES TISSUS VÉGÉTAUX.

Nous avons vu que l'épuration de la cellulose extraite des champignons, des conferves, du périderme du *quercus suber* et de toutes les feuilles des plantes, est surtout entravée par la présence des matières grasses ou cireuses. On comprend que des quantités même faibles de celles-ci puissent en effet augmenter sensiblement les proportions de carbone et d'hydrogène dans les tissus analysés.

Toutefois, afin de fixer à cet égard les idées par des nombres, j'ai cru devoir, 1° comparer la composition des tissus à l'état normal avec la cellulose épurée; 2° extraire et analyser à part quelques-unes de ces matières.

Analyses comparées du coton des graines du peuplier de Virginie.

L'influence des matières grasses et azotées contenues dans les poils qui constituent cette sorte de coton, sur les résultats de l'analyse, indiquent leur présence et leurs proportions notables.

La première analyse fut faite sur ces poils épurés mécaniquement; la deuxième ne se fit sur la même substance qu'après son épuration complète, à l'aide de l'ammoniaque, l'acide chlorhydrique et l'eau, du chlore, de la potasse et de l'éther.

		1re.	2e.
Substance analysée		261	374
Acide carbonique		462	598
Eau		161,5	220
Composition	Carbone	48,65	44,11
	Hydrogène	6,82	6,52
	Oxygène et azote	44,53	49,37
		100	100

On voit que la première analyse donne un excès de carbone et d'hydrogène, tandis que la deuxième reproduit la composition du tissu ramené à l'état normal de cellulose pure.

COMPOSITION DES MATIÈRES GRASSES QUE CONTIENNENT LES CHAMPIGNONS (*AGARICUS EDULIS*).

Ces substances furent extraites à l'aide d'un mélange d'alcool et d'éther, qu'on fit réagir sur des champignons coupés, desséches et broyés. Obtenues ainsi, elles étaient cristallisables, et retenaient une matière colorante brune, plus soluble dans l'alcool que dans l'éther. Desséchées à 120° dans le vide, elles ont donné les résultats suivants :

Matière employée : 350 milligrammes. On a obtenu : acide carbonique 811 + eau 301, ce qui correspondrait à la composition :

Carbone	64	100
Hydrogène	9,54	
Oxygène	26,46	

COMPOSITION ÉLÉMENTAIRE DE LA SUBSTANCE GRASSE DU LIÉGE

Elle fut extraite, en attaquant d'abord la râpure de liége par une solution de chlorure de chaux, afin de désagréger ou de dissoudre la cellulose, puis par l'acide chlorhydrique et l'eau.

Poids de la substance desséchée à + 120° : 311 milligrammes

qui ont donné : acide carbonique 758 + eau 268, d'où l'on déduit la composition :

Carbone	67,36	100
Hydrogène	9,58	
Oxygène	23,06	

La levure de bière doit être considérée, d'après les observations de M. Cagniard de Latour, comme des amas de végétaux rudimentaires, limités, chacun d'eux, à une cellule globuliforme et ce qu'elle contient. Cette matière doit également aux substances grasses et azotées l'excès d'hydrogène de sa composition élémentaire.

Analysée pour le dosage de l'azote, après dessiccation à 110° dans le vide, elle donna les résultats suivants : poids de levure sèche employée, 222 milligrammes; volume de l'azote obtenu, 18 centimètres cubes; pression, 0,745; température, 7,50 : ce qui donnerait 9,65 d'azote pour 100. Elle laissa, après l'incinération, un résidu de 5,8 pour 100 de son poids. Une autre partie, épuisée par l'éther, donna 0,021 de substances grasses. Sa composition immédiate se peut donc représenter ainsi :

Matière azotée et traces de soufre	62,73	100
Enveloppes de cellulose	29,37	
Substances grasses	2,10	
Matières minérales	5,80	

Des végétaux analogues, colorés en rouge, occasionnent la plus grande partie de la coloration des eaux de la mer concentrées au soleil dans les salines. Ils ont été observés par M. Joly et nommés *Monas Dunalii*. Lavés à froid par l'eau, desséchés, épuisés à chaud (60°) par l'alcool, ils cèdent une matière grasse oléiforme, rouge, aromatique, graduellement plus orangée. L'éther en extrait une huile colorée en jaune et les laisse teints encore de cette couleur. Ces petits végétaux contiendraient en totalité 8 de substance grasse pour 100 de leur poids. Quelque incertitude peut rester sur ce dosage, parce qu'ils étaient un peu altérés; mais le fait de la présence d'une matière grasse, plus abondante

même que dans la levure, ne peut être l'objet d'un doute. Toutes les feuilles des plantes phanérogames ont présenté à l'analyse immédiate de 2 à 5 pour 100 de matières cireuses, grasses et oléiformes; plus des substances azotées, des huiles essentielles et des matières colorantes solubles dans l'alcool.

C'est donc aux *matières grasses* que l'on doit, surtout, attribuer les fortes proportions de carbone et l'excès d'hydrogène obtenus lorsqu'on les analyse à l'état normal.

Le rôle de ces matières dans les actes de la vie végétale me semble d'autant plus important, qu'elles se sont rencontrées en grandes proportions dans les cotylédons de toutes les graines que j'ai analysées.

Les faits qui précèdent rendront facile à comprendre le fort dosage en carbone et l'excès d'hydrogène obtenus dans toutes les analyses des tissus mous des végétaux pris à l'état normal, encore bien que la trame organique de toutes leurs cellules, parfaitement épurée, ne contienne que 0,444 de carbone, plus 0,555 d'hydrogène et d'oxygène dans le rapport qui constitue l'eau.

COMPOSITION ÉLÉMENTAIRE DE FEUILLES, POILS ET CHAMPIGNONS ANALYSÉS À L'ÉTAT NORMAL, DESSÉCHÉS DANS LE VIDE À 120° C^x, CENDRES DÉDUITES.

SUBSTANCES ANALYSÉES.	CARBONE.	HYDROGÈNE.	OXYGÈNE.	AZOTE.		EXCÈS d'hydrog. dans 100 de m. organ.	QUANTITÉ de cendres pour 100.
Feuilles vertes de mûrier.....	51,89	6,70	35,73	5,68	100	2,22	12,10
——— d'acacia.....	57,65	6,96	40,86	3,31	100	1,82	9,40
——— de peuplier.....	47,20	6,00	43,50	3,30	100	0,58	12,20
——— d'*aylanthus glandulosa*...	56,19	6,81	33,75	3,25	100	2,60	11,80
——— de graminées.....	49,18	6,59	41,86	2,37	100	1,36	12,25
——— de chicorée.....	48,89	6,17	41,44	3,50	100	1,02	10,80
Poils des graines de peuplier.....	48,65	6,82	42,03	2,00	100	1,57	1,30
Champignons de couche.....	49,78	7,73	33,76	8,53	100	3,51	5,15

Ce tableau montre qu'en moyenne l'excès de l'hydrogène, dans la substance organique totale des feuilles développées, peut s'élever au delà de 1,80 pour 100. Sans doute les résultats varieraient suivant qu'on ferait porter les analyses sur des feuilles plus jeunes ou plus âgées; mais la conclusion définitive resterait la même, et l'excès d'hydrogène serait toujours plus grand dans ces parties foliacées et dans les cryptogames que dans le bois normal ou lavé.

COMPARAISON ENTRE LES PARTIES RÉSISTANTES DES MEMBRANES ANIMALES ET DES MEMBRANES VÉGÉTALES.

Fibrilles et membranes d'un tendon et d'un intestin de mouton.

Afin de lever d'avance une objection qui pourrait être faite aux conclusions de mon mémoire, j'ai réduit à ses fibrilles les plus résistantes un tendon de bœuf, à l'aide d'opérations mécaniques et chimiques appropriées. En cet état, blanc, diaphane, tel que je le présente, il se gonfle à froid et se dissout à chaud dans l'acide acétique, et, dans l'acide chlorhydrique étendu, sa composition est quaternaire; il reste donc parfaitement distinct des membranes végétales, par ses propriétés comme par sa composition chimique.

Il pouvait être utile de comparer les propriétés des parties douées de cohésions différentes dans les membranes des animaux avec la cellulose, épurées par des moyens analogues. Voulant répéter cette expérience dans des circonstances décisives, je me procurai, chez M. Savaresse, fabricant de cordes harmoniques, un intestin grêle de mouton, réduit, par des frottements énergiques et des macérations dans des solutions faibles de potasse, à sa membrane la plus résistante; il formait alors une enveloppe tubulaire continue tellement mince, qu'il aurait fallu réunir et tordre trois intestins semblables pour égaler le diamètre d'une chanterelle; dans toute sa longueur de 14 mètres, il pesait à peine 5 grammes. On peut juger de sa faible épaisseur en examinant les bouts insufflés que je présente à l'Académie.

En cet état il fut soumis, 1° à des macérations et lavages par l'éther qui enlevèrent des matières grasses; 2° à une immersion à froid dans l'acide acétique concentré, qui opéra un gonflement rapide; 3° à une ébullition, pendant 15 minutes, dans le même acide, qui fit dissoudre une petite quantité de la substance; 4° à l'action d'une solution à 0,1 de potasse, chauffée pendant 5 minutes à 100°. Cette fois, plus des 0,9 du poids de la matière furent entraînés en dissolution; quelques fibrilles et vaisseaux à contours nets encore avaient résisté. La substance organique analysée, soit à l'état normal, soit après chacun des cinq traitements précités, offrit toujours la composition quaternaire riche en azote.

J'arrivai aux mêmes conclusions en traitant ensuite séparément la membrane extérieure qui était plus attaquable, car elle fut dissoute dans l'acide acétique chauffé à 100°. Elle était d'ailleurs, ainsi que la première, contractée par l'eau bouillante et par plusieurs solutions salines froides, contractée et jaunie par l'iode[1], dissoute en totalité par une ébullition prolongée dans la solution à 0,2 de potasse caustique.

Aucune des parties de l'intestin ne saurait donc se confondre par sa constitution chimique avec les tissus des végétaux.

[1] D'après un grand nombre d'essais, M. Donné regarde la coloration jaune par l'iode comme étant propre à toute matière organique, admettant l'azote au nombre de ses principes constituants.

Je n'ai pas trouvé jusqu'ici d'exception à cette règle, du moins en ce qui concerne les différentes parties des corps ou substances organisés.

TABLEAU COMPARATIF DES PROPRIÉTÉS QUI DISTINGUENT LES CELLULES VÉGÉTALES DES MEMBRANES ANIMALES.

	CELLULES VÉGÉTALES bien agrégées, humides.	MEMBRANES des ANIMAUX (hydratées).
Température élevée au rouge.	Le produit condensable le plus abondant, non compris l'eau, est l'*acide acétique;* le résidu charbonneux *n'est pas déformé.*	Le produit distillé le plus abondant, non compris l'eau, est le *carbonate d'ammoniaque;* le résidu charbonneux *est,* très-généralement, *boursouflé.*
Décomposition spontanée.	Produits et résidus acides.	Produits et résidus acides et ammoniacaux.
Iode en solution aqueuse saturée.	Légère contraction. Coloration nulle.	Coloration jaune-orangé, et souvent forte contraction.
Soude et potasse étendues et ammoniaque.	Action peu sensible, même à chaud.	Dissolution plus ou moins complète et rapide à chaud.
Acide chlorhydrique étendu, à chaud.	Action sensiblement nulle.	Dissolution plus ou moins complète.
Acide acétique.	Action nulle.	Dissolution partielle, lente ou rapide à chaud.
Acide tanique (tanin).	Action nulle ou faible contraction.	Contraction plus ou moins forte, combinaison.
Sulfate d'alumine.	Action nulle.	Contraction et combinaison.
Bi-chlorure de mercure.	Action nulle.	Combinaison intime et contraction.
Composition.	Ternaire, bien définie $= (H^2O, C^{24} H^{18} O^9)$: formule unique n'admettant pas d'azote.	Quaternaire, à plusieurs formules, contenant toujours de l'azote, en fortes proportions.

On remarque, dans les effets des réactifs sur différentes membranes et sur quelques produits des animaux, des variations assez notables, mais leur composition et leurs propriétés ne les distinguent pas moins de la trame des cellules végétales.

Ainsi la membrane péritonéale et la membrane musculeuse des intestins se contractent dans l'eau bouillante et même dans l'acide chlorhydrique chaud avant de se désagréger et de se dissoudre, tandis que, dans les mêmes circonstances, les tendons se gonflent d'abord; mais le résultat définitif est le même, et les autres propriétés ci-dessus décrites leur sont communes.

Le mucus solide qui constitue les poils, les ongles, la corne, etc. des animaux, se distingue parfaitement des tissus végétaux par les produits de sa distillation, qui abondent en carbonate d'ammoniaque; par le résidu charbonneux, qui est très-boursouflé; par l'action, soit de l'iode, qui le colore en jaune orangé, soit des alcalis caustiques, qui le dissolvent; enfin, et surtout, par sa composition quaternaire. Les mêmes propriétés séparent nettement la fibrine et l'albumine de la cellulose ou trame végétale. Enfin, celle-ci, faiblement agrégée [1], se rapproche beaucoup de l'amidon; désagrégée, elle peut être amenée à l'état de dextrine. Sous ces trois formes elle est isomérique, et sa composition est ternaire; enfin, par une combinaison avec les éléments de l'eau, elle se peut transformer en glucose. Rien de semblable n'a lieu relativement aux membranes ni aux produits précités des animaux.

CONCLUSIONS.

Les faits contenus dans ce mémoire me semblent justifier les conclusions générales suivantes :

[1] Lorsque la substance de ces membranes est faiblement agrégée, elle éprouve, de la part de divers réactifs, des influences analogues à celles que subit l'amidon hydraté, quoique beaucoup moins fortes.

1° La cellulose, qui constitue la trame des cellules dans les plantes, offre une composition chimique homogène dans toute l'étendue du règne végétal.

2° Cette substance, représentée par la formule C^{24}, H^{18}, O^{9}, H^{2}, O, est isomérique avec l'amidon, la dextrine, l'inuline normale et l'inuline soluble.

3° Les degrés d'agrégation de la cellulose modifient ses propriétés physiques et sans doute ses qualités nutritives. Fortement agrégée, sa résistance à divers agents chimiques et à l'action digestive est très-remarquable.

4° La médulline, la fungine, la lichénine, la lignine, considérées comme principes immédiats particuliers, n'existent pas. Bien épurées, elles offrent une identité complète avec la cellulose.

5° Le gluten ne constitue pas un tissu; c'est un principe immédiat renfermé dans les cellules du périsperme des fruits de plusieurs céréales.

6° Les substances azotées accompagnent toutes les productions végétales, se trouvent dans toutes les cellules naissantes, mais ne font point partie constituante de la trame de celles-ci, ni d'aucune des enveloppes cellulaires ou vasculaires dans les tissus des végétaux.

7° Les propriétés physiques et chimiques des cellules végétales, comparées avec les propriétés des membranes des animaux, établissent une démarcation nette entre elles. Les premières ont une composition ternaire qui exclut l'azote; les dernières offrent constamment une composition quaternaire azotée.

Ainsi donc, les corps doués des principales fonctions vitales qui admettent l'azote au nombre de leurs éléments constitutifs sont, *dans les plantes, enveloppés par une trame organique formée de cellulose*, tandis que *les substances azotées qui constituent les animaux proprement dits ne sont pas enfermées dans des enveloppes de matière organique non azotée*. La présence ou l'absence des enve-

loppes de cellulose établit une distinction précise entre les individus des deux règnes. Cette distinction fondamentale permet, en outre, de ramener vers une immense unité de composition élémentaire tous les êtres vivants de la nature.

EXPLICATION

DES FIGURES DE LA PLANCHE PREMIÈRE.

DIFFÉRENTS ÉTATS DE LA CELLULOSE.

Fig. 1. Cellulose formant les parois minces des cellules de l'*æschynomene paludosa*.

a. Cellules à l'état normal.

b. Cellulose se désagrégeant par l'acide sulfurique, et prenant la coloration bleue sous l'influence de l'iode.

c''. Légères membranes azotées internes, restant après la dissolution complète de la cellulose passée à l'état de dextrine.

Fig. 2, *a*. Cellulose formant les parois très-épaisses des cellules du périsperme de *phytelephas*, coupé perpendiculairement à l'axe et à la surface.

b. Cavités cylindriques des cellules auxquelles aboutissent un grand nombre de petits conduits dirigés vers les cellules voisines.

a'. Cellulose imprégnée d'iode, se désagrégeant en *a''* sous l'influence de l'acide sulfurique, et prenant alors le caractère de la substance amylacée, la couleur bleue ou violette, par l'effet de l'iode.

b', *b''*. Parois des cavités altérées par les phénomènes ci-dessus décrits, laissant voir les matières azotées jaunies par l'iode.

Fig. 3. Coupe du même périsperme parallèle à la superficie : les mêmes lettres indiquent les parties semblables.

Fig. 4. Coupe parallèle à la précédente, mais plus rapprochée de la superficie : elle montre des lignes de démarcation entre les cellules et les sécrétions huileuses plus abondantes, laissant voir en *a'* et *a''* des gouttelettes oléiformes en se désagrégeant.

Fig. 5. Cellulose sous la forme de tubes longs, à parois épaisses, constituant les fibres textiles du chanvre.

Une coupe de ces tubes, perpendiculaire à leur axe, montre leur épaisseur.

a. Tubes à l'état normal, entourés de substance azotée.

a', *a''*. Partie attaquée au moyen de l'acide sulfurique, donnant une coloration bleue par l'iode.

Fig. 6, *a*, *a'*, *a''*. Parties semblables des fibres textiles du lin.

Fig. 7, *a*, *a'*, *a''*. Poils textiles extraits des graines de coton. Leur faible épaisseur explique la résistance moindre des fils et tissus de coton. L'iode et l'acide sulfurique donnent la coloration caractérisant la cellulose.

Fig. 8. Aubier du bois de chêne. Les fibres ligneuses y sont coupées perpendiculairement à leur axe. La cellulose, qui constitue les parois de ces fibres, est pénétrée de la substance ligneuse.

Fig. 9. Cœur du même bois, dans lequel l'épaisseur des fibres ligneuses est augmentée par des couches superposées plus abondantes en incrustations ligneuses. La cellulose y est donc en proportions moins fortes, quoiqu'elle y forme, comme toujours, la substance plastique souple qui maintient les tissus.

Fig. 10. Coupe d'un cotylédon de graine de lin montrant en *a*, *a* deux cellules qui renferment un tissu azoté rempli lui-même de sphérules d'huile grasse. En *a'*, *a'*, *a'*, on remarque la désagrégation du tissu azoté par l'acide sulfurique en présence de l'iode, laissant échapper l'huile qui se réunit en gouttes plus ou moins grosses et développant une coloration orangée, tandis que la désagrégation de la cellulose produit une coloration violette.

Fig. 11. Coupe d'une graine de ricin montrant en *a* des cellules vides, et d'autres en partie pleines de sécrétions oléifères; dans les cellules *a'* on voit ces sécrétions désagrégées laissant sortir et réunir l'huile en gouttelettes.

Fig. 12. Coupe d'une portion de fruit du blé, perpendiculaire à l'axe de ce fruit.

a, *a*. Cellulose constituant les épaisses parois des cellules du tégument.

a'. Les mêmes cellules disloquées par l'action de l'acide sulfurique et bleuies par l'iode.

b, *b'*. Pellicule périphérique de cellulose imprégnée de substance azotée, qui la rend plus résistante à l'acide, et lui fait prendre une coloration jaune orangée par l'iode.

d, *d'*, *d''*. Cellules sous-épidermiques du périsperme renfermant une matière grasse, dans un réseau organique azoté : on voit en *c'''* le réseau désagrégé par l'acide sulfurique, laissant apparaître la matière grasse en gouttelettes oléiformes.

e, *f*. Gluten étiré, jauni par l'iode et grains d'amidon bleuis par le même réactif ; ces deux principes immédiats se trouvent dans les cellules du périsperme, sous les enveloppes et tissus précédents.

MÉMOIRE

SUR

LES DÉVELOPPEMENTS DES VÉGÉTAUX;

PAR M. PAYEN.

QUATRIÈME MÉMOIRE.

TISSUS LIGNEUX.

ÉTAT NATUREL, CARACTÈRES PHYSIQUES, STRUCTURE, COMPOSITION IMMÉDIATE ET ÉLÉMENTAIRE DES INCRUSTATIONS LIGNEUSES : CELLULOSE, LIGNOSE, LIGNONE, LIGNIN ET LIGNIREOSE; COMPOSITION DES TOURBES.

Les tiges ligneuses diffèrent beaucoup, par leurs propriétés physiques et chimiques, des tissus principalement formés de cellulose.

Tous les bois présentent, en effet, dans leur composition, quelque variable qu'elle soit d'ailleurs, des proportions d'hydrogène plus fortes que celles qu'exigerait leur oxygène pour former de l'eau [1].

Ce dernier fait, que j'ai constaté par des analyses élémentaires et immédiates multipliées, aurait pu se déduire des nombres trouvés par MM. Thénard et Gay-Lussac, si l'on n'eût admis,

[1] Jusqu'à l'époque où ce mémoire fut soumis à l'Académie des sciences (17 décembre 1838), on admettait généralement, dans les ouvrages de chimie et de physiologie végétale, que le ligneux ou bois épuré était composé de carbone, plus d'hydrogène et d'oxygène, dans les proportions qui constituent l'eau.

En effet, dans la dernière édition de sa Physiologie végétale, M. Decandole présente ainsi

avec ces illustres chimistes, que l'excès d'hydrogène obtenu par eux dépendait d'une légère imperfection dans le procédé analytique dont ils ont enrichi la science.

On verra plus loin comment je suis parvenu, d'ailleurs, à rendre évidente cette première donnée générale, en soumettant aux analyses la matière ligneuse séparée de la cellulose; celle-ci ayant, comme on le sait aujourd'hui, une composition bien déterminée, o,444... de carbone, et toujours l'hydrogène et l'oxygène dans les rapports de la composition de l'eau. (Voyez ci-dessus mon troisième mémoire.)

Une conséquence importante me parut immédiatement ressortir de la démonstration d'un excès d'hydrogène dans les éléments des tissus ligneux : cela indiquait effectivement une fixation d'hydrogène dans les actes de la nutrition végétale, conclusion

la composition du bois *épuré* par l'alcool, l'eau, l'acide chlorhydrique et une dernière fois par l'eau : il le nomme *lignine*.

	CARBONE.	EAU ou ses éléments	
Chêne	52,53	47,47	
Hêtre	51,45	48,55	D'après MM. Thénard et Gay-Lussac.
Bois de fer	53,44	46,56	
Buis	50	50	Suivant Prout.
Saule	49,80	50,20	*Id.* *id.*

M. Decandole admet, en outre, comme les chimistes le supposaient alors eux-mêmes, que cette lignine était convertie en *gomme* et *sucre de raisin* par l'acide sulfurique, tandis que ces propriétés appartiennent à la cellulose, qui donne de la dextrine et de la glucose.

M. Decandole, au reste, émet des doutes sur quelques autres données admises, qui effectivement étaient fausses ou incertaines. Il demande si l'identité des fibres du chanvre avec celles du bois est bien réelle; si les distinctions entre la méduline, la subérine et la lignine sont parfaitement fondées; si les fibres de l'*agave* et celles du *phormium tenax* ont la composition du corps ligneux ou des écorces; si le coton diffère de la lignine; si la fungine ne serait pas une variété de la lignine, etc. On voit combien ces points de la science, fort clairs aujourd'hui, étaient alors obscurs.

qui devenait l'expression exacte d'une incontestable vérité, si l'on admettait, en outre, comme mes analyses l'ont prouvé, que les jeunes organes des végétaux, les parties herbacées et les feuilles donnent aussi un excès d'hydrogène. Telle est donc l'une des lois générales de la composition élémentaire de toutes les plantes prises dans leur ensemble, loi qui se rattache directement, elle-même, au fait général que je viens de signaler parmi les phénomènes de la nutrition des végétaux.

Il en résulte encore que la quantité de chaleur développée par la combustion des différents bois, dépend, non-seulement de la proportion de carbone, mais encore de la quantité d'hydrogène en excès qu'ils contiennent.

Je vais présenter d'abord quelques-uns des résultats analytiques sur lesquels se sont fondées les considérations qui précèdent, et les nouvelles recherches que je fus conduit à entreprendre. J'indiquerai ensuite les principales applications qui en découlent pour l'organographie et la physiologie végétales.

Analyse du bois de Sainte-Lucie.

A l'état normal séché dans le vide sec à 170°.

Bois employé	= 0,441	
Acide carbonique obtenu	= 0,852	
Eau	= 0,239	
Carbone	= 52,40	= 100
Hydrogène	= 5,90	
Oxygène	= 41,70	

Analyse du bois d'ébénier de Madagascar.

A l'état normal, séché dans le vide sec à 170°:

Bois employé	= 0,405	
Acide carbonique obtenu	= 0,787	
Eau	= 0,196	
C	= 52,60	= 100
H	= 5,25	
O	= 42,15	

Analyse du bois d'ébénier de Madagascar.

Traité par l'eau, contenant 3 pour 100 d'ammoniaque, exposé pendant 2 heures à la température de l'eau bouillante, puis par l'eau aiguisée de 5 pour 100 d'acide chlorhydrique, maintenu à la même température pendant 2 heures, lavé à l'eau distillée bouillante, et enfin séché dans le vide sec à 160°.

Bois employé				= 0,321	
Acide carbonique				= 0,612	
Eau				= 0,168	
C	= 52,64	= 100, ou cendres déduites, =	Carbone	52,85	= 100
H	= 5,87		Hydrogène	6	
O	= 41,79		Oxygène	41,15	

Analyse du bois de Sainte-Lucie.

Partie très-dure provenant du cœur[1], traité de la même manière, séché dans le vide sec à 170°, laisse $0^{m},4$ de cendres (à l'état normal il laisse $0^{m},81$ de cendres).

Bois employé				= 0,383	
Acide carbonique				= 0,732	
Eau				= 0,213	
C	= 52,74	= 100, ou cendres déduites, =	Carbone	52,90	= 100
H	= 6,05		Hydrogène	6,07	
O	= 41,21		Oxygène	41,03	

Analyse du noyau de la noix de coco.

A l'état normal, séché dans le vide à 150°.

Substance				= 0,496	
Acide carbonique				= 0,898	
Eau				= 0,262	
C	50,00 =	= 100, en tenant compte de la cendre, =	Carbone	50,5	= 100
H	5,74 =		Hydrogène	5,8	
O	44,26 =		Oxygène	43,7	

[1] Le bois de cœur de chêne, provenant d'un arbre ayant environ cent cinquante ans, a donné dans une analyse 52,5 de carbone pour 100.

Analyse des coques de noix du *juglans regia*.

A l'état normal, séchées dans le vide à 160°.

Substance employée	= 0,836	
Acide carbonique	= 1,556	
Eau	= 0,453	
C	= 51,43	= 100
H	= 5,90	
O	= 42,67	

L'incinération de cette substance a donné 1 pour 100 de cendre.

En déduisant la cendre de la substance employée pour l'analyse, le poids de celle-ci égale 828 milligrammes, et l'on aura :

Carbone	= 51,92	= 100
Hydrogène	= 5,96	
Oxygène	= 42,12	

Deuxième analyse des coques de noix.

A l'état normal, séchées dans le vide à 170°.

Substance employée	= 0,603	en tenant compte de la
Acide carbonique	= 1,116	cendre = 0,597.
Eau	= 0,317	
C	= 51,75	= 100
H	= 5,77	
O	= 42,48	

Troisième analyse des coques de noix du *Juglans regia*.

Lavées par l'eau contenant 0,01 d'ammoniaque, puis par l'acide chlorhydrique à 0,02, enfin à l'eau distillée et séchées dans le vide à 150°.

Substance employée	529 milligr.	=	Carbone	51,79 = 100
Acide carbonique obtenu	1,006		Hydrogène	6,20
Eau	0.301		Oxygène	42,01

Analyse du bois de chêne.

Épuré par l'eau froide, l'eau distillée à chaud, par l'eau aiguisée de 0,05 d'acide hydrochlorique, maintenue en contact à 80° pendant 2 heures, puis par l'eau distillée maintenue chaude à 80° pendant 2 heures, lavé, et enfin séché dans le vide à 180°.

Substance employée	= 0,364	
Acide carbonique	= 0,657	
Eau	= 0,201	
C	= 49,72	= 100
H	= 6,01	
O	= 44,27	

Troisième analyse : épuré comme ci-dessus.

Substance	= 0,340	
Acide carbonique	= 0,617	
Eau	= 0,198	
C	= 50,00	= 100
H	= 6,31	
O	= 43,69	

Analyse du bois de hêtre.

Macéré trois jours dans l'eau distillée tiède, traité par l'eau contenant 3 pour 100 d'ammoniaque, par l'eau aiguisée de 5 pour 100 d'acide chlorhydrique, et lavé à l'eau distillée bouillante, séché dans le vide à 160°.

Substance	= 0,537	
Acide carbonique obtenu	= 1,046	
Eau	= 0,330	
C	= 49,23	= 100
H	= 6,11	
O	= 44,66	

Analyse du bois de tremble.

Le bois de tremble lavé a donné, pour 0^{gr},350 :

Acide carbonique..... 0,607
Eau..... 0,307
} d'où l'on déduit { Carbone..... 47,7
Hydrogène... 6,4
Oxygène..... 45,9

TIGE D'*HERMINIERA* (BILOR DES NÈGRES DU SÉNÉGAL).

Analysée à l'état normal, 0,727 ont donné :

Acide carbonique..... 1,241
Eau..... 0,397
} d'où l'on tire 100 = { Carbone... 47,18
Hydrogène. 5,94
Oxygène... 46,88

Analyse du bois de sapin.

Lavé par une solution de potasse, l'eau et l'acide chlorhydrique étendu, séché à 100° dans le vide.

417^{millig} ont donné 734^{millig}. d'acide carbonique et 237^{millig}. d'eau, ce qui correspond à la composition élémentaire suivante :

Carbone..... 51,79
Hydrogène..... 6,28
Oxygène..... 41,93
} = 100

Analyse du bois de peuplier.

Matière 277, acide carbonique 471, eau 145; d'où l'on déduit la composition :

Carbone..... 47,
Hydrogène..... 5,80
Oxygène..... 47,20
} = 100

Analyse du bois de cormier.

Séché à 160°, laissant 1,4 de cendre pour 100.

Substance employée 464^{millig}, acide carbonique 810, eau 254; d'où l'on tire pour sa composition, cendres déduites :

Carbone..... 48,69
Hydrogène..... 6,03
Oxygène..... 45,18
} = 100

On appréciera sans peine les principales différences qui existent dans la composition des substances ligneuses de diverses origines, en jetant un coup d'œil sur le tableau synoptique suivant : il résume les données déduites des analyses ci-dessus décrites.

TABLEAU DE LA COMPOSITION DE DIFFÉRENTS BOIS LAVÉS.

SUBSTANCES LIGNEUSES.	CARBONE.	HYDROGÈNE.	OXYGÈNE.	FOURNISSENT en charbon comme combustible
Bois de Sainte-Lucie	52,90	6,07	41,03	55,35
Ébène de Madagascar	52,85	6	41,15	53,75
Ligneux de noix ordinaire	51,92	5,96	42,12	53,92
—— de noix de coco	50,50	5,80	43,70	52
Sapin	51,79	6,28	41,93	54,7
Chêne suivant MM. Thénard et Gay-Lussac	51,15	5,87	42,98	52,9
Chêne	50	6,20	43,80	52,3
Hêtre	49,35	6,1	44,65	51,4
Cormier	48,69	6,03	45,18	50
Tremble	47,70	6,40	45,90	49,7
Herniaria	47,18	5,94	46,88	47,4
Peuplier suisse	47	5,80	47,20	47,2
Cellulose	44,44	6,18	49,38	44,44

On voit qu'entre les tissus végétaux plus ou moins incrustés par la substance ligneuse, des différences notables de composition élémentaire se décèlent ; qu'à poids égal un bois très-dur ou *résineux* pourra contenir une quantité de carbone plus grande d'un dixième que la quantité contenue dans un bois très-tendre. Cette différence serait plus considérable encore si l'on comparait le

même bois dur avec le tissu végétal pur (cellulose) : elle s'élèverait dans ce cas, à deux dixièmes.

Ce tableau montre encore que tous les tissus contenant des incrustations ligneuses offrent dans leur composition élémentaire un excès d'hydrogène. L'influence de cet excès d'hydrogène sur l'effet calorifique des bois s'évalue sans difficulté, si l'on se rappelle qu'à poids égal l'hydrogène exige trois fois plus d'oxygène en se brûlant, pour former de l'eau, que le carbone pour produire de l'acide carbonique, et que, par cette combustion, l'hydrogène développe au moins trois fois plus de chaleur.

Si donc on calcule l'excès d'hydrogène de chacun des combustibles en déduisant de la quantité totale celle qui est nécessaire pour former de l'eau avec l'oxygène, de chacune de ces compositions, on pourra multiplier par trois cet excès, afin d'avoir son équivalent en charbon ; puis, ajoutant ce nombre au chiffre qui exprime le carbone trouvé par l'analyse, on aura l'équivalent total en charbon représenté par la composition élémentaire sous le point de vue de la valeur calorifique de chacun de ces combustibles.

Telle est la marche que j'ai suivie pour trouver les nombres de la dernière colonne du tableau : ils montrent que, sous ce rapport, les produits ligneux diffèrent plus encore entre eux.

A la vérité, suivant qu'on prendrait les tiges ligneuses de plantes plus ou moins âgées, on pourrait faire varier ces rapports; mais rien d'essentiel ne serait changé aux conclusions générales, et personne, après un examen attentif, ne voudrait aujourd'hui soutenir, comme on le croyait naguère, que la composition du bois fût équivalente à du carbone plus de l'eau, ni que les tissus ligneux des divers végétaux, lavés et desséchés, représentassent, à poids égal, la même quantité de combustible, eussent, en un mot, la même valeur calorifique.

Pour moi, le fait n'était plus douteux, mais je voulus en approfondir les causes, et, afin d'y parvenir, étudier les produits de la végétation les plus divers en apparence, pourvu qu'ils présen-

tassent, par leurs caractères physiques et leur composition élémentaire, une analogie évidente avec les produits ligneux que j'avais précédemment examinés.

Ceux-ci peuvent être séparés en deux classes : la première, comprenant les tissus lentement incrustés, tels qu'on les voit dans les tiges dont les fibres ligneuses passent, d'année en année et par couches concentriques, de l'état d'aubier à l'état de bois de cœur et continuent durant des siècles à s'incruster et durcir; la seconde classe, renfermant tous les tissus ligneux rapidement développés, comme, par exemple, dans les noyaux de différents fruits.

Je cherchai d'abord à reconnaître si quelques dispositions particulières de structure pouvaient me faire retrouver les sécrétions ligneuses dans les diverses parties des végétaux. Voici les résultats de ces investigations.

STRUCTURE DES INCRUSTATIONS LIGNEUSES.

Depuis fort longtemps les organographes nous ont appris comment les fibres ligneuses des bois durs s'épaississent graduellement, par couches concentriques, dans chacune d'elles, et au point de rétrécir presque jusqu'à obstruction complète la cavité qui entoure leur axe.

Mais la nature même de ces couches superposées n'était pas connue.

Les cellules des tissus qui doivent devenir ligneux sont principalement formées de cellulose avant toute incrustation. C'était une première donnée acquise par suite de mon précédent travail.

Ainsi dans l'aubier du chêne, par exemple, tel que le montre la figure 8, planche I, les fibres, coupées par un plan perpendiculaire à leur axe, montrent des parois moins épaissies, des canaux à plus large section, et sont plus abondantes en cellulose que dans le cœur du même bois. Ici, comme elles sont indiquées par la figure 9, les incrustations, superposées concentriquement, ont presque rempli toutes les cavités; ces incrustations sont per-

forées de quelques canalicules généralement perpendiculaires à la superficie des fibres ou clostres, et dirigés vers l'axe.

Les cellules de formes variées, allongées, ligneuses, si rapidement incrustées dans les coques dures des noix et des cocos, présentent, sous le microscope, des couches concentriques semblables à celles des fibres du bois; des canalicules beaucoup plus nombreux s'y remarquent, traversant toutes les couches des incrustations dans des directions aussi perpendiculaires à la surface de la cellule et débouchant dans la cavité restée libre.

La même structure et des dispositions semblables, quant aux canalicules, se remarquent dans toutes les cellules incrustées de matière organique ligneuse parmi les divers tissus où je suis parvenu à les observer et que je vais décrire.

ÉTAT NATUREL DES CONCRÉTIONS LIGNEUSES.

Les concrétions organiques qui, par leurs fortes proportions, donnent aux bois durs leurs caractères spéciaux et particulièrement une dureté remarquable, une grande densité, au point de les rendre même fragiles, susceptibles de poli, difficiles à couper par les tranchants fins, capables d'ébrécher l'acier; ces concrétions qui, dans les bois, constituent le *duramen*, ainsi dénommé par M. Dutrochet, se retrouvent dans certaines parties d'une foule de plantes; elles remplissent souvent des cellules isolées ou groupées en nombre variable au milieu des tissus cellulaires.

Ainsi donc, non-seulement ces concrétions distinguent les fibres ligneuses, mais elles caractérisent encore une classe nombreuse de sécrétions plus ou moins rapidement développées dans les fruits et dans les écorces.

DISPOSITIONS ET EXTRACTION DES CONCRÉTIONS LIGNEUSES CONTENUES DANS LES FRUITS ET LES ÉCORCES.

L'assemblage en un tissu nettement terminé des cellules in-

crustées par la matière organique ligneuse constitue les enveloppes ligneuses, dures, cassantes des noix de diverses espèces, des noisettes et des amandes; les noyaux d'un grand nombre de fruits : prunes, abricots, cerises, pêches; les nucules des nèfles, etc.

On retrouve dans les fruits du dattier, non dans le périsperme, que l'on nomme vulgairement noyau de dattes (voyez sa composition p. 15), mais dans la pulpe charnue, sous le tissu herbacé qui touche à l'épiderme, des cellules presque entièrement remplies par l'incrustation ligneuse. Elles sont allongées, leur grand axe est perpendiculaire à la surface du fruit; en contact les unes avec les autres, elles forment ainsi une rangée continue, une sorte d'enveloppe mince et sans consistance de la pulpe sucrée.

On trouve dans les poires un grand nombre de cellules ainsi concrétionnées sous le tissu que recouvre l'épiderme. Ces cellules, irrégulièrement arrondies ou polyédriques, sont agglomérées par groupes rapprochés qui forment une couche *pierreuse* sous la peau. On les retrouve nombreuses autour de l'axe du fruit, et plus abondantes encore et serrées, composant une sorte de noyau irrégulier autour des loges qui recèlent les pépins; enfin, des groupes de cellules incrustées sont, en outre, disséminés dans toute l'épaisseur de la pulpe du fruit, et là on remarque des cellules minces et longues de la drupe convergeant vers ces groupes ligneux auxquels elles adhèrent fortement.

Le volume plus ou moins considérable des agglomérations ligneuses dans la chair des poires les rend plus ou moins *pierreuses :* de là le nom de *sclérogène,* employé par M. Turpin pour désigner la matière dure des concrétions ligneuses et de toutes celles qu'on trouve dans les végétaux; dénomination peu convenable d'ailleurs, car elle s'appliquerait à des substances très-diverses, comprenant, non-seulement plusieurs matières organiques mais encore des composés minéraux, tels que les carbonates de chaux et de magnésie, l'oxalate de chaux, la silice, etc. Les concrétions ligneuses manquent dans les pommes; on les trouve en grand nombre dans les coings.

CONCRÉTIONS LIGNEUSES DANS LES ÉCORCES.

Des cellules incrustées, affectant des formes très-diverses, fortement adhérentes entre elles, constituent les concrétions dures, pierreuses du liége, nombreuses surtout à la partie interne de ce tissu péridermique.

Des concrétions semblables et dans une situation analogue se rencontrent dans l'écorce du mûrier et parfois dans toute son épaisseur.

On les retrouve bien plus abondantes, pressées les unes contre les autres, sans grande adhérence entre elles, constituant une épaisse couche sous les tissus épidermiques de l'écorce de l'*aylanthus glandulosa*.

J'ai observé un assez grand nombre de ces concrétions formées de cellules polyédriques ou irrégulièrement arrondies, quelquefois sinueuses et bifurquées à la partie interne de l'écorce, sur les gros troncs d'érable (*acer negundo*), ainsi que dans les bourrelets de l'écorce, qui se trouvent à l'insertion des branches de cet arbre et vers le sommet de l'angle obtus extérieur. Les écorces épaisses de différents chênes présentent des cellules incrustées, longues, arrondies ou polyédriques, parfois bifurquées, réunies en concrétions de dimensions variables qui sont disséminées dans toute l'épaisseur du tissu cortical sous l'épiderme, pénètrent jusqu'au milieu des fibres du liber. Se moulant en lames irrégulières dans les espaces libres, elles viennent en contact avec l'aubier. On les distingue, sur les tranches perpendiculaires aux fibres du bois par les taches d'un blanc grisâtre qu'elles forment et que leur dureté caractérise.

On peut extraire mécaniquement les concrétions de l'écorce du chêne commun en raclant la surface interne de cette écorce avec une lame de couteau peu coupante.

L'extraction des concrétions dures des poires offre plus de difficultés en raison de la forte adhérence du tissu cellulaire envi-

ronnant. Voici comment je les ai obtenues en opérant sur des poires de Saint-Germain :

J'enlevai avec un couteau l'épiderme avec une couche mince des tissus sous-jacents.

D'un autre côté, j'excisai et mis à part toute la masse charnue comprise entre les parties enlevées et l'espèce de noyau ou d'enveloppe pierreuse qui entoure l'axe et les loges; ces dernières, ainsi que les pépins, étant éliminées, laissent à nu le tissu qui les environnait, abondant en incrustations plus blanches que celles qui sont contenues dans les pelures.

Chacune des deux parties séparément fut soumise à la coction dans un excès d'eau bouillante pendant quatre heures environ, puis, raclant la face interne des pelures, on en a extrait le tissu pierreux. La matière pulpeuse ainsi obtenue fut triturée légèrement dans un mortier, pendant environ une demi-heure, afin de détacher, par le frottement, le plus grand nombre possible des cellules adhérentes aux concrétions; on sépara ensuite, par lévigations et tamisages, les membranes cellulaires libres, qui restaient en suspension dans le liquide, tandis que les incrustations étaient déjà précipitées; toutefois, pour éliminer plus complétement les membranes, il fallut réduire en poudre la substance pierreuse. Elle se présentait alors, sous le microscope, soit en fragments diaphanes anguleux, soit en *pierres* isolées, et contenait encore quelques agglomérations non désagrégées. Ces parties se déposant dans l'eau pure, avant les débris des membranes minces, on parvint à les séparer par plusieurs lévigations, puis on acheva leur épuration, à l'aide de lavages successifs, dans des solutions d'acide chlorhydrique et d'ammoniaque à 0,05, ayant le soin d'opérer toujours des lavages intermédiaires avec de l'eau pure, et de terminer de même toute l'épuration.

On a desséché alors la substance, dans le vide sec, à la température + 160°.

Les concrétions analysées, en cet état, donnèrent les résultats suivants :

COMPOSITION ÉLÉMENTAIRE DES CONCRÉTIONS PRISES SOUS LA PEAU DES POIRES.

CONCRÉTIONS des poires.	SUBSTANCE employée, cendres déduites.	PRODUITS.		COMPOSITION.		
		ACIDE carbonique.	EAU.	CARBONE.	HYDROGÈNE.	OXYGÈNE.
	milligr.					
1re.....	415	797	233	52,04	6,21	41,75
2e.....	353	679	211	52,97	6,22	40,81
3e.....	287	548	147	52,61	5,67	41,72
4e.....	288	547	171	52,43	6,56	41,01
5e.....	238	446	137	51,80	6,38	41,82
6e.....	230	434	145	52,17	6,95	40,88
TOTAUX.....				313,92	37,99	247,99
				dont $\frac{1}{6}$ = 52,32	6,33	41,33

La composition moyenne, déduite pour ces six analyses, est:

$$\text{Pour } 100 = \left\{\begin{array}{ll} \text{Carbone} & 52{,}32 \\ \text{Hydrogène} & 6{,}33 \\ \text{Oxygène} & 41{,}35 \end{array}\right\} = 100$$

Et l'excès d'hydrogène dans 100 de la matière organique = 1,20. 100 de la substance ont donné 0,2 de cendres.

COMPOSITION ÉLÉMENTAIRE DES CONCRÉTIONS EXTRAITES DE L'ÉCORCE DE L'*AYLANTHUS GLANDULOSA*.

Lavées successivement par l'eau, l'alcool; traitées par le carbonate de soude pour décomposer l'oxalate de chaux, puis lavées avec les solutions étendues d'ammoniaque, d'acide chlorhydrique et l'eau [1]:

[1] Les concrétions traitées à la température de l'ébullition par le carbonate de potasse ont donné une solution qui, saturée par l'acide chlorhydrique, puis mêlée à l'eau de chaux, laissa

CONCRÉTIONS de l'*Aylanthus glandulosa*.	POIDS de la substance employée, cendres déduites.	PRODUITS OBTENUS.		COMPOSITION.		
		ACIDE carbonique.	EAU.	CARBONE.	HYDROGÈNE.	OXYGÈNE.
	milligr.					
1re analyse..	282	545	159	53,43	6,24	40,33
2e *id.*.....	303	573	163	52,27	6,13	41,60
3e *id.*.....	414	798	240	53,28	6,42	41,30
TOTAUX.....				158,98	18,79	123,33

COMPOSITION MOYENNE.

D'après ces trois analyses :

$$100 = \begin{cases} \text{Carbone}..... & 52,99 \\ \text{Hydrogène}..... & 6,26 \\ \text{Oxygène}..... & 41,75 \end{cases}$$

Et l'excès d'hydrogène dans 100 de matière organique = 1,06.

On voit, par les analyses précédentes, que les concrétions des fruits et des écorces paraissent se rapprocher beaucoup de la composition des bois très-durs. Toutes ces substances avaient un principe commun, la cellulose ; mais il fallait de nouvelles recherches pour savoir si la matière incrustante était identique ou variable dans sa composition.

Les concrétions extraites, par les moyens que nous avons indiqués, se présentent, soit dans des cellules entières, soit divisées en fragments anguleux. Plusieurs propriétés chimiques les distinguent de la cellulose pure : l'acide azotique les attaque, en dégageant des vapeurs rutilantes ; les acides sulfurique et chlorhydrique les colorent fortement en brun ; mises en contact avec un mélange de 5 d'acide sulfurique et 1 d'eau, elles se gonflent,

précipiter de l'oxalate de chaux. La substance épurée ainsi ne laisse plus, après l'incinération, que 0,002 au lieu de 0,113 à l'état normal.

brunissent, se désagrégent et se dissolvent; au bout de vingt-quatre heures, cette dissolution, étendue d'eau, laissa précipiter en flocons la substance incrustante, et dissoudre la cellulose interposée, qui avait subi une transformation en dextrine. Broyées avec un mélange d'acide sulfurique et d'eau, à proportions égales, elles se désagrégent en débris de pellicules, ou granules irréguliers.

EXTRACTION DE LA MATIÈRE ORGANIQUE QUI CARACTÉRISE LES INCRUSTATIONS LIGNEUSES.

Les concrétions normales ont été soumises, avec quatre ou cinq fois leur poids d'une forte solution de soude, à la température de 150 à 200 degrés centésimaux. Ce mélange, refroidi, étendu d'eau, examiné sous le microscope, montra des fragments attaqués : leurs angles étaient arrondis; quelques-uns se sont dissous; les cellules qui avaient le plus résisté avec leurs incrustations étaient cependant attaquées sensiblement; leurs couches superficielles se trouvaient dissoutes ou exfoliées; les canalicules, obstrués par le gonflement des incrustations; la cavité centrale, par le même effet, avait diminué ou était remplie complétement.

La température du mélange des concrétions et d'alcali ayant été élevée, après évaporation, jusqu'à 250°, la plus grande partie de la matière organique se put ensuite facilement dissoudre, en y ajoutant de l'eau et portant à l'ébullition. La solution, filtrée, puis saturée par un excès d'acide chlorhydrique, laissa précipiter la plus grande partie de la substance organique, qui avait été dissoute. Je me proposai d'obtenir le même résultat et, de plus, d'éviter toute altération provenant d'une trop haute température, et qu'annonçait parfois un dégagement d'hydrogène, pendant le traitement par la potasse ou la soude. Pour atteindre ce but, il fallut diviser mécaniquement, et le plus possible, les parties incrustées, c'est-à-dire les concrétions des fruits et des écorces, en les broyant à sec d'abord, puis ensuite à la molette, sur une table de granit ou de porphyre, au moyen de l'eau. Quant aux bois,

plus ou moins incrustés, ils furent divisés à sec, à l'aide d'une lime ; puis on termina, de même, par un broyage à l'eau, suffisamment prolongé.

Dans cet état de grande division, les matières ligneuses, épurées par les dissolvants ordinaires (eau, alcool, acide et alcali faibles)[1], furent ensuite attaquées suffisamment par la solution de soude ou de potasse chauffée au bain d'huile, sans élever la température au point de courir le risque de déterminer un dégagement gazeux.

Ce mode d'opérer offre encore l'avantage d'isoler des matières ligneuses la cellulose moins attaquée. Il convient, pour obtenir celle-ci bien pure, de renouveler deux ou trois fois encore le même traitement par l'alcali caustique, après avoir enlevé, par des lavages, les parties dissoutes.

La matière incrustante, dissoute par la soude ou la potasse, avec les précautions que nous venons d'indiquer, et sans avoir donné lieu à un dégagement sensible d'hydrogène, fut précipitée, en saturant la solution alcaline par l'acide chlorhydrique, jusqu'à léger excès.

Le précipité, recueilli sur un filtre, puis lavé, égoutté et desséché, représentait la matière organique séparée de la cellulose pour chacune des concrétions ligneuses.

Les substances incrustantes ainsi obtenues du chêne, du hêtre, du sapin et du noyau des fruits de l'amandier, étaient dures et fragiles ; réduites en poudre, elles avaient une couleur fauve et présentaient des caractères semblables en apparence, quoiqu'elles eussent des origines différentes. On pouvait supposer qu'effectivement leur nature était la même dans toutes ces matières ligneuses, comme la composition de la cellulose s'était montrée identique dans tous les tissus végétaux ; mais les analyses comparées des substances incrustantes du chêne, du hêtre et du sapin

[1] Lorsqu'il se rencontra des proportions notables d'oxalate de chaux, comme parmi les concrétions d'*Aylanthus glandulosa*, on dut traiter d'abord par le carbonate de soude.

ont montré que ces substances n'ont pas une composition élémentaire identique.

COMPOSITION ÉLÉMENTAIRE DES SUBSTANCES INCRUSTANTES.

	SUBSTANCE employée.	PRODUITS OBTENUS.		COMPOSITION.		
		ACIDE carbonique.	EAU.	CARBONE.	HYDROGÈNE.	OXYGÈNE.
	milligr.					
Hêtre.....	713	1,374	402	53,67	6,23	40,10
Idem.....	589	1,150	321	53,80	6,01	40,19
Sapin.....	567	1,218	282	59,36	5,51	35,13
Chêne.....	434	903	242	57,37	6,17	36,46

Plusieurs autres analyses de la substance incrustante, provenant de différentes matières ligneuses, donnèrent encore des résultats peu concordants entre eux; extraite des concrétions corticales de l'*Aylanthus glandulosa*, elle était moins colorée; il paraissait donc bien probable que les incrustations organiques différaient dans certains tissus ligneux, soit qu'elles constituassent autant de principes immédiats distincts, soit qu'elles continssent des principes communs, mais en proportions différentes. Cette dernière hypothèse se trouva justifiée par les résultats suivants.

COMPOSITION IMMÉDIATE DES INCRUSTATIONS LIGNEUSES.

Après diverses tentatives, je m'arrêtai aux procédés suivants pour séparer les principes immédiats qui entrent dans la composition des incrustations ligneuses.

La dissolution de la matière incrustante étant opérée par la soude ou la potasse caustiques, en observant les précautions recommandées plus haut, on la précipitait, à l'aide d'un excès

d'acide chlorhydrique ; des lavages par l'eau pure éliminaient ensuite le chlorure formé.

La matière organique, desséchée alors et pulvérisée en poudre impalpable, étant mise en contact avec l'alcool et lavée jusqu'à épuisement par ce véhicule, on obtint deux produits : l'un, insoluble dans l'alcool, se montrait, sous le microscope, en fragments irréguliers ; il fut desséché, sans autre préparation ; l'autre, soluble dans l'alcool, plus à chaud qu'à froid, se déposait, par le refroidissement, sous forme d'un précipité, offrant sous le microscope l'apparence de sphérules agglomérées en nombre plus ou moins considérable. Toute la solution alcoolique, évaporée à sec, laissait un résidu semblable. La totalité du produit soluble fut desséchée pour l'analyse. Voici la composition de ces deux produits, extraits de la substance incrustante du hêtre, de l'*Aylanthus glandulosa* (concrétions corticales), et de l'enveloppe ligneuse des fruits de l'amandier (*Amygdalus sativa*).

Analyses élémentaires des incrustations ligneuses.

	SUBSTANCE EMPLOYÉE.	POIDS en milli-grammes.	PRODUITS OBTENUS.		COMPOSITION ÉLÉMENTAIRE en centièmes.		
			ACIDE carbonique.	EAU.	CARBONE.	HYDROGÈNE.	OXYGÈNE.
Partie insoluble dans l'alcool.	Des incrustations du hêtre.	442	750	252	46,83	3,31	46,86
	Idem	897	1,541	489	47,49	6,04	46,47
	Idem	448	772	245	47,63	6,12	46,25
	Des incrustations des enveloppes d'amandes	645	1,122	349	48,01	5,95	46,04
	Composition moyenne [1]	.....	.....	.....	47,71	6,04	46,25
Partie soluble dans l'alcool.	Des incrustations du hêtre.	465	1,057	275	62,79	6,55	30,66
	Idem de l'*Aylanthus glandulosa*	475	1,129	257	65,68	6	28,32
	Idem des enveloppes d'amandes	331	741	175	61,63	5,86	32,51

[1] Pour prendre cette moyenne, j'ai dû extraire les premiers résultats obtenus en employant la substance séchée à l'air, et qui retenait des traces d'eau, tandis que les autres, desséchées à 120° dans le vide, étaient anhydres.

On voit que la partie insoluble dans l'alcool des incrustations ligneuses diffère beaucoup, dans sa composition élémentaire, de la partie soluble, relativement à la proportion de carbone que chacune d'elles contient; du reste, l'analyse des deux parties réunies dans le précipité brut de ces incrustations s'accorde avec la somme des nombres obtenus par les analyses immédiates et élémentaires des deux parties séparées. En effet, pour le hêtre, la partie insoluble dans l'alcool constitue les 0,6, et la partie soluble les 0,4 de l'incrustation totale; or, en attribuant à chacune d'elles, et dans ces rapports, la composition ci-dessus, on retrouve la composition normale de la matière incrustante. En effet, on obtient ainsi les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} 6 \times 47{,}7 = 286{,}2 \\ 4 \times 62{,}8 = 251{,}2 \end{array}\right\} = 537{,}4 \text{ et } \frac{537{,}4}{10} = 53{,}74$$

L'analyse immédiate de l'incrustation précipitée brute du chêne expliquait également la composition élémentaire de cette incrustation (voyez page 61); en effet, elle donna sensiblement 0,4 de substance insoluble dans l'alcool, et 0,6 de substance soluble; ce qui permettait d'établir les équations ci-dessous :

$$\left.\begin{array}{l} 4 \times 47{,}7 = 190{,}8 \\ 6 \times 62{,}8 = 376{,}8 \end{array}\right\} = 567{,}6 \text{ et } \frac{567{,}6}{10} = 56{,}76$$

Quelque satisfaisante que fût la concordance de ces nombres, on ne pouvait s'en contenter, même comme d'une approximation, surtout pour d'autres substances ligneuses, car on devait remarquer, dans les trois analyses de la partie soluble, 1° du hêtre, 2° de l'*Aylanthus glandulosa*, et 3° des coques d'amandes, des différences telles, qu'il fallait admettre une matière différente pour chacune de ces parties, ou bien la réunion, dans des rapports différents, de deux substances semblables dans chacune d'elles.

Je fus ainsi conduit à essayer la séparation de deux produits immédiats, et j'y parvins en employant l'éther. Ce liquide a dissous, en effet, une portion de la substance obtenue par l'alcool,

et laissé une autre portion insoluble. La partie dissoute par l'éther s'obtint, à l'état solide, en laissant évaporer le liquide spontanément ; toutefois la quantité recueillie de cette manière était trop faible pour expliquer les différences observées, en ayant égard à sa composition [1].

Désirant obtenir une séparation plus complète, j'essayai de dissoudre toute la substance extraite par l'alcool, dans un mélange d'un volume d'alcool et deux volumes d'éther, puis de séparer par l'eau la solution éthérée ; un battage énergique favorisa cette séparation et l'agglomération des particules solides précipitées de la solution alcoolique.

Alors le repos procura une sorte d'analyse spontanée. La plus grande partie de la substance soluble dans l'éther vint surnager avec celui-ci ; on l'élimina par décantation, puis en distillant, desséchant le résidu et l'épurant. Broyé par des lavages à l'eau, dissolution dans l'éther etc. on obtint la substance pure.

Quant à la matière précipitée, insoluble à l'état solide, et adhérente aux parois, après l'avoir recueillie et lavée à l'eau, on l'a dissoute dans l'alcool, qui, filtré, puis évaporé, donna la deuxième substance soluble dans l'alcool. (Il laissa une quantité notable de la matière insoluble, qui, sans doute, après avoir été entraînée une première fois, avait repris assez de cohésion pour résister alors.)

Enfin le liquide au milieu duquel la séparation s'était effectuée fut évaporé ; l'ébullition, en chassant l'alcool avec des traces d'éther, et faisant dominer l'eau, précipita une certaine quantité des deux substances solubles dans ces deux véhicules. On les put enlever en écumes; une portion restait adhérente aux parois. L'eau mère, filtrée, conserva une couleur ambrée, qu'elle doit à la présence de la matière soluble dans l'éther, un peu soluble dans l'eau, plus à chaud qu'à froid, se séparant, durant l'évaporation, en pellicules très-minces, qui recouvrent la superficie entière de la solution.

[1] Dans laquelle entrait 0,643 de carbone, comme le montre la première analyse, p. 65.

Toute cette matière, précipitée par le refroidissement, ou séparée en pellicules à chaud, est très-soluble dans l'alcool, d'où l'eau la précipite. Les dépôts qu'elle forme, dans ces trois circonstances, sont jaunâtre-fauve; vus sous le microscope, ils se présentent composés de très-petits sphéroïdes diaphanes; leur solution aqueuse, filtrée, est précipitée par les acides sulfurique, chlorhydrique et oxalique, tandis que les acides acétique et azotique augmentent l'action dissolvante de l'eau sur cette substance.

Plusieurs essais de séparation, à l'aide de ces moyens, appliqués à la substance soluble, dans l'alcool des incrustations du hêtre, donnèrent environ 0,10 de matière soluble dans l'éther, et 0,90 de substance insoluble.

Les analyses élémentaires suivantes ont établi des différences notables entre ces deux parties :

Analyses élémentaires des deux matières extraites de la partie soluble dans l'alcool des incrustations ligneuses.

	SUBSTANCES EMPLOYÉES.	POIDS en milligrammes.	PRODUITS OBTENUS.		COMPOSITION ÉLÉMENTAIRE en centièmes.		
			ACIDE carbonique.	EAU.	CARBONE.	HYDROGÈNE.	OXYGÈNE.
Partie insoluble dans l'éther	Des incrustations du chêne.	275	640	178	64,32	7,16	28,52
	Des incrustations du hêtre.	385	934	231	67,01	6,64	26,35
	Idem	423,5	1,045	268	68,20	7,01	25,79
	Des incrustations de l'*Aylanthus glandulosa*....	375	931	238	68,52	7,04	24,44
Partie soluble dans l'éther	Des incrustations du chêne.	259	594	139	63,32	5,94	30,74
	Idem du hêtre.....	292	661	155	62,32	5,85	31,83
	Idem de l'*Aylanthus glandulosa*.....	460	1,036	250	62,20	6,01	31,79
	Moyenne.....	.....	.....	.....	62,25	5,93	31,82

Il résulte du tableau ci-dessus qu'en prenant la moyenne des

analyses, sans y comprendre les nombres relatifs aux produits du chêne, entre lesquels, ainsi que nous l'avons vu, la séparation avait été incomplète, on aurait les compositions suivantes :

	PARTIE soluble dans l'éther.	PARTIE insoluble.
Carbone	67,91	62,25
Hydrogène	6,89	5,93
Oxygène	25,20	31,82
	100,00	100,00

Et, en admettant la relation trouvée dans la composition immédiate 0,1 de la première pour 0,9 de la seconde, on a les équations

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Carbone} & \dfrac{10\times 67{,}81}{100}+\dfrac{90\times 62{,}25}{100}=62{,}81 \\ \text{Hydrogène} & \dfrac{10\times 6{,}89}{100}+\dfrac{90\times 5{,}93}{90}=6{,}11 \\ \text{Oxygène} & 31{,}08 \end{array}\right\}=100$$

Composition qui se rapproche en effet de l'analyse de la substance entière (partie soluble dans l'alcool, page 62).

Ainsi donc, évidemment la portion soluble dans l'alcool des incrustations organiques du bois se peut subdiviser en deux substances, ayant chacune une composition propre, et dont les rapports différents pouvaient expliquer les différences observées dans la composition élémentaire de cette partie, soluble dans l'alcool, extraite de plusieurs incrustations.

Quant à la partie insoluble dans l'alcool des mêmes incrustations, elle avait donné des résultats analytiques plus rapprochés entre eux, quoique extraits de produits végétaux différents; je

l'avais d'abord, et par cette raison, considérée comme un principe immédiat unique; depuis, en l'étudiant de nouveau, j'ai reconnu qu'on pouvait aussi la séparer en deux par l'ammoniaque, qui dissout une portion et laisse l'autre insoluble; je me suis assuré, d'ailleurs, que les rapports entre ces deux parties variaient suivant les origines, et que, dans ce produit (insoluble dans l'alcool) extrait de l'incrustation du hêtre, ces rapports pouvaient être exprimés ainsi : quantité insoluble dans l'ammoniaque = 0,7, quantité soluble = 0,3.

Il devenait nécessaire de soumettre séparément à l'analyse élémentaire les deux parties ainsi isolées, afin de comparer leur composition avec celle de la substance d'où on les avait extraites, et qui déjà était analysée à l'état brut.

Voici les nombres relatifs à ces analyses comparées :

Analyses élémentaires des deux substances séparées par l'ammoniaque de la portion insoluble dans l'alcool des incrustations ligneuses.

SUBSTANCES ANALYSÉES.		POIDS en milligrammes.	PRODUITS obtenus.		COMPOSITION élémentaire en centièmes.		
			ACIDE carbonique.	EAU.	CARBONE.	HYDROGÈNE.	OXYGÈNE.
Soluble ammoniaque.	Incrustations du hêtre.	343	622	181	50,11	5,82	44,07
Insoluble dans l'ammoniaque.	*Idem*.....	367	610	205	45,90	6,19	48,31
	Idem.....	470	794	257	46,06	6,07	47,87
	Incrustations du chêne.	346	575	187	45,87	6,01	48,12

Si l'on applique aux résultats de l'analyse immédiate (page 62) de la portion insoluble dans l'alcool, provenant du hêtre, traitée par l'ammoniaque, la composition ci-dessus de chacune des parties isolées, on aura les équations suivantes :

Carbone	$\left\{\begin{array}{l} 7\times 46{,}1 = 322{,}7 \\ 3\times 50{,}1 = 150{,}3 \end{array}\right\}$	$= 473$ et $\frac{473}{10}$	$= 47{,}3$
Hydrogène	$\left\{\begin{array}{l} 7\times 6{,}09 = 42{,}63 \\ 3\times 5{,}82 = 17{,}46 \end{array}\right\}$	$= 60{,}09$ et $\frac{60{,}09}{10}$	$= 6{,}009$
Oxygène			$46{,}691$
			100

Composition élémentaire très-rapprochée, en effet, des résultats analytiques consignés page 62, et relatifs à la substance insoluble dans l'alcool des incrustations ligneuses du hêtre.

D'après ces dernières observations, quatre principes immédiats entrent dans la composition de la matière organique incrustante qui, interposée, en proportions variables, dans l'épaisseur de la trame de cellulose, donne la consistance ligneuse aux fibres du bois et aux concrétions dures et cassantes des fruits, écorces, etc. L'un de ces principes immédiats, insoluble dans l'alcool, l'éther et l'ammoniaque, paraît manquer aux bois des conifères.

Je vais essayer de déduire des faits exposés dans ce mémoire une formule de la composition immédiate du bois de hêtre, préalablement épuré de toutes les matières directement solubles à froid par les dissolvants étendus.

Mais, pour éviter d'embarrassantes périphrases, j'adopterai d'abord des noms spéciaux pour les différentes substances organiques composant, en général, les incrustations ligneuses.

1° *Cellulose :* principe immédiat, qui relie toute structure végétale, et constitue la trame de toutes les cellules des plantes. Il a été complétement défini dans le mémoire précédent (vol. VIII, *Savants étrangers*). Sa composition est représentée par 0,444 de carbone, et 0,555 d'hydrogène et d'oxygène, dans les rapports qui constituent l'eau ;

Lignose : substance insoluble dans l'eau, l'alcool, l'éther et l'ammoniaque ; soluble dans les solutions de potasse et de soude. Sa composition est ainsi représentée :

Carbone	46,10	= 100
Hydrogène	6,09	
Oxygène	47,81	

Lignone : insoluble dans l'eau, l'alcool, l'éther ; soluble dans l'ammoniaque, la potasse et la soude. Voici les rapports de ses principes constituants ;

Carbone	50,10	= 100
Hydrogène	5,82	
Oxygène	44,08	

Lignin : insoluble dans l'eau et dans l'éther, soluble dans l'alcool, l'ammoniaque, la potasse et la soude, ainsi composé :

Carbone	62,25	= 100
Hydrogène	5,93	
Oxygène	31,82	

Ligniréose : cette dénomination rappelle la même origine que les précédentes et, en outre, l'analogie qu'elle offre avec les matières résinoïdes : elle est soluble dans l'alcool, l'éther, l'ammoniaque, la soude, la potasse ; un peu soluble dans l'eau. Voici quelle est sa composition :

Carbone	67,91	= 100
Hydrogène	6,89	
Oxygène	25,20	

Ainsi donc le ligneux, que l'on considérait comme un principe immédiat, contenant 0,50 de carbone, plus de 50 d'hydrogène et oxygène, dans les rapports de la composition de l'eau, le *ligneux*, tel qu'on l'obtient après des lavages avec les dissolvants faibles, renferme cinq principes immédiats, dont un seul, la cellulose, admet dans sa composition l'hydrogène et l'oxygène, dans les rapports de l'eau, tandis que les quatre autres principes immédiats, formant les incrustations ligneuses, contiennent un excès très-notable d'hydrogène, sur la proportion qui constituerait de l'eau avec leur oxygène.

COMPOSITION IMMÉDIATE ET ÉLÉMENTAIRE DU BOIS DE HÊTRE LAVÉ.

	BOIS à l'état normal sec.	CELLULOSE	MATIÈRE incrustante.	RELATIONS entre les parties constituantes de la matière incrustante et composition élémentaire.			
				LIGNOSE.	LIGNONE.	LIGNIN.	LIGNIRÉOSE.
Proportions des substances organiques.....	100	40	60	25,2 +	10,8 +	21,6 +	2,4 = 60
Carbone.....	50	44,44	53,74	46,10	50,10	62,25	67,91
Hydrogène.....	6,19	6,18	6,20	6,09	5,82	5,93	6,89
Oxygène.....	43,81	49,38	40,06	47,81	44,08	31,82	25,20
	100	100	100	100	100	100	100

Si l'on veut comparer les quantités de carbone fournies par chacune des parties constituantes à l'ensemble du bois, il faut mettre la composition sous la forme suivante :

Bois de hêtre desséché à 125° dans le vide 100 =

- Cellulose.. 40 = carbone..... $\frac{44{,}44 \times 40}{100} = 17{,}79$
- Matière incrustante 60 =
  - Lignose... 25,2 = carbone $\frac{46{,}1 \times 25{,}2}{100} = 11{,}61$
  - Lignone... 10,8 = carbone $\frac{50{,}1 \times 10{,}8}{100} = 5{,}41$
  - Lignin.... 21,16 = carbone $\frac{62{,}25 \times 21{,}16}{100} = 13{,}46$
  - Ligniréose.. 2,4 = carbone $\frac{67{,}91 \times 2{,}4}{100} = 1{,}63$

100 = carbone..... 49,90

L'exécution des analyses immédiates et élémentaires, entreprises pour acquérir des notions plus précises sur la constitution si complexe, comme on le voit, des matières ligneuses, avait exigé beaucoup de temps, de soins et de patience. Je n'aurais pu achever

ce long travail sans la coopération habile et assidue de M. Schmersahl, auquel je suis heureux de pouvoir adresser ici de sincères remercîments.

On comprendra sans peine, d'ailleurs, qu'il doive rester un ample et beau sujet d'étude dans la même direction. Tandis que l'histoire chimique et physiologique de l'amidon et de la cellulose peut paraître à peu près complète, les propriétés des principes immédiats des incrustations ligneuses laissent beaucoup à désirer ; les analyses sont encore insuffisantes pour autoriser à croire qu'il ne se découvrira pas de nouveaux principes immédiats parmi les nombreuses variétés d'incrustations organiques, et la composition de celles que nous avons décrites ne sera définitivement fixée que par l'examen de leurs combinaisons définies. Toutefois, il y a dans ces faits nouveaux des notions assez importantes pour mériter quelque attention de la part des savants, et assez certaines pour donner lieu à des conclusions générales, que d'autres travaux pourront étendre, mais non effacer.

Il reste une belle question théorique à résoudre, c'est la détermination de l'état dans lequel se trouvent unis les principes immédiats constituant les concrétions ligneuses.

La connaissance de leur poids atomique y conduira peut-être ; mais, s'il était permis d'anticiper sur les déductions de faits qui manquent, quelques observations me porteraient à supposer que deux ou trois de ces principes jouent le rôle d'acide à l'égard de celui qui, comme une base organique, les enchaînerait sous des formes stables, comme cela a lieu dans les combinaisons, si fécondes en beaux résultats chimiques qui constituent les corps gras.

Il serait intéressant, enfin, d'apprécier les modifications que doivent présenter graduellement, sans doute, les incrustations ligneuses dans leur formation successive, et surtout dans les couches des tiges ligneuses où l'*aubier* se convertit en *bois* de cœur.

Les conclusions positives qui me semblent pouvoir être déduites

de l'ensemble des recherches contenues dans ce mémoire, et dans le mémoire précédent, seront exposées à la fin de ce travail. Toutes les applications, étant ainsi groupées, auront peut-être plus d'intérêt, les données des mémoires qui vont suivre, devant les rendre plus complètes; mais je montrerai ici un premier exemple de leurs conséquences utiles, en exposant les résultats des essais qu'elles m'ont conduit à entreprendre sur la composition de la tourbe.

COMPOSITION DE LA TOURBE.

La composition des feuilles de toutes les plantes offre en abondance des substances azotées neutres, des matières cireuses, grasses ou résinoïdes et des huiles essentielles, qui avaient rendue si difficile l'épuration de la cellulose extraite de certains tissus.

Les tourbes provenant des végétaux herbacés et de plantes plus ou moins ligneuses, dans lesquelles se rencontrent, non-seulement ces substances grasses et azotées, mais encore la cellulose et les quatre matières organiques qui incrustent et durcissent les fibres du bois, il était probable que la composition de ces tourbes devait participer de la variété des substances qui concourent à leur formation, et, par conséquent, être bien plus complexe qu'on ne l'avait jusqu'alors supposé.

Telle fut l'opinion qui me dirigea dans les analyses immédiates et élémentaires suivantes, dont les résultats pouvaient, d'ailleurs, servir de contrôle aux conclusions de mes précédents travaux.

Je soumis la tourbe légère, de qualité moyenne, non entièrement altérée, contenant très-peu de sels calcaires, à un traitement direct par l'éther. La solution, évaporée, donna pour résidu une substance *grasse* solide à + 20°, fusible à + 42, et dont une portion était soluble dans l'alcool froid; la matière, dissoute à froid par l'alcool, se liquéfiait à + 66°; elle était dure et cassante à la température ordinaire.

Après avoir été épuisée par l'éther, la tourbe fut tenue en contact avec l'alcool bouillant, à plusieurs reprises; les solutions alcooliques, rapprochées, laissèrent un résidu solide, susceptible d'être fondu lorsqu'on élevait sa température jusqu'à 66°.

La poudre de tourbe ainsi lavée successivement par l'éther et l'alcool, fut attaquée par une solution de potasse concentrée à chaud, sans toutefois pousser la température jusqu'à dégager de l'hydrogène. Le mélange ayant été dissous dans l'eau, la solution filtrée fut saturée par l'acide chlorydrique, qui détermina la formation d'un abondant précipité. Celui-ci fut recueilli, lavé. Soumis ensuite à l'action de l'éther, puis de l'alcool, il laissa dissoudre, à chacun de ces liquides, une substance différente, et présenta, en outre, un résidu insoluble constituant une dernière matière organique. Voici les analyses des sept substances obtenues par les moyens que je viens d'indiquer:

Analyses élémentaires des substances organiques de la tourbe.

Substances extraites directement par l'éther et l'alcool:

1° Matière obtenue par l'éther qui l'a dissoute, épurée par l'alcool chaud et froid à 36°, dans laquelle elle est insoluble, (fusible de 65 à 70°).

Matière employée.....	386milligr.		Carbone.....	68,39
Acide carbonique.....	955	Composition	Hydrogène.....	10,32
Eau.....	361		Oxygène.....	21,29
				100

2° Substance obtenue par l'alcool froid, qui l'a dissoute, de la portion extraite par l'éther.

Matière employée.....	317milligr.		Carbone.....	74,98
Acide carbonique.....	867	Composition	Hydrogène.....	10,32
Eau.....	295		Oxygène.....	14,70
				100

3° Substance soluble à chaud dans l'alcool, s'en séparant après le refroidissement, extraite directement de la tourbe épuisée par l'éther.

Matière employée.....	271milligr.		Carbone.....	76,71
Acide carbonique.....	752	Composition	Hydrogène.....	12,32
Eau.....	301		Oxygène.....	10,97
				100

La tourbe, après avoir donné directement les produits ci-dessus, fut soumise à l'action de la potasse, comme nous l'avons dit; on obtint indirectement ainsi les matières des analyses suivantes :

4° Résidu des divers traitements de la tourbe légère par l'éther froid, l'alcool chaud, l'eau, la potasse à froid, l'acide chlorhydrique, étendu enfin par des lavages à l'eau distillée jusqu'à épuisement.

Substance employée.....	420 milligr. desséchée à 140° vide.
A déduire 4,40 cendres pour 100 ou....	18
Poids net.....	402

Produits obtenus : acide carbonique, 858 milligrammes; eau, 203; d'où l'on tire la composition suivante :

Carbone.....	59
Hydrogène.....	5,60
Oxygène.....	35,40
	100

5° Matière insoluble dans l'alcool du traitement de la tourbe par la potasse, extraite du précipité qu'avait produit l'acide chlorhydrique.

Poids de la substance..	1,092 milligr.		Carbone.....	51,19
Acide carbonique.....	2,025	Composition déduite =	Hydrogène.....	4,76 } 100
Eau.....	469		Oxygène.....	44,05

6° Substance soluble dans l'alcool, épurée par l'éther.

Poids employé.....	332 milligr.		Carbone.....	59,03
Acide carbonique.....	711	Composition déduite =	Hydrogène.....	5,01 } 100
Eau.....	150		Oxygène.....	35,96

7° Matière obtenue du traitement de la tourbe légère par la potasse, et provenant du lavage, par l'éther, de la substance précédente.

Poids employé.....	300 milligr.		Carbone.....	64,33
Acide carbonique.....	698	Composition =	Hydrogène.....	6,18 } 100
Eau.....	168		Oxygène.....	29,49

COMPOSITION ÉLÉMENTAIRE DES DIFFÉRENTES SUBSTANCES ORGANIQUES EXTRAITES DE LA TOURBE.

	SUBSTANCES EXTRAITES DIRECTEMENT			SUBSTANCES OBTENUES AU MOYEN DE LA POTASSE.			Résidu insoluble dans la potasse.
	par l'alcool à chaud.	par l'alcool froid.	par l'éther.	Soluble dans l'éther.	Soluble dans l'alcool.	Insoluble dans l'alcool.	
Carbone.....	76,71	74,98	68,4	64,30	59,03	51,19	59
Hydrogène.....	12,32	10,32	10,3	6,10	5,01	4,96	5,60
Oxygène.....	10,97	14,70	21,3	29,60	35,96	44,05	35,40
	100	100	100	100	100	100	100

Toutes ces substances, à l'exception d'une seule, contiennent un excès d'hydrogène, relativement à la quantité qui, avec leur oxygène, représenterait la composition de l'eau. Il en résulte que la somme de ces substances constituant la matière organique doit contenir un excès d'hydrogène : c'est, effectivement, ce que donne l'analyse. On voit enfin qu'à chacun des principes immédiats des tiges et des feuilles correspond un produit particulier de son altération.

PRODUCTION COMPARÉE DE L'ACIDE ACÉTIQUE PAR LA DISTILLATION DES TISSUS VÉGÉTAUX.

Les différences notables observées entre la composition immédiate et élémentaire des substances ligneuses, plus ou moins incrustées, et des tissus végétaux dépourvus d'incrustations, n'étaient pas sans influence, comme on l'a vu, sur le pouvoir calorifique de ces produits, considérés comme combustibles (voyez page 50); il m'a semblé curieux de rechercher s'il y aurait aussi quelque

rapport entre cette composition et le rendement en acide acétique.

Afin de m'en assurer, j'ai distillé à feu nu, comme on le fait en grand, en réunissant autant que possible des conditions égales, cent grammes de chacune des matières entre lesquelles je voulais établir cette comparaison. Les produits, condensés, furent saturés avec une même solution de soude pure, et voici quels ont été les résultats de ces opérations, d'où l'on a déduit l'équivalent en acide acétique réel.

100 grammes bois de chêne ont donné 4 grammes d'acide acétique.
100 grammes bois de peuplier..... 3,6
100 grammes coton..... 2,4
100 grammes amidon..... 2,3

Ainsi donc, il paraît évident que la proportion d'acide acétique varie suivant la nature des substances ligneuses soumises à la distillation, et que les bois durs, riches en matières organiques incrustantes, produisent, à poids égal, plus d'acide que les bois blancs, que les tissus non incrustés, bien plus encore que la cellulose et l'amidon.

MÉMOIRE

SUR

LES DÉVELOPPEMENTS DES VÉGÉTAUX;

PAR M. PAYEN.

CINQUIÈME MÉMOIRE.

CONCRÉTIONS ET INCRUSTATIONS MINÉRALES.

Après avoir étudié la composition chimique et les propriétés du tissu des plantes, ses rapports avec les substances organiques azotées que ses cellules enveloppent toujours, et en fortes proportions, surtout lorsqu'il est très-jeune; l'amidon mis en réserve pour servir aux développements ultérieurs, la cellulose, isomérique avec l'amidon, produite souvent par la transformation de celui-ci, et reliant toute structure végétale; les incrustations organiques caractérisant les parties ligneuses ou le bois; après avoir déduit de ces faits des conséquences applicables à la théorie de la nutrition des plantes, je m'étais occupé d'étudier, sous les mêmes aspects, les substances inorganiques, voulant essayer d'ajouter aux faits connus des notions nouvelles, utiles à la physiologie végétale, et applicables à la théorie rationnelle des amendements.

Une occasion heureuse s'est présentée d'apprécier les méthodes d'investigation que j'avais employées, et de faire mieux comprendre les déductions générales auxquelles je suis parvenu.

M. Meyen avait observé, en 1837, dans le tissu des feuilles de plusieurs figuiers, des corps claviformes, qu'il ne rencontra dans aucune autre plante. Pensant que l'étude attentive de ces productions nouvelles dans l'organisme servirait à éclairer l'histoire du développement des végétaux, il les examina en 1839, en profitant alors des progrès réalisés dans la construction des microscopes, et crut pouvoir les considérer comme des *masses gommeuses superficiellement recouvertes de dentelures cristallines en carbonate de chaux.* Il appela *gummi keulen* (petite massue de gomme) ces corps, qu'il supposait être ainsi convenablement dénommés.

Mais l'observation directe et l'emploi de certains réactifs s'étaient trouvés insuffisants pour conduire au but le savant physiologiste. Pour y parvenir, il lui eût fallu tenir compte des données récemment admises, chez nous, relativement à la composition chimique et aux propriétés des tissus végétaux.

Il n'est donc pas étonnant que M. Meyen n'ait pas réussi dans ses tentatives pour découvrir la véritable nature des corps dont il s'agit; à plus forte raison devait-il éprouver des difficultés insurmontables pour trouver les relations entre ces corps et la substance du tissu, leurs fonctions et leurs analogies; aussi avoue-t-il lui-même l'insuffisance de ses observations à cet égard.

La lecture du mémoire de M. Meyen, dans le dernier numéro des Annales des Sciences naturelles, m'inspira le vif désir de résoudre toutes ces questions, en y appliquant des notions que l'Académie des sciences avait jugées dignes de confiance. Je conçus même l'espoir de faire rentrer sous des lois générales, que je crois avoir découvertes, ces faits curieux, restreints en apparence à une partie d'une tribu végétale.

J'énoncerai tout d'abord la conclusion de la première partie de mon travail, parce qu'il me sera plus facile ensuite de décrire les expériences faites, les phénomènes observés et leur représentation, par des figures que j'ai tracées dans les tableaux que je dépose sur le bureau de l'Académie.

Les corps observés par M. Meyen ne sont point de nature gom-

meuse, ni superficiellement recouverts de cristaux; ils constituent un véritable prolongement, d'abord cylindroïde, puis renflé à son extrémité inférieure, de la substance propre de cellules (*la cellulose*). Cet appendice, élégamment suspendu aux couches épidermiques de la feuille dans l'axe de cellules spéciales plus grandes que les autres[1], est bientôt après entouré vers son extrémité libre par un léger tissu, dont les minces cellules, en se multipliant, offrent une configuration générale globuleuse ou ovoïde. Une abondante sécrétion de carbonate de chaux vient alors remplir de particules inorganiques toutes les petites cellules.

On voit que l'apparence des dentelures cristallines, dont les formes arrondies semblaient étonnantes à M. Meyen, est, en réalité, produite par la dernière rangée des cellules que remplit la concrétion calcaire; aussi cette concrétion est-elle en effet toujours recouverte par une membrane; *toujours aussi ces formations ont lieu en présence d'une matière azotée, comme cela se remarque pour les développements de tous les organes des végétaux.*

Les faits sur lesquels reposent ces premières conclusions ont été vérifiés, non-seulement sur les figuiers cités dans le mémoire de M. Meyen, mais encore sur d'autres espèces, que l'extrême obligeance des professeurs et des chefs de culture du Muséum, m'a permis de trouver dans les immenses collections enrichies par leurs soins. Ce fut là que je me procurai, en outre, la plupart des autres plantes dont l'examen était utile pour généraliser les résultats que j'exposerai plus loin.

PLANTES DONT LES FEUILLES CONTIENNENT DES CONCRÉTIONS PÉDICELLÉES.

Nous avons vu que M. Meyen supposait appartenir exclusive-

[1] On se ferait une idée assez exacte de l'ensemble de cet organisme en le comparant à une cloche dont l'ouverture serait fermée par une capsule hémisphérique, et dont le battant serait entouré dans ses $\frac{2}{3}$ inférieurs par un tissu celluleux ovoïde, mamelonné à sa superficie, et rempli d'une concrétion calcaire.

ment aux figuiers les corps claviformes suspendus dans les couches épidermiques de leurs feuilles : j'ai cru devoir les chercher dans d'autres plantes, et notamment dans celles que l'on place dans la famille des urticées : je suis parvenu à les découvrir, avec quelques modifications de formes et de suspension, chez un assez grand nombre d'entre elles, notamment dans toutes les urticées vraies. C'est ainsi qu'on les peut observer à la face supérieure des feuilles de l'*Urtica nivea*, où elles affectent une configuration mûriforme[1] (voyez pl. III, fig. 5); dans la pariétaire commune, où elles se présentent très-nombreuses sous l'épiderme de la face supérieure, en sphéroïdes volumineuses et hérissées de mamelons irradiés, soutenues par un mince pédicelle (fig. 4). Les feuilles de *Parietaria lusitanica* et *arborea* présentent aussi des concrétions mamelonées attachées à l'épiderme supérieur, renfermées dans de grandes cellules occupant des 0,25 aux 0,60 de l'épaisseur totale de la feuille. On les rencontre semblables encore dans les feuilles de *Forskalea tenacissima*.

Les feuilles des *Morus nigra* (fig. 6, pl. III), *alba*, *multicaulis*, tiennent suspendues à leur épiderme supérieur, dans des cellules agrandies, des concrétions légèrement mamelonnées, soutenues par de forts pédicelles. Les feuilles de *Broussonetia papyrifera* portent dans les poils courts de leur face supérieure des concrétions, dont les pédicelles, perpendiculaires aux côtés des poils qui les portent, se trouvent ainsi parallèles au limbe de la feuille (fig. 2 et 2 *bis*, pl. IV). Ces poils concrétionnés sont faciles à extraire, en raclant la superficie avec une lame de canif; ils sont à des distances assez régulières, et telles, que j'en ai compté 49 sur 7 millimètres carrés, ce qui indique un nombre de 134,000 sur une des grandes feuilles ayant 192 centimètres carrés de surface.

Les concrétions pédicellées du *Celtis australis*, suspendues à la face supérieure du limbe des feuilles, sont généralement de forme cylindroïde, mamelonnées, laissant discerner les figures

[1] Des concrétions fort analogues, ovoïdes, mamelonnées, nombreuses, se voient sous l'épiderme supérieur des feuilles de l'*Urtica japonica* ou *biloba*.

polygonales des cellules superficielles. Leur longueur varie entre 3 et 6 dixièmes de l'épaisseur de la feuille.

Dans le *Celtis mississipiensis*, les concrétions, aussi volumineuses, ne diffèrent des précédentes que par leur configuration généralement pyriforme

Les feuilles du *Celtis Tournefortii* et du *Celtis occidentalis* portent, suspendues en grand nombre par des pédicelles, sous la face supérieure de leurs feuilles, des concrétions volumineuses, cylindroïdes, à contours peu ondulés, enfermées dans des cellules agrandies qui occupent environ les deux tiers de l'épaisseur du limbe.

Les concrétions du *Celtis crenata*, nombreuses aussi, sont plus petites, irrégulièrement sphéroïdales, mamelonnées, contenues dans des cellules qui se prolongent jusqu'à la moitié de l'épaisseur de la feuille.

Les feuilles du houblon, *Humulus lupulus*, fig. 3, pl. IV, portent leurs concrétions globuliformes dans les poils courts de leurs faces supérieures. Des poils renfermant des concrétions existent sur les deux faces des feuilles du chanvre, *Cannabis sativa;* ces concrétions sont plus petites et plus rapprochées sur la face inférieure; en somme, elles sont à peu près deux fois plus nombreuses, à surface égale, que sur les feuilles du *Broussonetia papyrifera.*

On remarquera, dans les figures 1 et 1 *bis*, pl. IV qui représentent les concrétions du *Conocephalus naucleiflorus*, les courts pédicelles et les fortes gibbosités de ces concrétions, volumineuses et couchées, qui remplissent presque totalement les grandes cellules développées sous l'épiderme de la face supérieure.

Je n'ai pu découvrir de semblables concrétions dans les *Dorstenia contrayerva* et *arifolia;* dans les *Planera*, *Platanus* et *Ulmus;* quant aux concrétions trouvées dans les Pipéracées, les Aurantiacées et les Juglandées, je dirai plus loin en quoi elles diffèrent des précédentes.

EXAMEN CHIMIQUE ET ORGANOGRAPHIQUE DES CORPS OBSERVÉS PAR M. MEYEN.

Dans la vue de suivre, sans en perdre les traces, tous les rapports de ces produits avec les membranes du tissu, je les soumis successivement aux réactifs qui n'attaquent point la cellulose, dissolvent plusieurs substances étrangères et rendent les contours plus nets

J'opérai, d'ailleurs, sur des tranches excessivement minces, maintenues dans l'axe du microscope et en variant beaucoup les amplifications.

L'ammoniaque, l'eau, l'alcool, l'éther, n'altèrent en rien les corps examinés, ni la cellulose environnante : l'acide acétique, même concentré, ne devait pas agir autrement; toutefois il déchira violemment les petites masses. Attribuant ce phénomène à une action purement mécanique, j'en conclus que le carbonate de chaux était au moins recouvert d'une enveloppe, au lieu d'être déposé à la superficie; afin de vérifier cette hypotèse et d'éviter pour mes recherches ultérieures l'inconvénient précité, j'essayai de remplacer l'acide acétique par un dissolvant qui enlevât le carbonate sans dégager beaucoup de gaz. Ce but fut atteint en employant une solution qui contenait 4 d'acide chlorhydrique pur dans 1,000 d'eau, préalablement privée de gaz par l'ébullition.

Je vis alors distinctement la concrétion diminuer de volume, en conservant des contours ondulés; je parvins même à conserver, pour mieux dessiner leur aspect, différents degrés de la réduction de volume, en faisant arriver un excès d'ammoniaque au moment opportun entre les lamelles de verre.

On voit plusieurs concrétions partiellement dissoutes, laissant discerner le tissu léger d'où les particules calcaires ont été extraites : Pl. IV, fig. 1 *bis* (de feuilles *Conocephalus naucleïflorus*), fig. 10 (du *Ficus ferruginea*); pl. V, fig. 9 (du *Ficus benghalensis*), pl. VI, fig. 10 et 12 (du *Ficus nymphæi folia*). D'autres figures pl. IV, 11, 12, 14 *bis*, des *Ficus ferruginea*, *carica et laurifolia;* pl. III, fig. 5 *bis* (*Urtica nivæa*); fig. 7, *Ficus reclinata;* pl. V, fig. 10 (*Ficus Neumani rigida*); pl. VI, 2e case: fig. 7 *bis*, *Ficus benghalensis*,

fig. 12, *Ficus nymphæifolia*, montrent le tissu spécial complétement débarrassé de substance minérale ; j'ai encore observé les concrétions avec les mêmes caractères dans les figuiers désignés ci-après.

Le *Ficus reclinata* contient des concrétions calcaires pédicellées sous les deux faces de ses feuilles : les plus volumineuses se montrent à la face inférieure ; elles sont mamelonnées[1]. Entre leurs protubérances, on voit souvent le contour hexagonal qui indique les parois de la dernière rangée des petites cellules; les pédicelles adhérents à l'épiderme sont remarquables par leur grosseur, ainsi qu'on peut le voir sur les deux figures 8 et 8 *bis*, pl. III, et en les comparant avec plusieurs variétés de pédicelles appartenant aux autres concrétions des figuiers et des autres plantes. Les concrétions de la face supérieure ont un volume beaucoup moindre, et sont contenues dans des cellules non agrandies : la figure 7 indique l'un de ces organismes débarassé de la substance calcaire.

Les concrétions du *Ficus religiosa* sont adhérentes par leur pédicelle à l'épiderme de la face supérieure du limbe. Elles ont en général une configuration globuleuse plus ou moins irrégulière, et laissent apercevoir directement les lignes formées par la juxtaposition de la dernière rangée des petites cellules polyédriques.

Le *Ficus montana* contient, dans les poils courts de la face inférieure de ses feuilles, les concrétions pédicellées. (Voyez la figure 6, pl. IV[2].)

Les feuilles du *Ficus scandens* contiennent, attachées à leur épiderme de la face inférieure, des concrétions globuleuses pédicellées, que leur nombre peu considérable et leur petit volume rendent assez difficile à rencontrer.

Les concrétions des feuilles grandes et souples du *Ficus citrifolia* sont petites, globuliformes, mamelonnées, attachées à la face in-

[1] Un figuier C à larges feuilles, non dénommé dans les serres, contient des concrétions mamelonnées, globuliformes aux deux faces du limbe, mais plus abondantes sous l'épiderme supérieur.

[2] Les concrétions de ce figuier sont les seules que je n'ai pu retrouver en répétant, à quinze jours d'intervalle, toutes mes observations.

férieure dans des cellules dont le diamètre est égal au tiers ou à la moitié de l'épaisseur du limbe.

Un *Ficus* A, non dénommé, à feuilles moins grandes et souples contient aussi des concrétions pédicellées adhérentes à la face inférieure, recouvertes de mamelons élevés, diaphanes, renfermées dans des cellules agrandies qui occupent environ la moitié de l'épaisseur du limbe.

Un *Ficus* B, non dénommé, à feuilles ovales, grandes, épaisses, très-laiteuses, renferme des concrétions sphéroïdales ou pyriformes suspendues à la face supérieure, dans des cellules dont le grand diamètre est égal au tiers environ de l'épaisseur de la feuille.

Les jeunes feuilles du *Ficus glaucescens* contiennent de nombreuses concrétions pédicellées adhérentes à l'épiderme de la face inférieure, globuleuses, mamelonnées, faciles à observer, dans des cellules occupant environ un tiers de l'épaisseur du limbe. Les feuilles plus âgées présentent des concrétions plus volumineuses, pyriformes ou cylindroïdes; il s'est développé, sous l'épiderme de leur face supérieure, un grand nombre de petites concrétions pédicellées fort irrégulières et contenues dans des cellules non agrandies.

Toutes concrétions peuvent être dissoutes, comme nous l'avons dit, sans que la substance organique soit attaquée. L'existence des enveloppes membraniformes n'était donc plus douteuse, mais formaient-elles une simple tunique, ou bien un tissu se continuant dans l'intérieur des concrétions? La question fut décidée par les expériences suivantes.

D'abord, en faisant rompre par la pression les concrétions en deux ou plusieurs fragments, puis observant, sous le microscope, la surface interne mise à découvert par la rupture, on vit clairement alors le tissu interne depuis le pédicelle jusques aux membranes périphériques.

Cette observation est surtout facile, relativement aux concrétions volumineuses de la pariétaire officinale (fig, 4, pl. III, la fig. 4 *ter* montre l'aspect de l'intérieur d'un fragment).

Il était donc bien évident que le tissu spécial était continu dans l'intérieur des petites masses concrétionnées; nous arriverons encore à la même conclusion par une autre voie indiquée plus loin.

NATURE DU TISSUS DES CONCRÉTIONS.

Nous avons vu déjà que ce tissu se comporte comme la cellulose en présence de divers réactifs; cependant j'ai cru devoir chercher d'autres preuves plus démonstratives de sa véritable nature.

Je les ai trouvées d'abord dans une série d'expériences microscopiques faciles à répéter : elles consistent à imprégner d'une solution d'iode, dans de l'eau contenant 0,2 d'alcool, une tranche de feuille coupée au rasoir assez mince pour laisser nettement discerner le tissu concrétionné mis à nu et préalablement débarrassé du dépôt calcaire.

On remarque une teinte orangée jaunâtre ou fauve colorer partiellement ou en totalité les membranes en question. Ce phénomène est dû à la matière azotée qui accompagne toujours ces formations et dont une portion adhère à leur superficie.

Si alors on fait arriver, entre les deux lames de verre qui maintiennent l'objet, une goutte d'acide sulfurique étendu d'un ou d'un demi-volume d'eau, plusieurs parties du tissu, et en particulier le tissu léger de la concrétion, ainsi que le pédicelle qui les soutient, en se désagrégeant à un certain point, développeront, avec l'iode, ce composé teint en bleu qui caractérise la cellulose à cet état. Plusieurs des figures coloriées, pl. II et pl. IV, donnent une idée de ce curieux phénomène, elles montrent, en outre, des particules de matières azotées éliminées avec la coloration orangée qu'elles avaient manifesté au contact de l'iode.

On a trouvé une autre démonstration évidente de la nature du tissu des concrétions dans l'analyse élémentaire faite après avoir enlevé, sur un assez grand nombre de feuilles de *Broussonetia papyrifera*, les poils concrétionnés, éliminant le carbonate

calcaire par l'acide chlorhydrique étendu, puis les autres substances étrangères, par les procédés précédemment décrits; voici les résultats de cette analyse :

Matière analysée	$210^{m},5$		C = 44,5
Eau obtenue	126	D'où	H = 6,6
Acide carbonique	356		O = 48,7

Nous verrons bientôt, en examinant la situation de la silice dans les feuilles, une conformité de plus entre leur tissu et le tissu spécial des concrétions.

Nous venons de démontrer :

1° Que les corps observés par M. Meyen sont de véritables organes, offrant une structure particulière, mais composés, comme tous les organismes végétaux, de cellulose développée en présence d'une substance azotée;

2° Que ces organes ne sont pas les attributs exclusifs des figuiers, mais qu'ils appartiennent également à un grand nombre de plantes rangées dans la famille des Urticées;

3° Que leur destination consiste à sécréter du carbonate de chaux en masses beaucoup plus pesantes que les membranes enveloppantes.

Il restait à rechercher si le tissu spécial précédait la concrétion ou se formait autour d'elle. Cette question est résolue dans le premier sens, par l'observation des feuilles précitées à différents âges. On voit en effet que, d'abord privées de toutes traces de cette organisation, les pédicelles se montrent dans des cellules du limbe qui s'agrandissent; que, bientôt après, le tissu léger apparaît autour de la partie inférieure renflée de chacun des appendices, et se développe sans contenir encore de dépôt calcaire, puisque enfin celui-ci est introduit dans les petites cellules préparées pour le recevoir.

Ces phénomènes successifs si remarquables se peuvent observer simultanément sur une jeune feuille de *Broussonetia papyrifera*, car les poils propres aux concrétions pédicellées s'y montrent ordinairement à plusieurs degrés de développement, tels

qu'on les voit pl. IV dans les trois figures 2 et 2 *bis* et fig. 7 c' c'' c''', du *Ficus elastica*.

LOI GÉNÉRALE RELATIVE À LA PRÉSENCE DES SELS CALCAIRES DANS DES PLANTES.

Sans doute la puissance des organismes que nous venons de décrire est grande, car ils peuvent sécréter et conserver du carbonate de chaux, bien qu'ils soient entourés de sucs acides, acides au point de dissoudre en totalité ou en partie la concrétion, lorsque, par des coupures, on établit une communication libre entre eux.

C'était là, au moins, une grande exception à la loi générale qu'avaient cru pouvoir établir Fourcroy et Vauquelin[1].

Au surplus, un grand nombre des feuilles bien développées contiennent, soit dans leurs nervures, soit dans leur parenchyme, du carbonate, du pectate ou du phosphate calcaire : ces sels paraissent interposés dans l'épaisseur des parois ou dans les méats intercellulaires, soit entre les cellules vertes du parenchyme, soit entre les grandes cellules qui environnent le tissu serré autour des faisceaux vasculaires. On aperçoit directement, parfois, ces incrustations sous le microscope.

Voici, d'ailleurs, plusieurs moyens de déceler et de démontrer leur présence.

On coupe en tranches très-minces le parenchyme vert par un plan perpendiculaire aux faces de la feuille, ou les nervures par un plan parallèle à leur axe. On remarque alors, en observant au microscope, les incrustations brunes dans les coins entre les cellules, et même irrégulièrement étendues autour de leurs parois. Les cellules, ainsi incrustées, se montrent en nombre plus

[1] « La chaux ou le carbonate de chaux qu'on trouve dans les cendres végétales ne sont jamais contenues à cet état dans les plantes, mais à celui de sels, que le feu décompose et réduit à leur base plus ou moins carbonatée. » (*Annales du Muséum d'hist. nat.* t. XIII, p. 1.)

ou moins considérable, suivant l'âge des feuilles et l'espèce de la plante, sans doute aussi suivant la nature du sol.

Quoi qu'il en soit, il suffit parfois de mettre de l'acide chlorhydrique étendu de dix volumes d'eau en contact avec ces tranches, pour voir le carbonate se dissoudre et le gaz enfermé dans les méats presser et entourer les cellules.

Cette expérience a réussi, notamment sur les feuilles de *Mesembrianthemum cristallinum*, *Maclura aurantiaca*, *Forscalea tenacissima* (nervures), *Juglans regia*. Souvent la pénétration du liquide paraît lente et difficile dans les méats incrustés; alors on emploie l'acide sulfurique étendu d'un volume d'eau. Il pénètre rapidement, attaque le carbonate et dégage le gaz acide carbonique, qui bientôt enveloppe les cellules. Les figures 1 et 1 *bis* de la planche VI, indiquent ce phénomène, car elles représentent : la première, le tissu à l'état normal d'une nervure de feuille; et la seconde, le même tissu dont les grandes cellules ont été disloquées par le gaz qui les entoure. On voit, en 1 *bis*, le gaz faisant effort dans les méats, former des conduits gonflés, pénétrer en bulles sphériques, et se réunir dans une des cellules. Le sulfate de chaux, produit par cette réaction en présence d'un excès d'acide, cristallise en longs prismes irradiés. Le volume du gaz, parfois très-faible relativement à la matière dissoute ou au sulfate formé, indique que l'incrustation se composait en très-grande partie de sels calcaires autres que le carbonate.

J'ai observé les mêmes phénomènes dans les feuilles de *Solanum tuberosum*, , de *Saurocea*, de *Polygonum fagopyrum* (sarrazin), de betterave, de platane, et dans plusieurs tiges de cactus.

Les incrustations de carbonate calcaire au dehors des cellules végétales se montrent accompagnées de circonstances remarquables dans les *Chara* : en effet, développées dans les mêmes eaux, les uns, comme le *Chara hispida* et le *Chara vulgaris*, sont incrustés de carbonate de chaux; d'autres, comme le *Chara translucens*, en sont exempts, ou n'en contiennent que des quantités faibles, imperceptibles directement.

Il m'a paru intéressant d'examiner, si, dans les Characées, le carbonate de chaux était librement déposé ou contenu dans un organisme spécial.

Les figures 2, 3, et 4 de la planche VII, montrent la disposition générale de ces concrétions dans le *Chara hispida* autour du gros tube et des longues cellules corticales contournées en hélices; dans la figure 4, plus amplifiée, on remarque la concrétion formée d'un grand nombre de cristaux à formes mal déterminées, qui semblent recouverts d'une très-mince membrane. Cette apparence devient plus manifeste ainsi que la présence des membranes interposées, lorsqu'on fait dissoudre lentement le carbonate par l'acide chlorhydrique pur, étendu de 250 volumes d'eau. Après la dissolution complète, on voit autour des cellules le tissu excessivement léger qui maintenait le carbonate; ce tissu, imprégné ou recouvert lui-même d'une abondante matière azotée, se contracte en présence de l'iode, puis se colore en jaune fauve et devient alors très-apparent.

La figure 2 montre, par une coupe perpendiculaire à l'axe du gros tube : 1° en *a, a, a,* les cellules corticales allongées, extérieurement recouvertes par l'incrustation calcaire, et renfermant sur leurs parois intérieures les nombreux corpuscules à composition quaternaire, riche en substance azotée, colorés en vert. On voit en *b* le gros tube central tout entouré par les concrétions calcaires adhérentes à la superficie, et par les longues cellules tubuleuses également concrétionnées.

La figure 3 représente le gros tube dépouillé des cellules enveloppantes; la trace hélicoïdale de celles-ci se remarque par les sillons non incrustés qui correspondent aux points où les parois extérieures des cellules longues et du gros tube étaient le plus rapprochées; on voit les dispositions particulières des concrétions sur le gros tube laissant entre elles des sillons transversaux libres.

Dans les très-jeunes rameaux, les concrétions sont moins volumineuses et moins rapprochées, tandis que, dans les rameaux plus âgés, les concrétions, plus développées, ont envahi presque tous

les espaces, ou réduit ces derniers à des canalicules presque imperceptibles.

La figure 4, sous une amplification en diamètre de 1,050 fois environ, indique en *a*, *a*, les concrétions colorées en jaune fauve par une solution aqueuse d'iode. On voit en *b* une portion de l'intérieur du gros tube, dont les parois internes sont tapissées de granules verts; l'épaisseur des membranes cylindriques : 1° des cellules allongées, se distingue par les trois bandes blanches *c*; et 2° du gros tube central, par la bande plus large *d*, *d*.

Enfin, vers l'encoignure opposée de la même partie supérieure de cette planche, on trouve l'indication de l'aspect qu'offre sous le microscope une portion des cellules corticales de la même tranche, après la réaction de l'acide chlorhydrique affaibli. Toute la substance calcaire, ayant été dissoute ainsi avec ménagement, a laissé adhérentes, aux parois extérieurs desdites cellules, les légères membranes du tissu externe, imprégnées de substances azotées, dans lesquelles étaient sécrétées et enveloppées les concrétions calcaires.

OXALATE DE CHAUX DANS LES FEUILLES.

La présence de l'oxalate de chaux dans les nervures ou le parenchyme des feuilles est un fait général auquel je n'ai pas encore trouvé d'exceptions dans les plantes phanérogames.

On le rencontre ordinairement en cristaux transparents, irradiés ou groupés en sphéroïdes hérissées de pointes, appartenant, en apparence, à des rhomboèdres, des octaèdres ou des prismes rectangulaires et terminés, soit par des pyramides à quatre faces, soit par des faces irrégulières ou gradins anguleux. Ces cristaux ne sont pas rigoureusement déterminables. La plupart se trouvent enfermés dans les grandes cellules qui entourent le tissu serré au milieu duquel passent les vaisseaux des nervures.

Ils se rencontrent souvent, en outre, au milieu du parenchyme dans des cellules où la matière verte manque très-généralement.

La figure 11, planche VI, montre une de ces petites agglomérations, et la figure 11 *bis*, le tissu spécial qui renfermait la concrétion au moment où celle-ci fut dissoute par l'acide azotique.

Des concrétions de même nature, mais plus volumineuses, disposées en séries régulières adhérentes à la rangée des longues cellules vertes, se remarquent au milieu de l'épaisseur des feuilles du *Begonia undulata :* elles sont représentées en *c, c,* figure 3, planche VI.

L'oxalate de chaux se montre en cristaux plus volumineux encore, isolés ou groupés, offrant parfois l'aspect de rhomboèdres, dont aucun cependant ne m'a paru véritablement régulier, dans les feuilles des *Citrus* et *Limonia;* on les voit encore dans des cellules agrandies, adhérentes, en général, à l'épiderme de la face supérieure. Comme les concrétions calcaires des urticées, elles en diffèrent par leur nature et par l'absence de pédicelles. Les figures 10 et 9, planche III, qui indiquent les formes et les relations de ces cristaux, montrent aussi qu'ils sont enveloppés dans un tissu organique léger. On rend plus facilement discernable ce tissu à l'aide de l'iode, qui le jaunit, partiellement du moins.

En employant ce réactif sur une tranche des larges feuilles d'un oranger, figure 9, une partie des cellules et des granules contenant la matière verte se sont colorés en bleu, phénomène que je n'avais encore observé directement que sur des tissus de cryptogames, et que j'ai cru devoir signaler en passant, persuadé qu'il se reproduirait ailleurs. On remarquera, dans cette figure en *a,* la cuticule épidermique, colorée en jaune orangé par l'iode et recouvrant les cellules de l'épiderme; en *b,* une deuxième rangée de cellules plus grandes, sous laquelle une cellule spéciale, plus grande encore, renferme une volumineuse concrétion polyédrique d'oxalate calcaire; enfin, les cellules allongées et les enveloppes de leurs granules verts bleuissant par l'iode.

Le tissu spécial des concrétions se manifeste d'une manière certaine lorsque l'on a fait dissoudre l'oxalate à l'aide de l'acide

azotique affaibli. C'est ce que montrent les figures avant et après la réaction opérée sur les concrétions.

On trouve d'ailleurs dans les feuilles d'orangers et de limoniers des cristaux semblables au milieu des tissus cellulaires qui environnent les vaisseaux des nervures; ils sont plus petits, et dans des cellules non agrandies. Le *Maclura aurantiaca* montre en grand nombre les concrétions sphéroïdales hérissées de pointes dans le tissu lâche des nervures.

Les feuilles du *Juglans regia* contiennent de l'oxalate de chaux, sous forme de larges cristaux agglomérés en groupes irradiés dans des cellules agrandies sous l'épiderme de leur face supérieure. Les figures 1 et 3 représentent ces cristaux, et montrent le léger tissu qui les recèle; la figure 2 indique le tissu spécial qui les enveloppait et qui persista après la dissolution de l'oxalate par l'acide azotique à 0,1, ou même par l'acide sulfurique étendu d'un volume d'eau. Les mêmes feuilles présentent, dans le tissu cellulaire de leurs nervures, de petites agglomérations nombreuses de cristaux d'oxalate de chaux. On remarque plusieurs rangées contiguës de ces cristaux irradiés, dans les nervures, sous les faisceaux vasculaires des feuilles de *Juglans nigra*, et du *Juglans cinerea*[1].

Les nombreuses concrétions cristallines contenues dans les cellules de la plupart des tiges de cactus sont aussi enfermées dans un tissu de même nature, que l'on peut apercevoir en faisant dissoudre lentement les cristaux à l'aide de l'acide azotique ou chlorhydrique étendu. Les faibles membranes et les minimes cellules se dessinent par degrés, soutenues encore par les particules solides.

Ces cristaux sont parfois tellement abondants, que le tissu desséché ressemble à une pétrification grenue. Je dois à l'obligeance de M. Adolphe Brongniart un échantillon de ce genre,

[1] Je les ai trouvées encore dans les feuilles de platane, d'orme, du *Planera crenata*, de *Saurocea*, de pommier, de prunier, des peupliers, du lierre grimpant, des urticées, de plusieurs oxalis, chenopodées, etc. etc.

qu'il me remit pour l'analyser. Broyé, dissous à chaud dans l'acide azotique à 0,1, séparé par le filtre des membranes organiques et traité par le carbonate de potasse, il donna de l'oxalate de potasse et du carbonate de chaux. Les cristaux étaient donc composés d'oxalate de chaux. Le tableau des analyses (voir page 108) montre que le tissu précité à l'état sec, contenait 70 p. 0/0 de son poids d'oxalate cristallisé. Ce sel, si abondamment répandu dans l'organisme végétal, se distribue régulièrement en certaines parties et affecte parfois des formes singulières et une contexture remarquable.

CACTÉES OU NOPALÉES.

La plupart des plantes de cette famille sont abondamment pourvues de cristaux aciculaires ou prismatiques, irradiés, formant des concrétions sphéroïdales.

On les rencontre quelquefois en grand nombre dans les couches épidermiques, presque toujours dans le tissu vert sous-jacent, où les cristaux sont en général plus volumineux. Le tissu situé plus profondément dans la tige offre des concrétions semblables, nombreuses et plus grosses encore; enfin, lorsque le tissu médullaire en renferme, elles sont, souvent, les plus volumineuses de toutes[1].

Cactus opuntia (*Ficus indica*). Dans toute l'épaisseur des couches épidermiques, les cellules contiennent, la plupart, une concrétion chacune, en sorte qu'il en existe, dans une seule section perpendiculaire aux faces, trois ou quatre rangées parallèles. Ces concrétions, comme toutes celles que j'ai pu observer dans les cellules du tissu épidermique des cactus, sont caractérisées par une forme sphéroïdale plus régulière, une surface moins hérissée de pointes, un volume plus approximativement égal que dans les cellules des tissus sous-jacents.

[1] Ces cristallisations sont formées par l'oxalate de chaux et toujours accompagnées d'un tissu spécial, visible, soit directement, soit après la réaction des acides azotique et chlorhydrique étendus.

Des agglomérations de cristaux aigus se montrent nombreuses dans les grandes cellules qui s'approchent du tissu fibreux, autour des faisceaux vasculaires du même cactus ainsi que des cinq espèces suivantes. On voit sous deux grossissements une de ses concrétions dans les figures 4 et 4 *bis* de la planche V.

Cactus opuntia tuna. Les concrétions sphéroïdales de l'épiderme, ainsi que les agglomérations hérissées de pointes aiguës et diaphanes occupent respectivement les mêmes places que dans les cactus précédents; on remarque des concrétions volumineuses à cristaux aigus dans le tissu médullaire.

Cactus opuntia ferox. Il contient des concrétions sphéroïdales dans ses cellules épidermiques, des concrétions de cristaux aigus dans les grandes cellules qui avoisinent les faisceaux vasculaires, et des grains d'amidon dans son tissu médullaire.

Cactus opuntia microdasys. Ce cactus renferme, dans l'épaisseur de sa membrane épidermique la plus externe, et qui est hérissée de poils très-multipliés, de petites concrétions sphéroïdales éloignées les unes des autres. Un grand nombre de cristaux aigus, groupés suivants les rayons de sphéroïdes, se montrent dans les cellules du tissu peu abondant en granules verts.

Cactus opuntia brasiliensis. Sous son épiderme, on distingue des concrétions arrondies assez régulièrement espacées. Les agglomérations irradiées de cristaux aigus se montrent graduellement plus nombreuses dans le tissu vert et les grandes cellules contiguës à celui-ci, mais plus rapprochées des faisceaux vasculaires.

Cactus opuntia glaucescens. On voit dans la première rangée des cellules, sous l'épiderme, des concrétions sphéroïdales séparées les unes des autres par une cellule vide que leur développement a considérablement rétréeie. Toutes les concrétions épidermiques sont enveloppées dans une membrane, et la dissolution graduée de l'oxalate laisse voir le tissu interne. La figure 7, planche V, indique les formes de ces concrétions au-dessous des lettres *d*, *d'*, le tissu spécial au-dessous de *d'*, *d''*, persistant après la dissolution de l'oxalate; on y voit les dispositions de ces con-

crétions cristallines dans le tissu. On remarquera encore, dans cette figure en *d'*, *d''*, l'effet de la réaction de l'iode, qui a teint en jaune orangé la cuticule épidermique.

Cette coloration a persisté ainsi que les formes externes et la structure de cette cuticule, malgré l'addition de l'acide sulfurique.

On voit enfin que le concours de l'iode et de la réaction de l'acide sulfurique a déterminé simultanément la désagrégation de la cellulose des épaisses parois cellulaires, et la coloration bleu-indigo qui caractérise cet état d'agrégation précédant la transformation en dextrine, tandis que les substances azotées, dans les cellules et dans leurs canalicules, se sont teintes en une couleur jaune-orangé. Ce cactus renferme d'ailleurs, sous son tissu vert, un grand nombre de concrétions plus volumineuses hérissées de cristaux aigus.

Echinocactus sulcatus. Il ne renferme que de rares cristaux. La tige que j'ai examinée ne m'a pas paru contenir de concrétions sphéroïdales d'oxalate; mais, en beaucoup de points, les méats intercellulaires étaient fortement incrustés de sels calcaires que l'acide sulfurique attaquait lentement (comme cela se remarque dans les tissus à sucs très-visqueux) en dégageant de l'acide carbonique qui élargissait graduellement l'espace. Il se produisait ainsi du sulfate de chaux cristallisant par degrés en longs prismes irradiés; des granules verdâtres étaient groupés en cercles assez réguliers dans les grandes cellules, sous le tissu le plus abondant en ces granules verts; au delà et plus près du tissu fibreux, on pouvait observer quelques cristaux prismatiques ou rhomboédriques irréguliers d'oxalate de chaux.

Cactus cylindricus. Les concrétions dans le tissu vert de ce cactus et dans les cellules blanches contiguës se montrent sous formes de sphéroïdes hérissées de cristaux longs aigus; des concrétions semblables se voient autour de l'axe de cette tige.

On remarque enfin dans les coins, entre les cellules, des incrustations opaques qui souvent se prolongent sur les parois la-

térales externes, remplissant ainsi un grand nombre de méats intercellulaires.

Ces incrustations, lentement attaquables par l'acide chlorhydrique à 0,1, sont dissoutes par l'acide sulfurique. Le gaz acide carbonique qui s'en dégage distend les méats, et peut rester enfermé pendant plus de dix heures entre les cellules.

Cereus cetaceus. L'oxalate de chaux s'y voit sous plusieurs formes : 1° en cristaux prismatiques rectangulaires isolés; 2° en cristaux semblables groupés au nombre de deux, trois, quatre, etc. et sensiblement autour d'un centre commun; 3° en concrétions irradiées ou sphéroïdales; 4° en raphides courtes, à côtés parallèles, terminées par deux pointes ou tronquées. Tous ces cristaux sont accompagnés d'un tissu spécial, visible directement sur quelques-uns d'entre eux. On remarque, autour de l'axe de la tige, des grains d'amidon et des raphides.

Cereus nycticalius. Il contient d'abondants cristaux anguleux aigus ou prismatiques, rectangulaires et agglomérés en sphéroïdes irréguliers; quelques prismes se voient isolés ou groupés deux, trois, quatre ou un plus grand nombre dans les directions des rayons d'une sphère. Beaucoup de méats intercellulaires sont incrustés de sels calcaires que l'acide chlorhydrique à 0,1 peut attaquer.

Cereus grandiflorus. Il contient un très-grand nombre de courtes raphides, et ne présente que de rares concrétions de cristaux prismatiques. On retrouve des concrétions composées de prismes semblables dans les *Cereus peruvianus, Cereus nycticalius, Cereus obtusus, triangularis, etc.* La figure 5 et la figure 5 *bis*, sous un plus fort grossissement, représentent ces agglomérations cristallines. Quelques-uns des prismes rectangulaires bien isolés se terminent par des pyramides à quatre faces.

Ces derniers cristaux, plus réguliers que la plupart de ceux que nous avions observés antérieurement, n'en sont pas moins accompagnés du tissu spécial des concrétions. On le voit se dessiner graduellement pendant la dissolution lente de l'oxalate de

chaux, à l'aide de l'acide chlorhydrique étendu de 9 volumes d'eau. Les deux figures 6 et 6 *bis*, dessinées avant et pendant la dissolution du sel, démontrent qu'au moment où la réaction pénètre dans le cristal, celui-ci se divise en particules polyédriques ou arrondies, dont les intervalles présentent les apparences d'un tissu réticulaire. Cet aspect, indiqué figures 2 *bis* et 6 *bis*, persiste parfois lentement modifié; ensuite les particules cristallines disparaissent et laissent, en dernière analyse, le léger tissu dans lequel tout le cristal était sécrété. La figure 2 *ter* indique l'apparence de ce résidu organique appartenant à un cristal (figure 2) comme on en trouve beaucoup dans les Juglandées et les Aurantiacées [1]. On parvient à rendre le faible réseau organique (2 *bis*, 2 *ter* et 6 *bis*) plus évident lorsque, sous un très-fort grossissement, la lentille touchant la lamelle de verre, on imprime un petit mouvement au liquide en faisant osciller la vis du microscope. La substance membraniforme, en se déplaçant dans ses parties libres, laisse juger de sa continuité et de sa flexibilité.

Cactus peruvianus. Nous avons déjà parlé d'un de ces cactus rempli d'une quantité extraordinaire de cristaux, offrant la conformation de gros prismes ou de petits octaèdres, agglomérés en très-volumineuses concrétions ou isolés, et tous munis du tissu spécial.

Un individu plus jeune, moins abondamment concrétionné, m'a offert d'ailleurs les mêmes résultats. Son tissu médullaire, contenant quelques prismes rectangulaires assez nettement terminés des deux bouts, était d'ailleurs rempli de grains bien développés d'amidon, montrant très-nettement les lignes de superposition et l'inégale densité de leurs couches concentriques.

Cactus obtusus. Il renferme un très-grand nombre de concrétions formées de prismes rectangulaires et de quelques cristaux à angles irrégulièrement aigus. Le tissu léger de ces cristallisations devient peu à peu discernable, lorsqu'on suit attentivement les

[1] Des cristaux semblables, mais beaucoup plus petits, comme on en voit figure 3, se rencontrent dans presque toutes les feuilles : ils sont aussi composés d'oxalate de chaux.

progrès de la dissolution de l'oxalate calcaire par l'acide chlorhydrique affaibli.

Cactus triangularis. Ce cactus contient un grand nombre de cristaux prismatiques rectangulaires disposés en concrétions irradiées. Leur tissu spécial est souvent visible avant qu'on ne dissolve l'oxalate, à plus forte raison pendant et après la réaction de l'acide.

Rhipsalis cassytha. Ses tiges contiennent de très-nombreuses concrétions à cristaux aigus ou droits; les plus petites se voient dans les cellules sous l'épiderme, elles sont graduellement plus volumineuses en s'éloignant de l'épiderme; un grand nombre d'entre elles remplissent les cellules où elles se sont formées. On voit, dans d'autres cellules agrandies ou ordinaires, des granules d'amidon généralement plus gros dans les grandes cellules. Une substance azotée, plus ou moins abondante, tapisse les parois des cellules dans toutes les parties du tissu.

Les jeunes pousses renferment des concrétions moins nombreuses et d'un moindre volume; elles contiennent plus de matière azotée.

Rhipsalis funalis. On remarque dans celui-ci les mêmes dispositions des concrétions cristallines et des grains très-nombreux d'amidon. La superficie ou la cuticule de l'épiderme est ondulée à larges plis.

Rhipsalis salicornioïdes. Dans celui-ci les concrétions cristallines, semblablement disposées encore, sont cependant moins nombreuses; les granules d'amidon y sont plus petits; de grandes lacunes se voient dans le tissu remplies d'un suc mucilagineux. La membrane épidermique montre à sa superficie des ondulations à plis étroits.

FORMATION ET COMPOSITION DES RAPHIDES.

Ces corps rigides, déliés, souvent très-longs, diaphanes, ont été considérés, tantôt comme des cristaux de phosphate ou de

carbonate, ou d'oxalate de chaux; tantôt comme formés de silice. Entre ces opinions des différents observateurs, M. de Candolle, en leur donnant le nom de *raphides*, ne voulut point se prononcer.

Répandues dans une foule de plantes, abondantes surtout dans les Aroïdées, elles y sont d'abord réunies en faisceaux dans certaines cellules, et parfois dans des vésicules appelées biforines. Les raphides se disséminent ensuite entre les cellules ou dans les larges canaux des pétioles, comme si elles devaient, par leur rigidité, maintenir des passages libres entre elles.

En examinant ces corps dans le lieu où ils se forment, je les ai toujours vus entourés d'un tissu membraneux, de couleur légèrement jaune, offrant tous les caractères du tissu spécial des concrétions. M. Turpin avait déjà observé une enveloppe générale de ce genre, sorte de sac, dans l'intérieur des biforines; mais les longues aiguilles, une fois sorties de leurs cellules, représentaient-elles des cristaux isolés? Cela ne me parut pas vraisemblable d'après mes observations précédentes; leur extrême ténuité rendait bien difficile une analyse individuelle de ces aiguilles microscopiques. Je ne désespérai pas d'y parvenir; et, afin de rechercher si chacune d'elles n'était pas accompagnée d'une substance organique, je déterminai d'abord leur nature chimique. A cet effet, je fis dessécher puis incinérer avec précaution des tranches minces du tissu d'un pétiole d'*Arum colocasia*, préalablement lavées dans l'eau pure afin d'éliminer les sels solubles. Après l'incinération, les agglomérations de raphides dans leurs cellules étaient devenues opaques, comme l'indique la figure 8, planche VII; les acides démontraient la présence du carbonate de chaux en opérant un dégagement tumultueux d'acide carbonique, et l'acide sulfurique en formant du sulfate de chaux. Voulant enlever toute la substance calcaire sans rien déranger, je fis passer sur une autre concrétion, préparée de même, un courant d'acide chlorhydrique pur étendu de cinq cents volumes d'eau. Je vis alors l'opacité disparaître avec le carbonate, et laisser les

traces très-affaiblies, mais évidentes, des raphides diaphanes, un peu courbées et enfermées encore dans la cellule végétale, comme l'indique la figure 8 *bis*, même planche. Cette singulière apparence de corps organisés, persistant après l'incinération et l'action des acides, me sembla devoir être due à une incrustation siliceuse dans la membrane, ce que je parvins à démontrer, comme nous le verrons bientôt.

Dès lors il me parut probable que chaque raphide était munie d'une trame membraneuse, à laquelle l'oxalate de chaux devait ses formes et donnait sa rigidité; que, si je faisais dissoudre le sel sans détruire la matière organique, celle-ci devait reprendre alors sa flexibilité et ses caractères habituels. Afin d'arriver à ce résultat, je fis passer, entre les deux lames de verre qui maintenaient au foyer du microscope des raphides séparées dans une goutte d'eau, un courant d'acide sulfurique graduellement plus concentré jusqu'à o,5[1]. Je vis des stries marquer la dissolution de l'oxalate, et la substance membraneuse, devenue flexible, se replier, suivant l'impulsion du courant. Sa projection est plus visible après le lavage et l'évaporation du liquide.

Les figures 5 et 5 *bis*, planche IV, montrent les progrès de cette réaction sur les raphides de l'*Arum colocasia;* j'ai obtenu des effets analogues en agissant sur des raphides extraites d'une feuille de vigne; ce phénomène est plus curieux, plus facile à reproduire en agissant sur une biforine tirée de l'*Arum seguinum*. Ainsi que l'indique la figure 1re de la planche VII, pendant que les raphides sont expulsées par l'effet de l'eau, ou mieux de l'acide acétique, l'acide sulfurique arrête au passage ces aiguilles gonflées, les assouplit en dissolvant la cristallisation intérieure, et permet aussitôt de les faire flotter en tous sens, car la partie engagée dans la biforine la maintenant ainsi fixée d'un bout, empêche que les courants de liquide, variés à dessein, n'entraînent ces sortes de membranes organiques en dehors du cercle de l'observation.

[1] Un volume d'acide à 66° + 1 volume d'eau.

SÉCRÉTIONS LIQUIDES.

Nous avons vu que les concrétions de carbonate calcaire, insoluble dans l'eau, constituent véritablement dans un état neutre ou alcalin une partie notable des tissus sous-épidermiques d'un grand nombre de plantes de la famille des Urticées, contenant des sucs acides partout ailleurs. Il m'a semblé que des effets analogues pouvaient être produits dans d'autres végétaux par des composés solubles ou liquides, qui seraient de même maintenus dans certaines régions des tissus, sans communications directes ou libres avec les autres sucs. J'en ai trouvé un exemple remarquable dans le *Mesembrianthemum cristallinum*[1].

Les vésicules qui enveloppent la totalité des feuilles et tiges de cette plante sont remplies d'une solution alcaline. Celle-ci, extraite isolément, ramène au bleu le tournesol rougi, laisse cristalliser sur le porte-objet du microscope l'oxalate de potasse, et donne, avec les sels calcaires, l'acide tartrique et le chlorure de platine, les précipités qui caractérisent ce sel. La substance membraniforme légère qui enveloppe la sécrétion présente, par l'iode et l'analyse, les propriétés des matières organiques azotées; enfin la réaction successive de l'iode, de l'acide sulfurique, y décèle la cellulose en faisant apparaître la coloration bleue spéciale. On trouve encore dans le liquide alcalin des rudiments de cristaux d'oxalate de chaux, enveloppés du léger tissu utriculaire des concrétions.

Toute la périphérie de la plante est donc constituée ainsi dans un état d'alcalinité prononcée; toute la masse des tissus intérieurs, au contraire, est à l'état acide : on s'en assure aisément

[1] Cette plante, où M. Gay-Lussac a constaté la présence de l'oxalate de soude, donne, par son incinération, la *soude de Ténériffe*. Dans le *Mesembrianthemum* cultivé au jardin du Roi, l'oxalate de potasse domine : c'est que, dans le premier cas, le terrain, entouré par les eaux de la mer, abonde en composés à base de soude, tandis que dans le deuxième, comme presque partout à l'intérieur des continents, les composés à base de potasse sont en plus fortes proportions dans les sols, comme dans les engrais et dans les végétaux.

en posant une section fraîche de la tige ou d'une feuille sur un papier bleu de tournesol, car on obtient aussitôt une impression fortement rougie.

Le tissu interne est, en outre, caractérisé par une abondante cristallisation de raphides aiguës et courtes, offrant, en général, la figure d'un double fer de lance, telles qu'on les voit en *b* et *c*, planche V.

SÉCRÉTION FLUIDE DE MATIÈRE HUILEUSE DANS LE PARENCHYME DES FEUILLES.

Parmi les nombreux exemples des sécrétions de ce genre que j'ai observées, l'un des plus remarquables et de ceux qui se rapprochent le plus des appareils sécréteurs des concrétions minérales s'est rencontré dans les feuilles du *Piper colubrinum*. La sécrétion huileuse aromatique existe sous forme de sphéroïdes enveloppées dans un tissu léger, et tout cet appareil glanduleux est renfermé dans une cellule sous-épidermique. Deux rangées de cellules sous l'épiderme de la face supérieure de ces feuilles présentent, à des distances assez rapprochées, des cellules oléifères (voyez les deux rangées de cellules au-dessous de la figure 5, planche VI), tandis que, sous la face inférieure de la feuille, on ne trouve qu'une rangée contenant des cellules oléifères; enfin on les voit encore au milieu du tissu cellulaire qui environne le tissu serré des faisceaux vasculaires dans les nervures. Ici les cellules arrondies qui renferment ces sphéroïdes sont entourées de cellules polyédriques convergentes. Il n'est pas rare de trouver dans la même feuille ces sécrétions à plusieurs degrés de développement: quelques-unes commmencent à peine à entrer dans le tissu destiné à les recevoir; alors celui-ci, moins serré et plus transparent, laisse mieux discerner les détails de son organisation. On s'en peut faire une idée en comparant entre elles les figures 4 et 5, qui représentent ces sécrétions huileuses sous un fort grossissement.

Si l'on soumet à l'acide sulfurique étendu d'un volume d'eau

les sécrétions bien remplies, elles s'exfolient un peu (voyez figure 6) par la désagrégation du tissu sécréteur, et l'acide attaque ensuite la substance oléiforme. Cette altération développe dans la masse huileuse, contenant sans doute de la piperine, une coloration rouge (voyez les figures 6 *bis* et 6 *ter*, voyez aussi les sécrétions oléifères, planche I^re^, figures 4, 10, 11, 12).

ÉTAT DE LA SILICE DANS LES PLANTES.

Mes dernières expériences sur la structure des raphides, en confirmant la loi relative à la formation des cristaux et des concrétions dans les plantes, m'avaient dévoilé un mode d'incrustation siliceuse dans les membranes; je saisis avec d'autant plus d'empressement l'occasion d'approfondir cette question, qu'elle me sembla présenter une grande analogie avec un mode général d'incrustation des membranes ligneuses par les substances organiques.

Reprenant alors, sous ce point de vue, l'examen des feuilles de toutes les plantes indiquées dans ce mémoire, j'ai trouvé toutes les membranes de leurs tissus épidermiques incrustées de silice. J'ai même étendu cette longue série de recherches aux tiges des Graminées et aux Prêles, qui ont offert les mêmes dispositions de la silice dans l'épaisseur des parois de leurs membranes périphériques. Enfin, on avait annoncé que plusieurs feuilles, notamment celles du marronnier d'Inde, ne contenaient point de silice. Je les ai examinées, et j'ai constaté que ces feuilles en renferment dans toutes leurs membrane épidermiques.

Voici les procédés à l'aide desquels la présence de la silice dans les tissus, et ses rapports avec les membranes se peuvent découvrir.

On coupe des tranches très-minces des tissus à observer; on les lave afin d'éliminer les matières organiques solubles qui, pendant la calcination, se boursoufleraient, et les composés à base de potasse et de soude en dissolution dans les sucs, qui, laissant des carbonates alcalins, pourraient réagir sur la silice.

On fait ensuite dessécher le plus possible sur des lames de platine, dans la position où l'on veut observer les tranches; on soumet alors à l'incinération en chauffant les lames jusqu'au rouge. Après avoir laissé refroidir, on observe d'abord les substances incinérées, comme corps opaques. La planche VII, figure 5, montre l'aspect, observé par réflexion, du squelette siliceux et calcaire obtenu après l'incinération d'une tranche très-mince du *Ficus elastica*.

Dans la figure 6, on voit l'aspect de l'une des concrétions et portions de tissu du *Ficus carica* incinéré.

Si l'on enlève avec soin ces tranches brûlées, et qu'on les place sur des lames de verre, on pourra les observer par transmission.

Les concrétions rendues opaques par le carbonate de chaux et les gaz interposés paraîtront noires comme dans la figure 5 *bis*, qui représente la concrétion du *Ficus elastica*, et dans la figure 8, représentant une cellule d'*Arum colocasia*, remplie de raphides calcinées.

On fait arriver alors un courant d'acide chlorhydrique très-faible, afin d'éliminer le carbonate calcaire et de mettre à nu la silice. La chaux et le carbonate se dissolvent, et l'on aperçoit, comme l'indiquent les figures, les squelettes des couches épidermiques, et même de légères membranes qui constituaient le tissu spécial pédicellé des concrétions renfermées dans une cellule du *Ficus carica* (voyez figure 6 *bis*). Le squelette siliceux d'un poil des feuilles du même figuier est dessiné figure 7; les fragments de tissu, 5 *ter* et 5 *quater*, extraits de la concrétion 5^{e} du *Ficus elastica*, offrent une nouvelle preuve de son organisation intérieure. On voit dans la même planche un squelette siliceux et calcaire d'une portion du tissu de l'*Equisetum hyemale*, figure 9.

Lorsque l'on veut constater seulement qu'une feuille renferme de la silice dans l'épaisseur des parois de ses membranes, et particulièrement dans les couches épidermiques, sans avoir à retracer certains détails de son organisation, on la fait dessécher à l'étuve, on la brûle dans une capsule de platine chauffée au rouge, on lave à l'eau acidulée, on achève l'incinération en faisant de

nouveau chauffer au rouge après avoir humecté avec de l'acide azotique concentré, puis on observe au microscope le squelette siliceux.

Les membranes du *Chara translucens* sont fortement incrustées de silice; il y en a moins dans le *Chara hispida*, beaucoup moins encore dans le *Chara vulgaris*, où cependant nos procédés démontrent encore la position qu'elle occupe, si l'on observe attentivement le squelette très-rétréci qui reste après l'incinération et après la réaction des acides.

La silice se rencontre non-seulement dans l'épaisseur des parois des poils de la cuticule et des cellules épidermiques, mais aussi dans les tissus intérieurs des feuilles, où elle incruste les cellules : ses proportions sont plus faibles, tandis que les quantités de carbonate calcaire résultant de l'incinération sont généralement plus fortes, et rendent l'observation difficile au point que, malgré toutes les précautions que nous avons indiquées, il ne reste souvent des cellules du parenchyme que des traces siliceuses à peine discernables.

PROPORTIONS DES MATIÈRES INORGANIQUES FIXÉES DANS LES TISSUS VÉGÉTAUX, ET APPLICATIONS RELATIVES AUX AMENDEMENTS.

Depuis les travaux de Davy, on a parfois attaché trop d'importance à la composition chimique des sols; les expériences ingénieuses et exactes faites par de Saussure, ainsi que les faits recueillis par Thaër, ont en effet prouvé que les substances inorganiques sont fournies surtout par les engrais à l'état de dissolution qui convient pour qu'elles soient absorbées par les plantes.

Plusieurs savants chimistes et physiologistes, en adoptant cette opinion, ont considéré les substances minérales qui composent les sols comme utiles presque exclusivement par leurs propriétés physiques, si importantes d'ailleurs et si bien étudiées par Schubler; ceux-ci de leur côté sont allés trop loin sans doute.

On a enfin assez généralement admis que les substances inor-

ganiques puisées par toutes plantes, en proportion des quantités de liquide aspirées, se déposent dans leurs tissus suivant les lois physiques de l'évaporation. Ces préceptes, introduits dans la physiologie végétale, doivent encore être rectifiés : cela résulte des observations directes que nous avons exposées plus haut, sur la distribution de plusieurs de ces substances, soit dans l'épaisseur même des membranes, soit dans les méats intercellulaires, soit même dans des tissus spéciaux situés à l'intérieur ou à la périphérie des plantes, soit enfin dans des organes pédicellés, disposés pour les recevoir.

Nous allons démontrer maintenant, par une autre voie, que les propriétés d'absorption diffèrent très-notablement entre certaines plantes.

Et d'abord, je dois rappeler ici que M. Berthier avait déduit, de ses résultats relatifs à la composition des cendres de différents bois, des conclusions analogues à celles qui découlent de mes observations au microscope et des analyses suivantes. L'opinion de M. Berthier ne fut cependant pas admise par les auteurs des ouvrages classiques de physiologie végétale. Les réflexions qui suivent sont extraites du mémoire de M. Berthier.

« Les cendres des bois de même espèce, crus dans des terrains qui ne sont pas de même nature, diffèrent notablement, ce qui prouve que le sol a de l'influence sur leur composition.

« Si l'on examine, au contraire, les cendres de végétaux crus dans le même terrain, on trouve que, quand les espèces ont de l'analogie, les cendres ont beaucoup de rapports entre elles; que, quand les végétaux sont de genres très-différents, les cendres sont aussi très-différentes.

« D'où il faut conclure que les plantes choisissent dans le sol les substances qui leur sont le plus propres.

« Aussi voit-on le bouleau d'Orléans, le châtaignier et l'aulne d'Allevard, venus dans un sol argileux et pierreux, donner des cendres très-chargées de chaux, tandis que la cendre du froment

de Puiselet n'en contient presque pas, quoiqu'il soit cultivé dans un sol calcaire.

« Enfin, ce qui achève de prouver que les substances qui sont fournies par le sol aux végétaux sont choisies par ceux-ci conformément à leur organisation et à leurs besoins, c'est que ces substances sont réparties d'une manière fort inégale dans les différentes parties d'un même végétal.

« Ainsi, pour les grosses branches de chêne, les cendres contiennent 15 pour o/o de leur poids de sels alcalins, et les cendres de l'écorce n'en renferment que 5; la cendre de froment se compose presque uniquement de silicate de potasse, et les grains ne contiennent presque que du phosphate de chaux. »

Ces faits s'accordent encore avec l'opinion suivante, émise par M. Thénard dans son traité de chimie : « L'influence du sol sur les végétaux n'est pas due tout entière à sa température, à l'eau et aux engrais qu'il contient, elle provient encore des sels qui entrent dans sa composition. »

Voici maintenant le tableau des résultats que nous avons obtenus, en déterminant les principales matières inorganiques sécrétées par des portions bien vivantes de divers végétaux.

DÉNOMINATION.	POIDS EMPLOYÉ.	POIDS après DESSICCATION.	REPRÉSENTÉS EN CENTIÈMES. SUBSTANCE HUMIDE.	SUBSTANCE SÈCHE.			
			Eau.	Cendre.	Sels solubles dans l'eau.	Sels de chaux et magnésie, équivalent en carbonates.	Résidu insoluble siliceux.
TIGES ET RAMEAUX.	gramm.	gramm.					
Chara translucens.....	8,220	3,942	52,04	27,20	6,50	6,35	13,85
—— *vulgaris*.....	12,930	9,964	22,93	50,70	8,70	41,90	0,10
—— *hispida*.....	11,350	8,290	26,96	57,70	3,30	53,80	0,60
Prêle, *Equisetum hyemale*....	5,045	1,695	66,44	15,00	2,20	4,00	8,80
—— *limosum*.....	8,610	2,623	69,53	22,20	5,00	7,00	10,20
—— *fluviatile*....	6,503	2,173	66,58	26,40	8,90	6,50	11,00
Salsola kali.....	3,007	0,883	70,63	10,80	6,20	4,55	0,05
Glaciale (*Mesembrianthemum cristallinum*).....	24,285	1,735	92,85	34,50	28,20	5,30	1,00
Incrustation d'un *Cactus peruvianus*.....	0,942	0,920	2,33	48,76	1,09	47,67	traces.
FEUILLES AVEC LEURS PÉTIOLES.							
des Graminées d'une prairie naturelle.....	19,870	2,505	87,41	13,50	7,90	3,30	2,30
—— —— de Maïs.....	12,090	2,893	76,07	9,80	4,30	2,20	3,30
—— —— de *Canna edulis*...	9,252	1,770	80,86	9,30	1,50	7,00	0,80
—— —— de Betterave blanche.....	55,843	5,703	89,78	10,90	4,80	6,00	0,10
—— —— de Betterave blanche mûre.....	//	//	//	19,40	7,50	11,40	0,50
—— —— de Sarrasin.....	5,130	0,686	86,62	23,20	4,00	18,60	0,60
—— —— de *Sol. tuberosum*..	16,812	2,231	86,72	21,50	7,70	13,00	0,80
—— —— de Houblon.....	6,172	1,728	72,00	19,20	1,60	8,50	9,10
—— —— de Chanvre.....	6,513	2,122	67,38	32,20	3,20	26,30	2,70
Feuilles de *Broussonetia p*....	19,250	4,287	77,72	17,90	3,20	11,60	3,10
—— de Mûrier.....	5,055	1,411	72,09	16,40	5,60	8,80	2,00
—— de *Ficus elastica*.....	15,642	4,659	70,21	10,20	2,50	7,20	0,50
—— de *Ficus carica*.....	13,815	4,146	69,98	12,30	2,40	8,60	1,30
—— de Vigne.....	6,502	1,487	77,13	11,20	2,80	5,90	2,50
—— de Peuplier.....	5,480	2,008	63,35	12,30	5,00	6,30	1,00
—— d'Acacia.....	5,483	1,990	63,70	8,00	2,56	5,40	0,04
—— d'Orme.....	3,705	1,798	51,47	13,50	3,50	7,10	2,90
—— de Marronnier d'Inde.	6,085	2,825	53,57	11,40	2,20	8,50	0,70
—— d'*Aucuba japonica*...	7,748	2,301	70,30	12,30	3,50	8,10	0,70

En comparant entre eux les résultats numériques contenus

dans ce tableau, on voit encore que des plantes différentes placées dans des circonstances semblables fixent dans leurs tissus des substances inorganiques en proportions très-inégales.

Ainsi, par exemple, le *Chara translucens*, végétant dans les mêmes eaux que le *Chara hispida*, absorbe 23 fois plus de silice et 8 fois moins de carbonate de chaux; tandis que les prêles, qui infiltrent dans leurs tissus des proportions de silice plus fortes que la plupart des autres plantes, diffèrent peu entre elles, relativement aux quantités de silice et de chaux fixées.

Parmi les plantes herbacées en culture dans un même terrain, on remarquera des analogies et des différences notables sous ces rapports.

Le maïs et les graminées d'une prairie naturelle contenaient, dans des proportions très-rapprochées, la silice et les sels de chaux et de magnésie : en moyenne 2,75 de l'une et 2,80 des autres, tandis que la moyenne des sels calcaires contenus dans les cendres des feuilles de sarrasin, pommes de terre et chanvre s'élève à 19,3 pour o/o, c'est-à-dire à 7 fois davantage.

Les plantes ligneuses offrent des différences non moins remarquables. Ainsi, réunissant les proportions rapprochées des sels calcaires trouvés dans les cendres des feuilles de vigne, de peuplier et d'acacia, on voit que la proportion moyenne des sels calcaires est égale à 0,0576; tandis que, pour trois autres plantes, le mûrier noir, le marronnier d'Inde et le *Broussonetia papyrifera*, la moyenne est représentée par 0,0963, c'est-à-dire par une quantité presque double.

Une différence fort remarquable existe encore entre les quantités et la nature des cendres de deux plantes analysées, tiges et feuilles réunies : en effet, le *Mesembrianthemum cristallinum* sec a donné 0,345 de cendres contenant 0,282 de sels solubles, tandis que le *Salsola-kali* a laissé seulement 0,108 de cendres ne renfermant que 0,062 de salin.

L'ensemble des faits ci-dessus exposés me porte à croire que la théorie rationnelle des amendements, loin de recommander

l'emploi exclusif des substances minérales qui, comme les sables purs et les marnes, ont pour effet principal de changer la constitution physique du sol, montrera les avantages des amendements très-divisés, susceptibles d'être dissous facilement et absorbés par les plantes, d'agir sous un volume peu considérable, et de produire des effets non moins évidents que ceux du plâtre.

Considérés de cette manière, les amendements peuvent être en grande partie fournis par les débris végétaux [1], les fumiers et terreaux qui, dans leurs altérations spontanées, cèdent, non-seulement les produits de la substance organique décomposée, mais encore de la silice et des sels calcaires très-divisés, ainsi que des sels solubles. Les débris animaux répandus sur la terre y laissent une partie du phosphate de chaux que l'on retrouve dans les tissus des plantes.

On ne saurait douter non plus que la consommation annuelle de 10 millions de kilogrammes des résidus de noir animal, naguère perdus, aujourd'hui payés un haut prix et si bien utilisés, ne dût exercer une heureuse et durable influence sur l'agriculture des contrées où on l'emploie, par le phosphate de chaux qu'elle laisse dans ces terrains pauvres en engrais, provenant des détritus d'animaux [2].

On doit ranger encore, dans la classe des amendements actifs la chaux hydratée, qui réunit sur le sol plusieurs conditions favorables à la végétation; une légère réaction alcaline, la désagrégation des menus débris organiques, et la présence du carbonate de chaux, formé lentement dans un état de division qui permet aux eaux naturelles de le dissoudre à la faveur d'un excès d'acide carbonique.

[1] C'est ainsi que la végétation, en ramenant à la superficie de la terre, chaque année, par la chute des feuilles et des tiges, les solutions organiques et inorganiques puisées à différentes profondeurs par leurs racines, empêche de grandes déperditions des liquides infiltrés et entretient la fertilité du sol.

[2] Le noir animal des raffineries, dont le poids et le volume sont accrus d'environ 50 centièmes par le sang des clarifications, revient à 9 ou 10 francs l'hectolitre aux agriculteurs approvisionnés par le cours de la Loire. Malgré ce prix élevé, il constitue encore l'une des principales sources de la prospérité agricole de plusieurs départements de l'Ouest.

Les observations les plus concluantes prouvent les prodigieux effets de la chaux dans la grande culture; mais il importe beaucoup de distinguer son action, qui excite et soutient l'activité végétative de celle des substances organiques destinées à nourrir les plantes, à fournir surtout la matière azotée, presque partout trop rare, et pourtant indispensable au développement de tous les jeunes organes végétaux. Un bon agriculteur doit toujours songer à la fois aux amendements et aux engrais, qui doivent s'entr'aider, non se remplacer [1].

Certains amendements agissent en modifiant la constitution chimique et physique du sol, et fournissent, en outre, aux plantes une matière organique assimilable : telle est la tangue, composée d'un sable siliceux incrusté de carbonate de chaux très-fin, contenant une matière organique azotée [2].

Les détritus de diverses incrustations animales, appelés *merle* à Morlaix et Landernau, sont plus riches encore en matière azotée et substance calcaire; ils rendent de grands services à l'agriculture du Finistère.

Afin d'essayer de résoudre, au point de vue de l'utilité pratique, les questions encore indécises relatives à l'influence de la composition chimique du sol et des amendements sur l'agriculture, il conviendrait de marcher encore vers ce but par la double voie expérimentale : l'observation directe de la distribution des substances inorganiques dans les tissus, et la comparaison des quantités que fixent les différentes plantes, en choisissant d'ailleurs celles qui auraient développé, dans de grandes cultures, une végétation forte et productive; déterminant, enfin, la compo-

[1] Le voisinage des dépôts d'anthracite a rendu plus économique la préparation de la chaux dans la Mayenne, et étendu beaucoup son emploi dans l'agriculture. La quantité fabriquée en 1835 représentait une valeur de 1,056,000 francs. La préparation de la chaux dans le Calvados a produit la même année une valeur de 1,590,816 francs.

[2] Le transport seul de la tangue dans le département de la Manche coûte par année plus d'un million de francs; il a occasionné l'amélioration de la plupart des routes du département. On exploite aussi la tangue dans le Calvados, à l'embouchure de la Vire, d'où elle est transportée jusqu'à quinze lieues dans les terres.

sition chimique du sol correspondant, et tenant compte des substances minérales le plus facilement attaquables par les liquides naturels et les organes des plantes.

On peut espérer que ces observations, répétées sur plusieurs terrains, feront connaître les plantes susceptibles de bien profiter de certains amendements et stimulants: celles qui, récoltées en vert, enlèveraient le plus de la substance utile à leur constitution; enfin, pour les sols pauvres en carbonate de chaux, les plantes qui succéderaient le plus avantageusement à des cultures épuisantes sous ce rapport.

Les résultats consignés dans ce mémoire me semblent fournir déjà des données positives sur les dispositions de certains végétaux à puiser les substances minérales favorables à leur développement dans le sol, les amendements ou les engrais.

COMPOSITION

DE L'ÉPIDERME DES VÉGÉTAUX ET DE LA CUTICULE ÉPIDERMIQUE.

Nous avons vu dans le travail précédent que les membranes ou tissus formant la couche superficielle des végétaux diffèrent des autres tissus en ce que leurs parois sont injectées de silice, souvent en très-fortes proportions; sous ce rapport, la cuticule épidermique, anatomiquement distincte, ainsi que l'a démontré M. Ad. Brongniart, est caractérisée encore par sa composition chimique et par des propriétés remarquables que nous exposerons plus loin.

Il en est de même des poils développés à la surface des feuilles, de certaines tiges et des fruits, tandis que la membrane des poils renfermés dans l'enveloppe des graines du cotonnier est composée de cellulose presque pure.

Une autre propriété caractéristique des membranes developpées avec le contact de l'air se manifestait en présence de l'iode : tou-

jours, en effet, dans les tranches des feuilles de diverses plantes, et des tiges de tous les cactus examinés, l'addition d'une solution d'iode a déterminé la coloration en jaune-orangé de ces parties superficielles, coloration que ne détruisait pas, que rendait plus intense, au contraire, l'acide sulfurique; tandis que les membranes sous-épidermiques ou sous la cuticule, dans les mêmes circonstances, étaient désagrégées, colorées en bleu-violet[1], puis totalement dissoutes. Les poils des graines du cotonnier, développés à l'abri de l'air et de la lumière, offraient aussi les phénomènes de coloration en bleu et de dissolution propres à la cellulose; leur superficie n'était que partiellement et irrégulièrement recouverte de substances organiques azotées. Sur certaines feuilles, les poils, lorsque surtout ils sont venus en grand nombre et rapidement, sont recouverts d'une cuticule continue; mais la couche membraneuse sous-jacente est de nature différente. En effet, la cuticule de ces poils se colore en jaune-orangé par l'iode, et l'addition de l'acide sulfurique fonce cette teinte; mais peu à peu l'acide pénètre dans l'intérieur du poil; il gonfle la cellulose, détermine la rupture de la cuticule, et la cellulose désagrégée paraît avec sa coloration bleue spéciale.

Ce curieux phénomène présente un très-joli aspect lorsqu'on soumet à l'expérience une tranche perpendiculaire aux faces d'une feuille de *Convolvulus Cneorum*. Les poils, très-multipliés sur les bords de la coupe, deviennent jaune-orange par la solution d'iode; l'acide sulfurique concentré fonce cette couleur; puis tous les poils se déchirent, leur cuticule se replie, tandis que la cellulose sous-jacente apparaît bleue et gonflée[2].

[1] Voyez les figures 12 de la planche I^re^, 7 de la planche V, 9 de la planche III, etc.

[2] Dans cette expérience sur les feuilles de *Convolvulus Cneorum*, on peut remarquer, 1° la coloration violette qu'acquiert directement par l'iode la membrane enveloppant chacun des granules verts renfermés dans les cellules cylindroïdes du parenchyme, ce qui montre qu'elle se compose de cellulose peu agrégée, comme dans les feuilles d'orangers, dans certains lichens, etc. etc. 2° que la plupart des cellules du parenchyme, presque sans adhérence entre elles, se disloquent par l'interposition de l'eau; 4° que la membrane des cellules, désagrégée par l'acide sulfurique, bleuit par l'iode, tandis que l'épiderme résiste avec sa coloration jaune.

La coloration jaune-orangé indiquait la présence d'une matière organique azotée, qui eût été, comme la silice, injectée dans toutes les membranes superficielles en question, et qui eût contribué à les rendre plus résistantes, en leur donnant une cohésion plus forte.

Il me parut fort important de vérifier ces hypothèses, et, dans dans cette vue, je crus devoir déterminer la composition élémentaire, sous le rapport de l'azote, de l'épiderme de plusieurs parties des végétaux, et plus tard de l'épiderme d'une même plante à différents âges.

On verra comment les résultats obtenus concurremment avec l'observation des phénomènes produits sous le microscope, me conduisirent à entreprendre de séparer, dans certains épidermes, la cuticule de la couche épidermique sous-jacente, afin d'analyser séparément chacune de ces deux parties.

Les analyses directes furent faites sur les épidermes faciles à enlever, 1° des grandes feuilles d'*Agave americana;* 2° des *tubercules de pomme de terre;* et 3° des tiges de *Cactus peruvianus.* Ces épidermes, épurés avec soin, mécaniquement et par des lavages, puis desséchés à 100° dans le vide, donnèrent des proportions très-notables d'azote, tandis que les cellules sous-jacentes renferment bien dans leur cavité des substances azotées, mais n'en contiennent pas des quantités appréciables dans l'épaisseur de leurs parois. Voici les détails des analyses :

1° ÉPIDERME D'UNE FEUILLE D'*AGAVE AMERICANA.*

Poids de la substance employée pour l'analyse, divisée puis desséchée à + 100° dans le vide 1,158 (cendres déduites = 1,110).

Gaz obtenu	15cc.
Pression	= 0,766
Température	+ 23°

D'où l'on tire, pour 100 parties en poids de la matière analysée, azote = 1,471, ou 1,545 pour 100 de la substance organique.

2° ÉPIDERME DES POMMES DE TERRE DITES *PATRAQUES JAUNES*.

Poids de la matière divisée et séchée à 110° dans le vide = 443 milligrammes.

Gaz azote obtenu	$8^{cc},12$
Pression barométrique	761
Température	+ 21°

La quantité de substance inorganique était de 14 pour 100[1], d'où l'on tire les proportions d'azote en poids :

Pour 100 de matière sèche	= 2,09
Et pour 100 de matière organique	= 2,42

3° ÉPIDERME D'UNE TIGE DE JEUNE CACTUS, POUSSE D'UN AN.

Divisé et desséché à 110° dans le vide.

Poids de la substance sèche employée pour l'analyse = 445 milligrammes; pour 100 parties, cet épiderme sec laissait après l'incinération 8,8 de matière inorganique.

Gaz obtenu	$7^{cc},26$
Pression	= 76,15
Température	+ 19° c.

D'où l'on tire, en calculant sur ces nombres, les proportions suivantes d'azote en poids pour 100 :

Épiderme sec	1,878
Substance organique	2,059

4° ÉPIDERME D'UNE TIGE DE *CACTUS PERUVIANUS* ÂGÉ DE DEUX ANS.

Poids de la substance sèche employée pour l'analyse, 523 milligrammes. L'incinération de cette substance a donné 12 de cendres pour 100.

Gaz azote obtenu	= $3^{cc},62$
Pression barométrique	= 77,3
Température	+ 19°

Les proportions d'azote en poids sont donc :

[1] Les cendres étaient blanches.

Pour 100 de substance sèche..... = 0,808
Pour 100 de matière organique..... = 0,916

La composition de ce dernier épiderme différait beaucoup de celle des épidermes des pommes de terre et de la tige du cactus âgé de deux ans; l'examen au microscope pouvait expliquer ces différences : en effet, l'épiderme des pommes de terre se composait d'un tissu à plusieurs rangées superposées de cellules longues, *rectangulaires*, minces, dont toutes les parois se coloraient en jaune orangé par l'iode; il paraissait donc très-probable que toutes leurs membranes étaient injectées de substance azotée.

L'épiderme du *Cactus peruvianus* de deux ans offrait un tout autre aspect. Sa cuticule externe seule était colorable en jaune-orangé par l'iode, comme cela se remarque pour d'autres cactus; tandis que les membranes des cellules épidermiques sous-jacentes étaient fort épaisses, ne se coloraient pas sensiblement par l'iode, et se désagrégeaient par l'acide sulfurique concentré, qui déterminait aussitôt en présence de l'iode la belle teinte bleu-violet caractérisant la cellulose non injectée de substance à composition quaternaire; enfin ces cellules ne renfermaient que de petites masses de substance azotée molle dans leurs cavités libres.

On pouvait donc comprendre la différence de composition sous le rapport de l'azote entre cet épiderme, dont la cuticule seule était injectée, et l'épiderme de pomme de terre dont toutes les membranes étaient injectées de la substance colorable en jaune.

L'observation microscopique rendait compte aussi de la plus grande abondance d'azote dans l'épiderme du jeune cactus; car, au-dessous de la cuticule, les membranes épidermiques de cellulose pure étaient bien moins épaisses dans cet épiderme, et renfermaient, d'ailleurs, dans les cavités des matières azotées plus abondantes. On pouvait donc admettre que la proportion plus faible de cellulose dans la masse totale avait dû augmenter l'influence de la cuticule et des autres corps azotés dans l'analyse, et par conséquent le produit en azote.

Ce n'était pas, toutefois, une démonstration évidente. Pour obtenir celle-ci il eût fallu connaître la composition de la cuticule isolée du tissu épidermique sous-jacent, et même la composition de celui-ci.

Les réactions microscopiques si nettes qui caractérisent la partie externe des tissus épidermiques appartenant aux cactus, ont fait naître la pensée de diviser en deux, dans son épaisseur, cet épiderme, afin d'analyser séparément la couche superficielle ainsi devenue distincte, et de comparer sa composition avec celle de sa couche épidermique sous-jacente.

Voici comment je suis parvenu à réaliser ce projet : l'épiderme d'une tige de deux ans d'un *Cactus peruvianus* ayant été enlevé avec précaution, puis bien lavé et complétement débarrassé de quelques parties adhérentes du tissu verdâtre en raclant sa face interne et le soumettant a de nouveaux lavages, fut immergé dans une solution aqueuse, saturée d'iode durant quarante-huit heures. La cuticule éprouvait ainsi une contraction que je rendis plus forte en même temps que les cellules épidermiques épaisses étaient dilatées par une immersion et un séjour de quarante-huit heures dans de l'acide sulfurique étendu de son volume d'eau.

Alors, d'une part, la contraction de la cuticule, et de l'autre, le gonflement de la cellulose libre, avaient détruit ou considérablement diminué l'adhérence entre ces deux parties, de telle façon que, après avoir lavé les grandes lames de l'épiderme ainsi préparé, il fut aisé d'enlever, par le frottement d'un tranchant de couteau, la cuticule jaunie, l'épiderme mouillé étant appliqué sur une glace bien plane, posée sur une feuille de papier blanc. Cette opération était facile à suivre dans ses progrès, car la coloration jaune disparaissait en même temps que la pellicule, laissant incolore la lame épidermique dépouillée.

Les deux parties, ainsi extraites, furent plongées, chacune à part, dans une solution de bi-carbonate de soude, puis lavées à l'eau distillée jusqu'à épuisement.

Desséchées, alors elles ont donné à l'analyse les résultats suivants :

5° CUTICULE ÉPIDERMIQUE.

Séchée dans le vide à 110° centésimaux;
Poids de la substance employée, 222 milligrammes;
Contenant pour 100 parties en poids 5,6 de matière inorganique.

Volume du gaz obtenu	5^{cc}
Pression atmosphérique	760^{m}
Température	+ 18°

En calculant d'après ces nombres ont trouve :

Pour 100 parties en poids de la substance sèche, azote	2,597
Pour 100 parties en poids de la matière organique, *id.*	2,751

On voit que cette composition se rapprochait beaucoup de celle de l'épiderme des pommes de terre dont toutes les membranes, colorables en jaune comme cette cuticule, offraient en effet les mêmes caractères dans les observations microscopiques.

L'autre partie de l'épiderme devait être beaucoup moins riche en azote que la cuticule; elle devait même en contenir moins que l'épiderme entier. Tel fut effectivement le résultat de son analyse, dont les détails suivent :

6° TISSU ÉPIDERMIQUE DÉPOUILLÉ DE SA CUTICULE.

Poids de la substance employée, divisée à la râpe et desséchée à 110° dans le vide, 655 milligrammes.

Volume de gaz azote obtenu	$1^{cc},12$
Pression atmosphérique	74,96
Température	+ 20°

L'incinération donna un résidu incombustible de 18 pour 100.
On tire de ces nombres :

Pour 100 en poids de la substance sèche, azote	0,192
Pour 100 en poids de la matière organique, *id.*	0,234

Ainsi donc, l'épiderme avait réellement été divisé en deux

parties bien distinctes par leurs propriétés comme par leur composition chimique : l'une, fortement injectée de matière azotée et de silice, se colorant en jaune-orangé par l'iode, résistant à l'acide sulfurique, la cuticule, en un mot, contenait pour 100 parties de la matière organique 2,75 d'azote, tandis que le tissu épidermique sous-jacent se composait de cellules à parois épaisses, non injectées de substance azotée, non colorables en jaune par l'iode, désagrégées par l'acide sulfurique qui déterminait la coloration bleue, ne renfermant dans leurs cavités que de faibles proportions de substances molles quaternaires; cet épiderme enfin, dépouillé de sa cuticule, ne donnait à l'analyse que 0,234 d'azote, c'est-à-dire moins que la dixième partie de la quantité contenue, à poids égal, dans la cuticule.

Quoique l'acide sulfurique eût été étendu de son volume d'eau, il avait dissous une quantité sensible de cellulose, et un peu de matière azotée. D'ailleurs, attaquant un sel calcaire dans l'épaisseur des parois des cellules de l'épiderme, il avait formé du sulfate de chaux que le carbonate de soude avait ensuite transformé en carbonate, en sorte que la matière inorganique s'était trouvée accrue relativement à la substance organique, puisque le poids de celle-ci avait diminué.

Voulant essayer d'approcher plus près de la composition réelle des deux parties de l'épiderme, je répétai la préparation anatomique ci-dessus indiquée, en faisant réagir sur un épiderme semblable l'acide sulfurique qui avait servi pour la première expérience; cet acide, étant moins fort et déjà un peu chargé de matière organique, devait moins attaquer le nouveau tissu soumis à son action. La durée du contact fut réduite de 48 heures à 12 heures seulement; enfin, les deux parties de l'épiderme furent lavées jusqu'à épuisement avec l'eau pure, sans saturation préalable par le carbonate de soude : les résultats des analyses furent, malgré toutes ces modifications, conformes aux conclusions précédentes, en tenant compte de la quantité plus faible de cellulose attaquée.

7° Analyse de la cuticule épidermique d'un *Cereus peruvianus* (tige de deux ans).

Le poids employé de la substance séchée à 110° dans le vide était égal à 209 milligrammes. Cette substance donnait par l'incinération 3,6 pour 100 de cendres.

On obtint :

Gaz azote		$3^{cc},75$
Pression	=	739
Température	+	18°

D'où l'on déduit la composition en centièmes :

Pour 100 de la substance desséchée	=	2,012 d'azote.
Et pour 100 de la matière organique		2,086

8° Analyse de l'épiderme.

Dépouillé de la cuticule ci-dessus, desséché à 110° dans le vide, et laissant après l'incinération 13,6 de substance inorganique.

Matière employée	=	756 millig.
Gaz obtenu		$1^{cc},75$
Pression	=	764
Température		16,75

D'où l'on déduit :

100 en poids de ce tissu épidermique sec contiennent	0,271 d'azote.
100 en poids de sa substance organique	0,313

Ainsi donc la cuticule, d'après ces dernières analyses, contiendrait environ sept fois plus d'azote que le tissu épidermique sous-jacent, et l'analyse, dans toutes ces expériences, s'accordait avec les indications des phénomènes observés sous le microscope, indications que l'on remarquera dans les dessins à la fin de ce mémoire.

Planche I^re^ figure 12, en b' b'', on voit la cuticule de l'enveloppe adhérente au fruit du blé colorée en jaune par l'iode; elle

résiste, sans que sa couleur change, à l'acide sulfurique, tandis que le tissu sous-jacent est disloqué, coloré en bleu, puis dissous par le même acide.

Planche II. La 3e figure montre, par sa coloration orangée sous l'influence de l'iode, puis de l'acide sulfurique, la cuticule de l'épiderme du *Ficus elastica*, tandis que les cellules du tissu épidermique sous-jacent, en présence des mêmes réactifs, se désagrégent et se colorent en bleu, puis se dissolvent.

Planche III. La cuticule est indiquée avec ses prolongements correspondant aux intervalles, entre les cellules sous-jacentes, dans les figures 1 et 3, des coupes d'une feuille du *Juglans regia;* 4, sur une feuille de *Parietaria officinalis;* 6, coupe d'une feuille de *Morus nigra;* 7 et 8, sur les deux faces d'une feuille de *Ficus reclinata;* 9 et 10, sur des feuilles de *Citrus* et *Limonia*. La teinte jaune-orangé communiquée par l'iode sur la cuticule, figure 9, la fait plus aisément distinguer.

Les figures de la planche IV indiquent la cuticule des épidermes des feuilles de *Conocephalus naucleiflorus*, fig. 1; *Ficus ferruginea*, fig. 7; *Ficus carica*, fig. 12 et 12 *ter*, et *Ficus laurifolia*, fig. 13 et 14.

On voit encore les indications de la cuticule épidermique dans la figure 7 de la planche V, où sa coloration jaune persistante après l'action de l'acide sulfurique la caractérise. Les figures 8 et 9, même planche, montrent la cuticule des feuilles de *Ficus elastica* et *Ficus benghalensis*. On la voit, planche VI, sur les feuilles de *Polypodium irioïdes*, figure 3; de *Piper colubrinum*, figure 4; de *Ficus nymphæi folia*, figures 10, 11 et 12, etc.

Dans le *Cereus nycticalius*, la cuticule se présente plissée sur toute la superficie de la plante; dans le *Cactus microdasys*, la cuticule épaisse est toute hérissée de poils plus ou moins courts et roides, dont les bases élargies se touchent. J'ai vérifié sur tous ces échantillons les propriétés caractéristiques de la cuticule.

On retrouve encore la cuticule par le squelette siliceux retenant toutes ses formes, après l'incinération, comme on peut le voir figure 7, planche VII.

Nous retracerons ici, dans un tableau synoptique, les résultats des analyses précédentes.

TABLEAU DE LA COMPOSITION DES ÉPIDERMES, DE LA CUTICULE ET DU TISSU ÉPIDERMIQUE NON INJECTÉ, DÉPOUILLÉ DE LA CUTICULE.

SUBSTANCES ANALYSÉES.	SUBSTANCE inorganique pour 100.	AZOTE POUR 100 de MATIÈRE sèche.	AZOTE POUR 100 de la MATIÈRE organique.	OBSERVATIONS.
Épiderme d'*Agave americana*.....	4,8	1,471	1,548	D'une très-grande feuille.
Épiderme de tubercule de pomme de terre.....	14	2,090	2,420	Dite *patraque jaune*.
Cuticule épidermique de *Cereus peruvianus* de deux ans.....	5,6	2,597	2,751	Extraite par le premier procédé.
Idem.....	3,6	2,012	2,086	*Idem* par le deuxième procédé.
Épiderme de *Cereus peruvianus* d'un an.....	8,8	1,878	2,059	Dont le tissu était moins épais.
Idem de deux ans.....	12	0,808	0,916	A cellules non injectées très-épaisses.
Tissu épidermique dépouillé de cuticule.....	18	0,192	0,234	De l'épiderme traité par le premier procédé.
Idem.....	13,6	0,271	0,313	*Idem* extrait par le deuxième procédé.

On a vu plus haut que l'injection d'une substance azotée dans les membranes ne se borne pas toujours à l'épaisseur de la cuticule, que souvent, au contraire, elle envahit toutes les parois des cellules de l'épiderme; que même elle s'infiltre parfois dans plusieurs couches superposées de cellules épidermiques : c'est ce qui arrive notamment dans l'épiderme des tubercules des pommes de terre. Ainsi, c'est bien dans les portions périphériques, à la superficie des tissus végétaux, que cette infiltration d'une matière azotée dans la membrane végétale a lieu; mais elle y occupe une épaisseur variable. Tantôt la couche injectée est une pellicule, sorte de tunique générale plus mince ou plus

épaisse que la paroi des cellules sous-jacentes; tantôt l'infiltration occupe une rangée quelquefois même plusieurs rangées de cellules épidermiques superposées. Ce sont donc les parties des tissus exposées à l'air qui s'injectent ainsi; mais on ne saurait attribuer ce phénomène à un simple effet physique de l'évaporation par les superficies des plantes; c'est, au contraire, une de ces sécrétions non disposées au hasard, mais au contraire portées vers des régions spéciales, dans des proportions et une étendue qui dépendent, sans doute, de l'organisme des végétaux.

Un fait remarquable que j'ai constaté, c'est qu'en enlevant à la superficie d'une plante vivante ces tissus injectés, les membranes extérieures des tissus sous-jacents prennent, à leur tour, ces caractères épidermiques en s'injectant de matière azotée. Ce phénomène arrive même lorsque l'épiderme se détache spontanément, ainsi qu'on peut le voir sur un tubercule de pomme de terre près de son entier développement. L'épiderme altéré se détache en divers endroits et aux points correspondants; les cellules, si différentes dans leurs formes, acquièrent, dans leurs parois en contact avec l'air atmosphérique, la composition et les propriétés de l'épiderme ou de la cuticule épidermique.

Nous avons montré par un grand nombre de faits combien les membranes superficielles des plantes résistent à l'action de l'acide sulfurique, assez concentré, cependant, pour attaquer les membranes des tissus intérieurs. Des expériences, nombreuses aussi, nous ont appris que l'acide azotique, l'acide chlorhydrique, les alcalis caustiques, le chlore, attaquent tous les tissus végétaux avant de désagréger l'épiderme ou la cuticule épidermique.

L'expérience est curieuse et facile à faire, en employant une solution saturée à froid de chlorure de chaux : on plonge dans cette solution quelques filaments de coton, de chanvre, de lin; une lamelle d'épiderme de *Cereus peruvianus,* et quelques cellules sous-jacentes; on porte la température jusques à l'ébullition à deux ou trois reprises, et l'on voit toutes les membranes végétales brûler graduellement dans le liquide, leur carbone se combinant à

l'oxygène et formant de l'acide carbonique qui se dégage avec effervescence. Ces membranes se désagrègent par degrés, suivant qu'elles sont plus minces ou douées d'une plus faible cohésion. Les cellules du *Cactus* disparaissent des premières, puis les épaisses cellules épidermiques sont attaquées; en renouvelant deux fois la solution de chlorure et la chauffant à 100° chaque fois, toutes les membranes, excepté la cuticule, disparaissent; il reste un dépôt de carbonate de chaux qu'un peu d'acide acétique enlève. Si l'on examine alors sous le microscope la cuticule débarrassée du tissu épidermique sous-jacent, on reconnaît qu'elle est restée continue; il faudrait plusieurs traitements semblables pour l'entamer.

Une question importante pour l'organographie s'est alors offerte à ma pensée. La pellicule périphérique des tiges et des feuilles était-elle organisée à l'extérieur des végétaux phanérogames d'une manière continue, suivant avec uniformité les accroissements superficiels? ou bien se formait-elle au-dessus de chacune des cellules épidermiques, comme une sorte d'exsudation organisée, venant de l'intérieur et se soudant aux parties antérieurement formées? Cette dernière hypothèse me semble appuyée par les expériences suivantes, entreprises dans la vue de jeter quelque lumière sur cette difficile question.

Après avoir fait réagir le chlorure de chaux sur l'épiderme de *Cactus*, comme nous venons de le dire, si l'on traite par une solution de soude caustique et par des lavages à l'eau pure, on remarquera des dislocations dans la cuticule, et, sous le microscope, on verra que les parties se sont séparées en suivant les lignes de séparation qui correspondaient aux intervalles entre les cellules sous-jacentes. On augmentera ces effets de désagrégation en faisant arriver sur le porte-objet de l'iode, puis de l'acide sulfurique. On arrivera encore à produire les mêmes phénomènes en faisant bouillir l'épiderme dans l'acide azotique, lavant à l'eau, puis plongeant dans l'ammoniaque. Alors la cuticule, blanche jusque-là, prend une belle couleur jaune citrine; elle

est en plusieurs endroits disloquée; un léger frottement avec pression entre les lames de verre et l'addition de l'acide sulfurique rendent plus nombreuses ces dislocations, et comme la séparation a lieu généralement suivant la ligne de séparation des cellules sous-jacentes, précisément aux points du maximum d'épaisseur des saillies, il faut bien admettre que là aussi se trouve une sorte de soudure correspondant à la limite d'action de chaque cellule sous-jacente; que par conséquent la substance aurait été organisée sous une influence venue de l'intérieur de chaque cellule correspondante.

La cuticule, très-résistante encore dans ses morceaux séparés, laisse voir alors son organisation celluleuse, offrant en projection un réseau polygonal très-fin, discernable sous un grossissement de 600 à 900 diamètres.

Dans de semblables circonstances, tous le tissus végétaux ou animaux eussent été détruits.

Ainsi donc, cette sorte d'enveloppe protectrice des végétaux résiste plus que ne le pourrait faire aucune autre membrane des deux règnes aux divers agents chimiques capables d'altérer les corps organisés. Dès que cette enveloppe fait défaut en quelques points, elle est réparée par une production congénère, qui résulte elle-même d'infiltrations au travers ou dans l'épaisseur des parois extérieures des cellules dénudées.

Les faits nouveaux que nous venons d'exposer[1] permettront

[1] Au moment où l'impression de ces mémoires s'achève, il vient de paraître, dans les Annales des Sciences naturelles, t. IX, p. 201 (1843), des Recherches de M. H. Mohl sur la cuticule des plantes. Cette circonstance m'oblige de rappeler que la portion de l'un de mes mémoires qui se rapporte au même objet et indique les propriétés spéciales de la cuticule épidermique fut présentée, avec les figures coloriées, à l'Académie des sciences en 1840; que, dans le rapport sur ce mémoire par M. de Mirbel (comptes rendus 1841), il fut constaté qu'alors j'étais même parvenu à séparer et à analyser la membrane superficielle des végétaux découverte par M. Ad. Brongniart. Au surplus, les faits observés par M. Hugo Mohl présentent une nouvelle et heureuse confirmation de cette partie de mes propres recherches; et si j'ai pu, même avant M. Mohl, pousser plus loin l'étude de cette membrane, de ses développements et de sa composition élémentaire, je le dois aux moyens puissants que la chimie ajoute aux procédés de l'anatomie végétale.

de mieux comprendre comment ces immenses appareils de la nature végétale se défendent spontanément des influences atmosphériques, mieux souvent que ne le pourraient faire les êtres animés d'un autre règne, qui sont doués de la faculté de se mouvoir et de chercher des abris.

MÉMOIRE

SUR

LES DÉVELOPPEMENTS DES VÉGÉTAUX,

PAR M. PAYEN.

SIXIÈME MÉMOIRE.

FEUILLES DÉCRÉPITANTES, PANACHURES DES FEUILLES; FEUILLES AUTOMNALES; FORMATION, DÉVELOPPEMENTS ET OBLITÉRATION DES STOMATES.

Lorsque, grâces à l'obligeance de MM. les professeurs et chefs de culture du Muséum, j'allais chercher dans ce magnifique établissement de nombreux échantillons des plantes de serre et de pleine terre pour l'étude des concrétions minérales dans les feuilles, M. Neuman appela mon attention sur le phénomène curieux ci-après décrit dont il pouvait être intéressant de découvrir la cause. Les feuilles de l'*Aucuba japonica*, jetées sur le feu, font entendre une suite de petites explosions parfois très-bruyantes, et rien de semblable n'a lieu relativement à un grand nombre d'autres feuilles, dans les mêmes circonstances.

Je m'empressai de rechercher par quelques essais d'analyse immédiate s'il se rencontrerait dans ces feuilles un principe particulier doué de la propriété explosive.

Je trouvai dans leurs tissus plusieurs substances azotées, abondantes, solubles et insolubles dans l'eau et l'alcool; une huile

essentielle en quantité notable; deux matières grasses, dont une cristallise, par l'évaporation de l'éther, en longs prismes aiguillés, blancs, diaphanes; des matières colorantes solubles dans l'alcool; une substance brune dans les résidus lavés par les véhicules précédents et soluble dans l'ammoniaque; de la cellulose, de l'oxalate de chaux, un acide libre; divers sels à bases de chaux, de soude et de potasse; de la silice, etc. Aucun de ces produits, essayés, soit ensemble dans chaque extrait aqueux, alcoolique, éthéré ou ammoniacal, soit isolément, ne possédait la propriété en question.

Il me parut alors probable que certaines particularités dans la structure des feuilles d'*Aucuba* devaient occasionner les petites explosions.

Des observations très-attentives sous le microscope me mirent sur la voie des causes que je cherchais. On remarque facilement, d'abord, sous la face inférieure de ces feuilles, une grande quantité de gaz interposés entre les cellules, et plus particulièrement dans les parties du parenchyme qui correspondent aux taches blanchâtres ou d'un vert pâle dont le limbe est parsemé. L'épiderme est très-consistant sur toute la superficie, et la cuticule, fortement imprégnée de silice et de matière azotée, se colore en jaune foncé par l'iode, résiste à l'acide sulfurique, tandis que les membranes des cellules sous-jacentes sont colorées en bleu, se désagrégent et disparaissent.

Mais ce fut principalement la structure ou plutôt l'état particulier des stomates qui me parut devoir donner la clef du phénomène. Voici les dispositions qu'ils présentèrent sous le microscope, soit directement, soit à l'aide de quelques réactifs; et, d'abord, je dois dire que ces observations deviennent plus faciles lorsqu'on fait préalablement passer entre les lames de verre des courants d'ammoniaque, d'eau, d'alcool, d'éther, d'alcool et d'eau qui éliminent la plus grande partie des matières liquides ou molles, azotées, grasses, cireuses, colorantes, et rendent les coupes plus claires et plus transparentes, quelque minces qu'on

ait pu les obtenir d'ailleurs. On voit en P, planche VIII, un stomate et quelques-unes des cellules environnantes; dans chacune des deux cellules cylindroïdes courbes appartenant au stomate se trouvent un certain nombre de vésicules à contours irrégulièrement circulaires, que leur teinte jaune légère ne laisse pas nettement discerner, mais qui, se colorant en jaune-orangé par l'iode, sont alors contractés et très-visibles, comme l'indique la figure P'. On voit, sur cette deuxième figure, la cuticule colorée par le même réactif en jaune plus foncé sur les lignes où elle s'épaissit en s'enfonçant dans les intervalles entre les cellules épidermiques, laissant une apparence de soudure.

Mais ce qui, dans les deux figures, a surtout trait à la question, c'est l'oblitération plus ou moins complète du stomate par une membrane qui s'est développée sur la cuticule pénétrant dans l'ouverture, entre les cellules cylindroïdes courbes. Cette membrane est d'une nature analogue à la cuticule, injectée comme elle de substance azotée, se colorant en jaune-orangé par l'iode, résistant à l'acide sulfurique; cependant, lorsque celui-ci est assez concentré pour détruire les adhérences, on voit les stomates s'ouvrir et l'oblitération disparaître.

Ainsi donc, le fait principal que ces observations révèlent, c'est que les passages des vapeurs et des gaz dans les stomates sont considérablement rétrécis, presque entièrement obstrués: il en résultait que les liquides séveux introduits par les vaisseaux des nervures devaient s'accumuler dans une partie du parenchyme et y accroître la proportion d'eau, et que les intervalles remplis de gaz ou d'air sous l'épiderme de la face inférieure du limbe n'étaient pas en communication très-libre avec l'air extérieur. Or, ces intervalles aérifères devaient surtout acquérir une force expansive par une production de vapeur d'autant plus rapide lorsqu'on venait à jeter les feuilles sur le feu, que les sucs étaient plus aqueux; enfin, on pouvait encore conclure de ce qui précède qu'au moment de cette expansion subite l'épiderme de la face inférieure, attaché par un moins grand nombre de cellules

du parenchyme, devait le premier céder à la pression interne, être gonflé, puis occasionner, par sa rupture, chacune des explosions.

Ces conjectures furent pleinement justifiées par une des expériences les plus faciles à répéter. Je plaçai au-dessus d'une flamme de lampe à alcool la face inférieure du limbe d'une feuille d'*Aucuba japonica;* les petites explosions eurent lieu, et l'on put voir, sur une étendue plus ou moins grande, l'épiderme de la face inférieure soulevé et rompu; on mit sur la flamme la face supérieure d'une autre feuille, et ce fut encore l'épiderme de la face inférieure qui se souleva, puis fut déchiré avec explosion.

Lorsque les feuilles n'étaient pas fraîchement cueillies, les tissus superficiels, moins turgides ou flétris par l'évaporation, devenaient plus perméables, et la décrépitation, si elle avait lieu, était très-affaiblie.

D'ailleurs, l'explication devait conduire à trouver dans des conditions semblables réunies chez d'autres plantes la reproduction de phénomènes analogues. J'essayai cette sorte de vérification *a posteriori,* qui, comme on va le voir, réussit également. Voici quelles étaient, d'après les observations précédentes, les circonstances favorables : 1° l'oblitération des stomates; 2° la formation des espaces libres ou remplis de gaz où la vapeur d'eau pût déterminer une expansion rapide; 3° une résistance telle dans l'épiderme, qu'une pression assez forte fût nécessaire pour le rompre et produire les petites explosions.

J'ai trouvé, en septembre 1840, ces conditions réunies dans les feuilles consistantes, panachées ou tachetées, des plantes désignées ci-dessous :

Laurus nobilis. Ses feuilles, d'un vert prononcé, sont tachées par de larges bandes d'un jaune pâle, qui parfois envahissent la moitié de la surface du limbe. Dans ces portions jaunies, la plupart des stomates sont oblitérés par les développements du tissu cuticulaire; ils sont à peine entr'ouverts dans les portions colorées en vert. La cuticule, pénétrant jusqu'à l'intérieur des stomates,

était colorée en jaune-foncé par l'iode, et résistait à l'action de l'acide sulfurique.

Exposées au-dessus de la flamme de l'alcool, ces feuilles décrépitaient assez fortement. Après ces explosions, on remarqua l'épiderme de la face inférieure soulevé ou détaché sur des étendues plus ou moins considérables.

Buxus sempervirens. Ses feuilles colorées en vert offraient des bandes jaunes plus ou moins étendues; la plupart des stomates étaient presque complétement oblitérés. La cuticule pénétrant dans leur cavité et le tissu développé sur elle ont résisté à l'acide sulfurique, conservant leur coloration orangée acquise par l'effet de l'iode; les deux cellules cylindroïdes courbes appartenant aux stomates contenaient des gouttelettes oléiformes.

Ces feuilles décrépitaient sur la flamme, et lors même que les petites explosions avortaient par une déchirure trop prompte, l'expansion de la vapeur et des gaz avait soulevé et détaché l'épiderme inférieur.

Rhamnus Alaternus. Ses feuilles vertes présentent des taches irrégulières, jaune-pâle, dirigées, dans le sens des nervures, vers leurs bords; les stomates montrent des dispositions organiques analogues aux précédents; les décrépitations que la flamme détermine sont moins fortes; elles soulèvent toujours l'épiderme inférieur, et parfois l'épiderme de la face supérieure.

Ilex albo marginata, houx panaché. Ses feuilles, très-consistantes sont vertes, bordées de bandes blanchâtres sinueuses; elles offrent des stomates dont les deux cellules courbes contiennent des gouttelettes d'huile sphéroïdales assez volumineuses; la cuticule recouvrant le bourrelet en entonnoir que forment les cellules des stomates, rétrécit ou clot entièrement l'ouverture. On parvient à observer cette structure sur les bords des coupes où le tissu cuticulaire obturateur, parfois coupé en deux, laisse apercevoir les détails de son organisation, sa coloration foncée par l'iode, et sa résistance à l'acide sulfurique.

Les feuilles de ce houx panaché décrépitent fortement, et

surtout lorsque, chauffant la face supérieure, on établit, par le mélange de la vapeur d'eau avec les gaz, une forte pression sous l'épiderme inférieur avant que celui-ci ait subi aucune altération. On comprend qu'alors, en effet, l'explosion soit d'autant plus forte que la résistance de l'enveloppe est plus grande avant qu'elle éclate.

Evonymus Japonicus, à feuilles vertes plus ou moins jaunâtres, bordées de blanc et tachées par quelques bandes blanchâtres. Les stomates, presque complétement clos par l'épaississement de la cuticule, offrent à peine une fente linéaire entre leurs deux cellules contournées; celles-ci renferment des gouttelettes oléiformes et des substances azotées.

Exposées au-dessus de la flamme, ces feuilles, fraîchement cueillies, font entendre des décrépitations assez fortes lorsqu'elles ne sont pas altérées.

Hedera Helix. Ses jeunes feuilles offraient de larges panachures, qui parfois occupaient la moitié de la surface; les stomates étaient entrou'verts, et quelques-uns étaient presque clos; on remarquait sur les feuilles plus développées et d'une consistance plus forte la plupart des stomates oblitérés ou très-peu entr'ouverts; les deux cellules cylindroïdes du stomate contenaient des gouttelettes huileuses, et l'on voyait de semblables gouttelettes dans les cellules épidermiques. Ces feuilles bien développées décrépitaient fortement au feu.

Il s'est rencontré, parmi les divers autres échantillons que j'ai examinés, des feuilles exemptes de panachures, mais très-consistantes, qui, exposées à la flamme, décrépitent assez fortement. Je citerai particulièrement, sous ce rapport, les feuilles bien développées du *Magnolia grandiflora*. Ici d'ailleurs, comme dans les exemples précédents, on retrouve, au nombre des circonstances favorables à ces décrépitations, la forte consistance de l'épiderme, l'oblitération des stomates; on remarque, en outre, que les jeunes feuilles du même arbre qui sont plus souples, dont l'épiderme est moins consistant et plus perméable, ne

donnent lieu à aucune décrépitation, ce qui s'accorde bien encore avec mes précédentes observations.

Les tissus des feuilles du *Magnolia* sont composés de membranes épaissies avec l'âge; aussi contiennent-elles en somme plus de substance solide et moins d'eau que la plupart des feuilles souples des autres plantes et que les jeunes feuilles du même arbre.

Voici les résultats des essais comparatifs faits à cet égard :

DÉSIGNATION DES FEUILLES.	POIDS		QUANTITÉ de MATIÈRE SÈCHE pour 100.
	DE SUBSTANCE fraîche employée.	DE LA SUBSTANCE après dessiccation.	
Deux feuilles bien développées en septembre; les quatrième et cinquième après le bourgeon.....	8 ,815m.	3 ,703	41 ,9
Deux feuilles les plus rapprochées du bourgeon.	8 ,444	2 ,257	26 ,7

On remarquera que la quantité en poids de matière solide contenue dans les jeunes feuilles précitées ne formerait que les 0,66 environ de celle renfermée dans les feuilles plus anciennes.

PANACHURES DES FEUILLES.

Dans les observations qui précèdent on vient de voir que toutes les feuilles décrépitantes portent des stomates oblitérés, et que cette disposition générale est accompagnée d'interposition de gaz, en proportions évidemment plus fortes que dans la plupart des feuilles non panachées; enfin, le défaut de granules colorés en vert, l'accès entravé de l'air, et la stagnation des sucs et des gaz, dans certaines parties de ces tissus, me parurent être des indices ou des effets d'une diminution de l'énergie de la vitalité dans ces feuilles. Il était possible d'admettre, en outre, que l'interposition des gaz entre les cellules des tissus pouvait concourir à la

production de l'opacité et de l'aspect blanchâtre ou jaune pâle des parties panachées.

Conduit par cette discussion des faits observés à rechercher quelques-unes des causes de la panachure des feuilles, je voulus approfondir cette intéressante question, et d'abord vérifier, sur certaines feuilles, dans des conditions très-différentes d'ailleurs, et relativement aux panachures, les dispositions organiques déjà constatées sur les feuilles décrépitantes.

Ces dispositions parurent se présenter en effet sur une volumineuse feuille d'*Agave americana*, dont chacun des deux bords, sur une largeur de un à trois centimètres, offrait une bande rectiligne blanche, légèrement jaunâtre, tandis que tout le reste de la largeur de la feuille était coloré en vert.

La présence des gaz, en proportions plus fortes, dans le parenchyme voisin des bords, fut rendue évidente par une expérience très-simple : une lame de deux à trois millimètres de ce parenchyme décoloré surnageait l'eau, tandis qu'une autre lame semblable, prise dans le tissu normal contigu, se précipitait immédiatement au fond du vase rempli d'eau; et cependant des tranches comprenant toute l'épaisseur de la feuille, prises dans les parties blanches et les parties vertes, plongeaient également au fond de l'eau. Ce pouvait être un indice de la présence des sucs en plus grande proportion, dans une partie de l'épaisseur des zones blanches.

Une démonstration précise de ce fait fut obtenue par la comparaison entre les proportions d'eau contenue dans ces deux parties. 10 grammes du tissu *panaché* se réduisirent, par la dessiccation, à 14, 34 : cette partie contenait donc 85, 66 d'eau pour 100; 10 grammes de la portion des feuilles ayant la coloration verte normale, desséchés, furent réduits à 16,07 : ce tissu contenait donc 83,93 d'eau pour 100, ou 2,17 de moins que le premier.

De semblables expériences comparatives, faites sur les feuilles d'*Orontium variegatum*, à larges bandes blanches, donnèrent,

Pour la portion verte du limbe : eau..... 63,30
Pour la portion blanche du limbe : eau..... 66,58
} Différence = 3,28 p. 100.

Sur cette dernière feuille, quoique les stomates fussent très-petits, on pouvait, surtout vers les bords des coupes, discerner leurs oblitérations.

Acorus graminifolius. Ses feuilles étroites, longues, très-minces vers les bords, sont bordées, dans la direction des nervures, de bandes blanches, plus ou moins larges; leurs stomates, petits, alignés, peu nombreux, sont tous presque clos ou oblitérés; la cuticule marginale, offrant une forme ellipsoïdale allongée, résiste très-fortement à l'acide sulfurique et conserve la coloration jaune-orangé développée par l'iode [1]; les tissus dans les parties blanches ne contiennent pas de granules verts.

Plusieurs feuilles panachées, souples, moins consistantes que les feuilles décrépitantes, participent un peu de la propriété caractéristique de celles-ci : exposées à la flamme elles font entendre de petites décrépitations, et leur épiderme inférieur est soulevé, distendu ou déchiré. Telles furent les observations faites sur une feuille verte, panachée de *Caladium seguinum variegatum.* De nombreuses taches blanchâtres, irrégulièrement arrondies et allongées dans les directions des nervures paraissaient en relation avec l'accumulation des liquides apportés par les vaisseaux et stagnant dans le parenchyme par défaut d'évaporation. En effet, la plupart des stomates étaient oblitérés ou ne laissaient qu'une ouverture linéaire.

Des dispositions organiques semblables, expliquant à la fois la stagnation des liquides et de l'air ou des gaz dans les tissus, me parurent évidentes dans les feuilles des plantes ci-après indiquées.

[1] Tout le tissu cellulaire sous les couches épidermiques des tiges souterraines de cette plante était rempli de granules d'amidon, tandis que les parties aériennes des tiges n'en contenaient pas sensiblement; il ne s'en trouvait point dans les racines. De volumineuses sécrétions globuleuses, renfermant de l'huile et enveloppées par un tissu azoté, se remarquent en séries, et plus ou moins distantes, sous la cuticule épidermique des portions blanches et vertes des feuilles.

Aristotelia macqui. Ses feuilles verdâtres offraient des panachures jaunâtres, étendues en bandes parallèles aux nervures, dirigées de la nervure médiane vers les bords du limbe; la plupart des stomates étaient oblitérés ou à peine entr'ouverts; la membrane cuticulaire pénétrant dans l'ouverture de ces stomates y constituait généralement le tissu obturateur, et était douée d'ailleurs des propriétés caractéristiques que nous avons indiquées sous les influences de l'iode et de l'acide sulfurique employés successivement.

Les feuilles d'*Aristotelia macqui*, mises sur la flamme, donnaient lieu à de petites décrépitations.

Symphoricarpus parvi flora. Ses feuilles offraient des panachures jaunâtres étendues, irrégulières; les stomates étaient clos la plupart, ou à peine entr'ouverts; leur cuticule externe, pénétrante dans l'ouverture, était fortement imprégnée de substances azotées très-résistantes.

Exposées à la flamme de l'alcool, les feuilles de *Symphoricarpus* panachées donnèrent lieu à de très-faibles décrépitations soulevant l'épiderme inférieur.

Veronica maritima. Ses feuilles vertes, jaspées, à bords blancs jaunâtres, portaient des stomates dont l'ouverture elliptique, bordée d'une épaisse cuticule, était clause par l'extension de ce tissu cuticulaire.

Caladium bicolor. Il montrait la plupart de ses stomates clos ou presque totalement oblitérés; ses feuilles souples exposées à la flamme décrépitaient à peine, quoique l'épiderme fût soulevé.

Caladium hæmatostygma. Au milieu du limbe de ses feuilles, on voyait des taches irrégulières d'un rouge virant au violet, à bords blanchâtres; ses nombreux stomates étaient clos ou laissaient à peine une ouverture linéaire. Je n'ai pas rencontré de stomates dans les parties du limbe correspondantes aux taches.

Arundo donax, variegata. Ses feuilles vertes, à larges et longues bandes blanches, présentaient de très-nombreux stomates, la plupart clos par des extensions membraniformes de la cuticule épi-

dermique. La température subitement élevée par une flamme soulevait l'épiderme sans produire d'explosion.

Dracæna terminalis. Ses feuilles vertes à larges bandes rouges, violettes ou brunes, portaient des stomates clos la plupart, ou en très-grande partie oblitérés.

Rubus leucostachys. On voyait sous ses feuilles de larges taches blanches irrégulières; quelques-uns de leurs stomates étaient ouverts, un plus grand nombre entr'ouverts à peine ; la plupart étaient clos par un tissu résistant, colorable en jaune-orangé par l'iode.

Phalaris arundinacea picta. Ses feuilles, bordées de larges bandes blanches dirigées suivant les nervures, sont amincies et ne décrépitent pas; la plupart de leurs stomates paraissent habituellement clos à tous les degrés de développement de ces feuilles; ces stomates offrent une structure particulière que nous examinerons plus loin (voy. pl. VIII, fig. *o, o', o''*) et qui semble ne devoir jamais laisser que de très-faibles sections de passage à l'air atmosphérique.

Baguenaudier (*Colutea arborescens*). Vers le milieu du mois d'août, il est facile d'observer sur cette plante, 1° les dispositions des stomates qui conviennent à l'exercice actif des fonctions des feuilles, et 2° celles qui s'appliquent à rétrécir les issues des gaz et des liquides : on remarque les premières en examinant sous le microscope la face inférieure d'une foliole développée, mais jeune et bien verte, par une coupe parallèle aux parois. Tous les stomates offrirent une ouverture ellipsoïdale plus ou moins élargie, tandis que, sur l'épiderme des gousses gonflées et à différents états de développements, on vit les stomates clos, par le rapprochement de leurs cellules jumelles en une suture rectiligne, ou par l'oblitération de l'ouverture rétrécie. Les deux dispositions si différentes des stomates ont pour effet, l'une de favoriser, l'autre de diminuer les absorptions et exhalations des vapeurs et des gaz (l'épiderme extérieur enlevé, la gousse retient les gaz qui la gonflent).

Les feuilles de l'*Arundo donax variegata* présentaient leurs larges bandes blanches, aussi faciles à séparer des parties vertes du limbe que dans l'*Orontium variegatum*. J'ai répété sur ces feuilles les mêmes expériences, dont voici les résultats :

	POIDS		QUANTITÉ de MATIÈRE SÈCHE pour 100.	EAU.
	DE LA SUBSTANCE fraîche employée.	DE LA SUBSTANCE après dessiccation.		
Feuilles d'*Arundo donax variegata*, parties vertes.....	5 ,184m.	924m.	17 ,82	82 ,18
Idem, parties blanches.....	6 ,464	942	14 ,57	85 ,43

Ainsi, dans cet exemple encore, les parties *panachées* renferment plus d'eau (3,25 p. 100) que les portions vertes.

Les feuilles de *Croton variegatum* sont la plupart couvertes de taches jaunâtres, pâles, parfois très-larges. En examinant la face supérieure du limbe de ces feuilles, on reconnaît à l'œil nu que les nervures gorgées de sucs font une saillie plus ou moins protubérante, et dirigent les panachures jaunes et rougeâtres. Les pétioles de ces feuilles sont gonflés aussi, tandis que les nervures et les pétioles des feuilles vertes ou très-peu panachées de la même plante ne présentent pas de semblables gonflements.

Tous ces faits s'accordent entre eux comme avec une observation de M. Macaire Princeps relative à l'amoindrissement considérable des fonctions respiratoires dans les feuilles automnales panachées.

A la vérité, ce savant avait attribué le changement de couleur de ces feuilles à des altérations dans la couleur de la matière verte, tandis que M. Mohl reconnut plus tard que, dans ces circonstances, la matière colorante rouge des feuilles se développe souvent dans des cellules épidermiques ou sous-épidermiques, différentes de celles qui renferment les granula-

tions vertes du parenchyme. C'est aussi ce que j'ai observé moi-même[1].

FEUILLES AUTOMNALES.

Toutes les observations sur les *feuilles décrépitantes* et les *feuilles panachées* semblaient indiquer, parmi les principales causes des particularités qui distinguent ces feuilles, l'affaiblissement de l'énergie vitale, surtout dans certaines parties de leurs tissus; l'oblitération des stomates, le ralentissement des fonctions absorbantes et exhalantes, la stagnation des liquides et des gaz, etc. Il me parut probable que des influences, générales dans nos climats vers l'époque où la chute des feuilles est prochaine, devaient réaliser des conditions semblables relativement aux tissus des feuilles caduques surtout, et déterminer dans l'organisme des changements et des phénomènes analogues à ceux que nous venons de décrire.

Les observations suivantes, entreprises d'après ces vues, me semblent de nature à les justifier.

Feuilles de vigne, *Vitis vinifera*. Durant le mois d'octobre, on peut se procurer simultanément et sur le même pied, 1° des feuilles jeunes plus ou moins développées et bien vertes; 2° des feuilles anciennes ayant souffert de l'abaissement de la température, et des alternatives de celle-ci avec une température plus élevée.

Sur les premières, on observe les stomates à l'état normal plus ou moins ouverts, les secondes montrent presque tous leurs stomates clos. Ces feuilles, dont l'énergie vitale est évidemment diminuée ou dont la chute est prochaine, sont tachetées de rouge. Si l'on examine sous le microscope la répartition de la substance colorée, elle offre de jolies ramifications qui dessinent en rouge tout l'appareil circulatoire, car elle remplit, sous l'épiderme des cellules rapprochées, des nervures et des nervules;

[1] Voyez le travail de M. Macaire Princeps dans les Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève, t. IV, p. 43, et le mémoire de M. Mohl, *Annales des sciences naturelles*, t. IX, p. 212.

les tissus cellulaires sont envahis par des liquides introduits autour des vaisseaux, et maintenus en excès par suite de l'oblitération des stomates et du défaut d'exhalation aqueuse, phénomènes qui, eux-mêmes, paraissent être des conséquences générales de l'affaiblissement des fonctions assimilatrices des feuilles.

Celtis australis. Ses feuilles, à la même époque, offraient, la plupart, des panachures analogues à celles des feuilles de vigne, disposées suivant toutes les nervures et nervules, et plus particulièrement dans les cellules épidermiques de la face supérieure du limbe; d'ailleurs, la plupart des stomates étaient oblitérés, ou ne laissaient apercevoir qu'une ouverture très-rétrécie, presque linéaire.

Feuilles de poirier, *Pyrus c. sativa.* Sur un arbre d'une grande envergure non taillé, toute la portion du feuillage dirigée vers le sud était alors de couleur rouge-brun, tandis que la partie septentrionale, abritée par des arbres plus au nord, était restée verte. Celle-ci présentait des feuilles à stomates plus ou moins ouverts, tandis que dans l'autre les stomates étaient fermés ou entr'ouverts à peine; d'ailleurs, la matière colorante présentait les dispositions ci-dessus indiquées.

Les feuilles automnales d'ormes et d'un grand nombre d'arbres et arbrisseaux à feuilles caduques offrant des colorations pâles, jaunes, jaunâtres ou rouges, contenaient dans des cellules rapprochées des nervures des liquides colorés en ces diverses nuances, et qui graduellement s'infiltraient dans les cellules voisines.

Ainsi donc, les espèces de panachures qui caractérisent un grand nombre de feuilles automnales tiennent à des causes analogues à celles qui produisent les feuilles décrépitantes et panachées.

STRUCTURE DES STOMATES.

Les observations qui précèdent ne me laissant plus de doutes sur les relations existantes entre certains états de l'affaiblissement

des fonctions dans les feuilles et les dispositions de leurs stomates, je voulus rechercher si de telles dispositions pouvaient être habituelles pour des feuilles à l'existence ou à l'état normal desquelles ces conditions conviendraient; de celles, par exemple, dont les stomates, à tous les degrés de développement, n'offriraient que des passages toujours fort rétrécis.

Les feuilles du *Phalaris arundinacea picta,* et peut-être de beaucoup de graminées; celles du *Podocarpus macrophyllus,* du *Pinus pinea,* et, sans doute, d'un grand nombre de conifères, me paraissent réaliser cette supposition. J'examinai attentivement cette partie de leur organisme que je vais décrire; je montrerai ensuite, et de même avec le secours des figures, ces dispositions des stomates sur une feuille verte, jeune, bien développée de dahlia, et comparativement sur une autre feuille affaiblie par l'âge et extraite de la même tige. Nous suivrons enfin le développement graduel des stomates dans une même feuille d'une plante dont les tissus absorbent de grandes proportions d'eau.

Phalaris arundinacea picta. Ses feuilles, étendues, vertes, minces, très-souples, sont rayées, longitudinalement et suivant leurs nervures, par de longues bandes blanches plus ou moins larges; exposées à la flamme, elles ne font pas entendre de décrépitation.

Leurs stomates ont une forme particulière indiquée figures *o*, *o'*, *o''*, planche VIII. Les cellules accouplées qui forment les stomates laissent entre elles une ouverture allongée, très-généralement plus étroite que dans la figure *o*, presque close ou légèrement entr'ouverte comme dans la figure *o''*. Une pareille ouverture à peine linéaire se montre dans les très-jeunes feuilles encore enroulées, et dans les feuilles dont le développement est complet. La figure *o'* montre, par une coupe perpendiculaire à la face de la feuille, la structure d'une des cellules du stomate donnant à l'ouverture une forme évasée a l'extérieur comme à l'intérieur; les deux coupes *o* et *o''* sont faites par un plan parallèle à la superficie de la feuille.

Podocarpus macrophyllus. Les cellules épidermiques qui avoisinent chacun de ses stomates présentent dans leur ensemble, autour d'eux, des dispositions symétriques assez remarquables, et les stomates sont en séries linéaires régulières aussi. La membrane épidermique très-résistante se colore en jaune-orangé par l'iode, comme l'indique la portion q' de la figure; le stomate présente une grande cavité rétrécie et close extérieurement par un prolongement du tissu cuticulaire, en sorte que c'est au travers de ce tissu que doivent s'infiltrer l'air atmosphérique qui entre et les gaz ou vapeurs exhalés. Des dispositions analogues se remarquent dans les stomates également disposés en séries rectilignes des feuilles du *Pinus pinea.*

Dahlia. Les feuilles développées, mais très-vertes, examinées le 1er octobre, avaient des stomates d'une structure régulière, tels que les montre la figure *i*, planche VIII, généralement entre quatre cellules épidermiques sinueuses. Chacune des deux cellules enveloppantes contenait dix granules à projection circulaire déprimés au centre, abondants en substance azotée; l'épaississement de la cuticule épidermique, engagée dans l'ouverture évasée, formait une doublure parallèle aux parois et fort résistante: cette partie se colorait en orangé-foncé par l'iode, comme le montre la figure *j*. On voit que les granules se sont colorés aussi par le même réactif; qu'enfin les corps azotés contenus dans les cellules épidermiques environnantes ont éprouvé la coloration jaune et une contraction notable. La figure *k* montre, sous l'influence de l'iode, un stomate d'une feuille plus âgée, prenant les caractères des feuilles automnales; k' et k'' indiquent des stomates des mêmes feuilles coupés en deux sur les bords des tranches observées. On voit que la doublure cuticulaire existe bien réellement; en *l*, on remarque un stomate de feuille développée verte, attaquée par l'iode et l'acide sulfurique; la doublure s'est détachée des parois des deux cellules enveloppantes. Elle résiste tellement à l'action de l'acide sulfurique, graduellement plus concentré, que tout le reste du tissu environnant se

désagrége, comme le représente la figure *m*, tandis que cette doublure, intacte, forme encore une membrane annulaire continue.

FORMATION ET DÉVELOPPEMENTS DES STOMATES.

Dans la vue de mieux suivre la formation et les développements des stomates, dont j'avais précédemment étudié les dernières modifications, je crus devoir examiner ces appareils organiques dans leurs dispositions relatives aux besoins d'une même plante; j'espérai même trouver toutes ces dispositions réunies sur une seule feuille, en la choisissant parmi celles dont les différentes parties doivent accomplir des fonctions toutes spéciales; ainsi, par exemple, les longues et volumineuses feuilles de jacinthe, enveloppées et blanches encore dans le bulbe, sont parfaitement incolores; leurs fonctions assimilatrices en ces endroits ne semblent pouvoir tirer de l'extérieur aucun de leurs aliments, directement du moins; ni l'air, ni la lumière ne paraissent y avoir accès. En l'absence de ces deux conditions ordinaires de la coloration verte, il était permis de croire que les stomates, inutiles, n'étaient pas encore formés; en effet, en examinant l'épiderme qui recouvre immédiatement ces parties, on aperçoit des cellules étroites et courtes dont les jonctions bout à bout, comme on en voit trois, figure *a*, planche VIII, n'offrent aucune ouverture ni solution de continuité.

Plus loin, sur la même feuille blanche encore, mais dans le voisinage des parties vertes, on découvre les premiers rudiments de la construction des stomates; je les ai indiqués à deux degrés différents en *b* et *c*, même planche. On voit à leur jonction deux cellules laissant former une ouverture entre elles sous la cuticule. Cet intervalle est rempli de corpuscules à composition azotée; des parois propres entourent et agrandissent cette sorte de lacune, ainsi que l'indique la figure *d*. Ici, comme dans les trois premiers degrés précédents, l'addition de l'iode montre (jusqu'à une ligne de démarcation) que la cuticule existe impré-

gnée de substance azotée, et que des corpuscules, aussi à composition quaternaire, remplissent la cellule nouvelle; on en aperçoit même dans les deux cellules longues contiguës.

Un peu plus haut encore, et plus près des parties vertes de la même feuille, la cellule nouvelle, un peu plus travaillée, est divisée en deux capacités, closes par une cloison ajoutée longitudinalement, comme l'indique la figure *e*. Chacune des cavités est remplie de corpuscules azotés, vésiculeux, libres; jusque-là point d'ouverture encore qui puisse donner accès à l'air, issue aux gaz et aux vapeurs.

En se rapprochant plus des parties colorées en vert, aux points où la nuance verdâtre se décèle à peine, on remarque que les deux cavités closes sont séparées, sur une grande partie de leurs points de contact, par la courbure des parois, dont la juxtaposition établissait un diaphragme; elles n'ont conservé d'adhérence qu'à leurs extrémités : c'est ce que montre la figure *f*. Les corpuscules vésiculeux, dans les deux cavités devenues des cellules courbes, sont plus nettement dessinés et offrent toujours les caractères des matières riches en substance organique quaternaire; une ouverture, évasée vers ses bords, rétrécie au fond, paraît alors s'être établie entre les deux cellules courbes.

Les mêmes dispositions sont prononcées davantage sur la même feuille lorsqu'on observe l'épiderme recouvrant les portions décidément vertes, là où l'influence de la lumière détermine l'assimilation du carbone, l'exhalation des gaz et de l'eau. On y voit, comme en *g*, des stomates complets, à ouverture régulière, elliptique, des corpuscules vésiculeux azotés et la cuticule azotée aussi, plus épaisse et plus azotée encore autour de l'ouverture, comme l'indiquent les coupes *g'* et *g''*.

Toutes les coupes décrites ci-dessus, faites par des plans parallèles à la superficie de la feuille, présentaient des lamelles épidermiques. Il me parut utile de déterminer la structure définitive des stomates par une coupe perpendiculaire à la superficie de la feuille, qui montrât les dispositions des cel-

lules épidermiques, des cellules propres du stomate, et enfin des cellules sous-jacentes, contenant des corps organiques colorés en vert autour de la chambre aérifère, surtout dans la vue de bien apprécier la nature chimique de chacune des parties du stomate et des parties environnantes.

La coupe perpendiculaire, à la superficie qu'indique la lettre *h* sous la figure *f* (on a par inadvertance mis la lettre *b*, mais la figure que nous avons désignée réellement par cette lettre est la deuxième coupe parallèle à la superficie et ne contient pas de matière verte), montre ces relations; on voit, de plus, que l'iode a fortement coloré la cuticule et les corpuscules azotés renfermés dans une des cellules courbes, lunulées, du stomate. Les mêmes dispositions se présentent dans un autre sens, en regardant la figure *h''*. C'est une coupe également perpendiculaire à la surface de la feuille, mais perpendiculaire aussi à la coupe précédente, de façon que l'une des cellules du stomate est coupée dans sa longueur au lieu de l'être transversalement; enfin, la coloration spéciale de la cuticule et celle des corpuscules azotés par l'iode s'y remarquent aussi.

Ces deux derniers effets deviennent bien plus prononcés lorsqu'après l'iode on fait passer entre les lamelles de verre de l'acide sulfurique. Dans la figure *h'*, qui représente cette réaction, on voit, en effet, que les matières azotées des cellules du stomate se sont contractées et colorées en jaune; que la cuticule colorée en jaune-orangé se montre par sa tranche, plus foncée, et par une partie de sa surface, pénétrant dans la cavité du stomate jusqu'à la chambre à air; d'un autre côté, sous la cuticule, les cellules épidermiques, très-peu injectées de matière azotée, se gonflent, et par leur désagrégation affectent l'état intermédiaire rapproché de la dextrine, présentant la coloration bleu-violet qui résulte de cet état particulier de division des particules organiques de la cellulose.

Les mêmes phénomènes montrent que les cellules sous-épidermiques contenant les granules verts sont, comme les cellules

sous-jacentes, encore composées de cellulose presque pure, tandis que les corps colorés en vert renfermés dans ces cellules éprouvent la contraction et manifestent la coloration jaune-orangé qui caractérisent les matières azotées de l'organisme.

Ainsi donc la cuticule épidermique pénètre dans toute la profondeur de l'ouverture des stomates des feuilles bien développées [1], et les corpuscules à composition quaternaire président à la formation, aux développements comme à l'oblitération plus ou moins avancée de ces appareils. Les différents états des stomates ont des relations évidentes avec l'activité des fonctions des feuilles et les phénomènes qui en dépendent : tels sont, par exemple, la coloration verte, les décrépitations, les panachures et les modifications automnales [2].

Les observations qui précèdent, relatives aux stomates et à la cuticule, reproduisent en grande partie les faits constatés par M. Ad. Brongniart; elles les complètent en montrant les relations de la structure des couches épidermiques avec la nature chimique des membranes contiguës ou superposées; elles prouvent, par différentes réactions rapides, l'altérabilité des tissus intérieurs des feuilles et la résistance de l'épiderme, et surtout de la cuticule, comme M. Brongniart l'avait observé, après des macérations plus ou moins prolongées; elles y ajoutent, enfin, le fait général de la pénétration de la cuticule dans la cavité des stomates, des détails sur la formation, les développements, les oblitérations de ces appareils des végétaux, propres à l'absorption et au dégagement des gaz et des vapeurs.

[1] L'épiderme de la tige du *Cactus peruvianus* offre, adhérente à la cuticule épidermique, tout autour de la margelle du stomate, une pellicule plus mince qui traverse les couches des cellules épidermiques. Cette pellicule, imprégnée d'iode, résiste à l'acide sulfurique qui désagrége les cellules; elle se montre alors sous forme de manchon soudé à l'ouverture du stomate ou continu avec la cuticule.

[2] Ne serait-ce pas encore au défaut d'activité des fonctions respiratoires et exhalantes qu'on devrait attribuer les colorations rouges printannières des jeunes rameaux et des bourgeons au moment où l'afflux de la séve ascendante précède et prépare sur les tilleuls, par exemple, le développement des feuilles?

La démonstration par les moyens que j'ai indiqués permet d'observer une pellicule superficielle azotée sur les *frondes* du *Polypodium irioïdes* et même du *Fucus digitatus*. Cette pellicule, jaunie par l'iode, résiste encore ici à l'acide sulfurique ou conserve, du moins, la coloration orangée, tandis que les cellules qu'elle recouvre se désagrégent en bleuissant, puis sont dissoutes. La présence d'une couche superficielle azotée est donc une de ces lois générales qui régissent la composition de tous les êtres végétaux.

MÉMOIRE

SUR

LES DÉVELOPPEMENTS DES VÉGÉTAUX,

PAR M. PAYEN.

SEPTIÈME MÉMOIRE.

COMPOSÉS À BASES MINÉRALES DANS LES PAROIS DES CELLULES ET LES MÉATS INTERCELLULAIRES; CRISTAUX DU *PANDANUS;* CORALLINÉES VÉGÉTALES; CARACTÈRES DISTINCTIFS ENTRE LES TÉGUMENTS DE DIVERS INSECTES ET DES CRUSTACÉS, ET L'ÉPIDERME DES VÉGÉTAUX; SUPPLÉMENT AUX ANALYSES DES AMYLATES, ACÉTATES ET HYDRATES DE PROTOXYDE DE PLOMB; DES TOURBES ET DES PÉRISPERMES; COMPOSITION DES FRUITS DE *CACTUS*, ETC.

LOIS GÉNÉRALES RELATIVES À LA COMPOSITION DES PLANTES.

APPLICATIONS : 1° À L'ANATOMIE ET À LA PHYSIOLOGIE VÉGÉTALES; 2° AUX INDUSTRIES AGRICOLES ET MANUFACTURIÈRES.

Avant d'exposer les lois générales déduites des observations rassemblées dans les six mémoires qui précèdent, il m'a paru convenable d'ajouter ici des recherches que j'ai entreprises depuis la rédaction de ces mémoires, afin de vérifier plusieurs conclusions, et un supplément relatif à des analyses que j'avais omis de rapporter dans le texte précédent.

COMPOSÉS À BASES MINÉRALES DANS L'ÉPAISSEUR DES PAROIS DES CELLULES VÉGÉTALES ET DANS LES MÉATS INTERCELLULAIRES.

Mes dernières recherches relatives aux concrétions inorganiques dans les plantes avaient démontré qu'une sorte de squelette minéral reproduit, après l'incinération, tous les détails de l'organisme. La silice, seule ou accompagnée d'une moindre quantité de sels calcaires, marque le linéament des membranes périphériques, tandis que le carbonate de chaux prédomine aux points où s'est opérée la combustion des cellules situées, soit au-dessous de l'épiderme, soit plus profondément encore dans les tissus; j'avais d'ailleurs observé, dans presque toutes les expériences faites avec l'acide sulfurique sous le microscope, la formation du sulfate de chaux en cristaux longs, irradiés, partant de l'épaisseur des parois entre les cavités cellulaires. Ainsi donc, la silice, d'une part, et un composé calcaire, de l'autre, avaient été interposés dans l'épaisseur des parois cellulaires durant la vie de chaque plante.

Cependant un doute subsistait encore, il fallait le lever ou s'abstenir de conclure.

On pouvait admettre, en effet, que les sels calcaires, plus ou moins solubles, contenus dans les sucs des végétaux, se déposaient sur les membranes au moment de la dessiccation, et formaient un enduit que la calcination ensuite changeait en carbonate de chaux.

Pour apprécier la valeur de cette objection, je crus devoir éliminer tous les sels solubles avant l'incinération, et vérifier, après l'incinération, si le carbonate de chaux représentait encore les parois des cellules détruites dont il tenait la place.

Voici comment je parvins à réunir les conditions favorables à l'expérience : des tranches excessivement minces, 1° de différentes feuilles; 2° des tiges de cactus, et 3° des pétales de fleurs, furent immergées durant plusieurs jours dans l'acide acétique; des lavages, jusqu'à épuisement par l'eau et l'alcool, achevèrent d'en-

lever les dernières traces des composés calcaires libres solubles dans ces trois liquides; j'avais ainsi fait disparaître, en outre, plusieurs sels végétaux, libres aussi, à base de potasse et de soude, qui, décomposés au feu, eussent donné lieu à la formation de silicates, et, par suite, auraient altéré surtout le squelette siliceux.

Le retrait que les tranches éprouvent dans l'alcool prévient une partie des déformations lorsqu'on les brûle.

On place ces tranches sur une lame de verre mince qui repose sur une feuille de platine placée dans une capsule; on peut même les recouvrir d'une lamelle en verre afin de les maintenir en place, et sauf à compléter l'incinération par une injection d'oxygène lorsque tout le petit appareil est à la température rouge.

L'incinération terminée, on observe sous le microscope, d'abord à sec, puis après avoir introduit une gutlule d'eau. Le squelette dessine nettement les traits rétrécis du tissu brûlé.

On ajoute alors une goutte d'acide acétique, qui enlève avec effervescence le carbonate calcaire, et rend à la fois plus minces, plus diaphanes, les lamelles membraniformes, résidu de l'incinération, dont quelques-unes disparaissent presque entièrement.

J'ai observé une semblable répartition de la silice et d'un composé calcaire dans les tiges des cactus, dans différentes feuilles, dans les fleurs du *Caladium odorum*, ainsi que dans les pétales de plusieurs autres fleurs.

Ainsi donc, le composé à base minérale et acide organique, seul ou avec la silice, consolide les membranes végétales par son interposition dans la cellulose; il paraît s'être déposé après la silice, puisque la dissolution du carbonate (qui le représente dans plusieurs parties des résidus incinérés) ne disloque pas mais amincit seulement le squelette siliceux.

La loi générale qui résulte de la présence de l'oxalate de chaux dans certaines parties des tissus de presque toutes les plantes permettrait aussi d'entrevoir le rôle de ses concrétions nombreuses et variées, si l'on admettait que de telles sécrétions eussent pour effet, si ce n'était pour destination, soit de mettre en réserve l'un

des matériaux nécessaires au développement des tissus, soit de retirer de la circulation l'excès de ses composants, qui pourrait nuire aux progrès de la végétation.

Une question fort importante restait à résoudre; il s'agissait de savoir quel était, parmi les différents sels contenant des acides organiques, celui ou ceux qui avaient laissé le carbonate, résidu de leur combustion. Ne pouvant démontrer complétement la nature de ce composé, à l'époque où mon mémoire fut présenté à l'Académie, je m'abstins alors de toute hypothèse, me bornant à dire qu'il existait généralement des composés calcaires dans l'épaisseur des cellules végétales.

Depuis, des tentatives plus heureuses m'ont permis d'aborder ce problème dans toute sa généralité; je vais indiquer deux exemples des nouveaux résultats que j'ai obtenus; ils sont assez remarquables, l'un, par la netteté de l'expérience et des observations organographiques qu'il rend accessibles au microscope; l'autre, par la facile solution qu'il donne de questions décidées en sens contraires, à plusieurs années d'intervalle, par les travaux d'un savant analyste.

Voici le premier fait : on enlève avec quelques précautions l'épiderme d'un cactus (*Cereus peruvianus*); il ne reste dans les cellules de cet épiderme épais aucune trace de cristaux; toutes les cellules des tissus sous-jacents renfermant des substances organiques colorées et des matières complexes, sont éliminées mécaniquement sans peine, comme nous l'avons vu à la fin du dernier mémoire. Roulant alors sur lui-même cet épiderme, sorte de peau résistante, on en forme un cylindre que l'on assujettit et qu'on découpe perpendiculairement à son axe, avec un rasoir, en très-minces lanières. Celles-ci sont lavées sur une toile et débarrassées de tout corps soluble ou pulvérulent.

On les presse fortement, puis on les plonge dans une ou deux fois leur volume d'acide acétique à cinq degrés; au bout de quelques heures, on extrait par la pression le liquide acide qui contient de l'acétate de potasse, de soude et de chaux et un peu de pectine.

On épuise les membranes restantes par des lavages à l'eau distillée. L'inspection au microscope montre qu'une légère couche a été enlevée dans l'épaisseur des parois cellulaires sous la première rangée épidermique.

On plonge alors toute la masse dans son volume d'acide sulfurique, étendu de dix parties d'eau, et on laisse réagir pendant une journée.

La solution acide trouble, que l'on extrait ensuite par expression, contient beaucoup de sulfate de chaux, plus un peu de pectine et de sulfate de potasse; on épuise par des lavages à l'eau distillée.

Après ce deuxième traitement, l'observation microscopique ne révèle aucun changement appréciable.

Cela tient à ce que la pectine, la chaux, la soude et la potasse extraites ne laissent pas de vide sensible, car une substance volumineuse qui les accompagnait est restée, c'est l'acide pectique. On l'extrait facilement, à son tour, à l'aide de l'ammoniaque étendue. Sous le microscope, la réaction est fort curieuse : elle disloque les cellules, évide leurs épaisses membranes, montrant leurs couches superposées; fait apparaître les lignes de démarcation entre les cellules jusqu'alors confondues et permet de les distinguer, tandis que la cuticule épidermique reste continue, montrant de nombreuses cavités et des saillies linéaires qui, formées pendant la végétation, correspondent aux intervalles entre les cellules de la première couche superficielle.

On peut rendre plus évidente l'observation microscopique en ajoutant peu à peu de l'eau, de l'iode, puis de l'acide sulfurique, qui caractérisent par une couleur orangée la cuticule et les autres parties de la cellulose injectées de substance azotée, tandis qu'ils colorent en un beau violet toutes les pellicules superposées de la cellulose pure.

Quant au pectate d'ammoniaque extrait de toute la substance préparée comme nous l'avons vu plus haut, on l'épure par le rapprochement dans le vide, la précipitation par l'alcool, etc.

On peut le transformer en pectate de chaux ou en extraire l'acide pectique. Tous ces produits sont d'une blancheur et d'une pureté remarquables, ainsi que l'on a pu en juger par les échantillons que j'ai présentés à l'Académie.

Le pectate de chaux constitue la plus grande partie du poids des substances interposées dans les membranes des couches épidermiques du cactus; réuni au pectinate de chaux et de potasse, il formait les 0, 65 du poids total de l'épiderme. Cette énorme proportion m'a paru variable avec l'âge des portions de tige employées et peut-être suivant d'autres circonstances.

Le deuxième fait que je me proposais de rapporter ici a été recueilli en appliquant les procédés dont je viens de parler au tissu de la betterave blanche. Je suis parvenu à extraire ainsi, *directement et à froid*, la pectine très-abondante et l'acide pectique qui s'y trouvaient combinés avec la chaux, la potasse et la soude.

La question de leur préexistence, qui semblait jusqu'ici fort douteuse, est donc maintenant résolue.

On sait, en effet, que, dans son dernier mémoire sur la betterave à sucre, M. Braconnot supposait la pectine formée par l'ébullition et n'admettait plus que d'une manière dubitative la présence de l'acide pectique [1].

Ces deux principes immédiats, tels que je les ai obtenus, doivent

[1] Dans un mémoire sur les betteraves, leur analyse et les produits comparés de leur culture, lu à la Société philomatique le 2 juillet 1825 (voyez le Dictionnaire technologique, t. XX, p. 73), j'avais indiqué les substances suivantes dans leurs racines:

1° *Eau*, de 85 à 90 centièmes;

2° *Sucre cristallisable*, de 6 à 11 centièmes (dont M. Peligot a trouvé jusqu'à 13 dans les betteraves blanches);

3° *Sucre incristallisable*, que j'annonçai dès lors ne pas préexister, mais très-probablement être le résultat de l'altération du sucre normal, ce qui depuis a été démontré;

4° *Albumine;*

5° *Acide pectique;*

6° *Ligneux* (c'est la *cellulose*), en fibres fortes et utricules très-minces;

7° *Deuxième substance azotée* soluble dans l'alcool;

8° *Matières colorantes* jaune ou rouge, et brunes;

9° *Substance aromatique;*

10° et 11° *Matières grasses*, l'une fluide à + 10°, l'autre consistante à cette température;

12° et 13° *Malates d'ammoniaque et de potasse;*

se rapprocher davantage de l'état normal où ils se trouvent dans les végétaux; car la combinaison de la pectine avec la chaux avait paru indécomposable par tous les agents chimiques, sans altération profonde, tandis qu'en réalité l'acide acétique, on vient de le voir, peut la dégager des membranes végétales, et l'acide sulfurique affaibli en enlève les dernières traces à froid.

Ainsi donc il sera très-facile, en suivant les procédés décrits dans ces deux exemples, d'extraire à froid la pectine et l'acide pectique des tissus végétaux; on pourra, comme je l'ai fait aussi, substituer l'acide chlorhydrique à l'acide sulfurique.

L'étude comparative des produits de l'ancien et du nouveau mode d'extraction paraît devoir offrir de l'intérêt, surtout lorsque l'on considère les curieuses transformations isomériques que M. Frémy a signalées dans son beau travail sur la pectine et l'acide pectique[1].

Un autre composé calcaire m'a semblé contenu dans les parois des cellules des feuilles. La détermination précise de sa véritable nature, dans la position qu'il occupe, présente bien des difficultés; si je parviens à les vaincre, j'aurai l'honneur de communiquer ultérieurement à l'Académie les résultats de mes recherches. Quoi qu'il en puisse être, les notions positives que je viens d'ajouter relativement à la présence des composés calcaires dans les

14° *Chlorure de potassium;*
15° *Azotate de potasse;*
16° *Oxalate de chaux;*
17° *Phosphate de chaux;*
18° *Chlorophylle* (dans les parties exposées à la lumière);
19° *Huile essentielle;*
20° *Silice;*
21° *Soufre.* Outre toutes ces substances observées alors, la betterave contient très-probablement du *caseum*, et enfin les matières ci-après désignées:
22° *Pectates*. . . } de *chaux*, de *potasse* et de *soude*, que je viens d'y observer.
23° et *pectinate*. }
24° et 25° *Sulfate de potasse* et *chlorure de sodium* indiqués par M. Dubrunfaut dans un brevet.
26°, 27° et 28° *Phosphate de magnésie*, *oxalate de potasse* et *substance mucilagineuse* trouvés par M. Braconnot, et dont j'ai, depuis, vérifié la présence.

[1] On se rappellera sans doute que M. Thénard a le premier annoncé, comme très-probable, la composition isomérique de l'acide pectique et de la pectine.

membranes, et parfois dans les méats intercellulaires des tissus végétaux, indiquent la nécessité de la chaux en divers états dans les terres cultivées, et c'est une nouvelle confirmation des résultats que j'ai précédemment exposés.

A l'époque où j'observai dans l'écorce de l'*Aylanthus glandulosa* (*Annales de chimie*, t. XXVI, p. 331) une substance organique capable de saturer l'ammoniaque, de s'y dissoudre et d'en être séparée en gelées volumineuses par les acides, substance qui fut depuis étudiée par M. Braconnot et nommée acide pectique, je l'avais extraite à froid. Les travaux postérieurs, publiés sur cette substance, me persuadèrent que, généralement, la température de l'ébullition était utile pour l'obtenir, et que mon analyse n'était qu'un cas particulier ; j'ai maintenant la certitude que cette méthode doit être généralisée et s'étendre à l'extraction de la pectine pure.

CRISTAUX DU *PANDANUS*.

Lorsque M. de Mirbel voulut bien s'occuper de vérifier avec moi mes observations sur les concrétions minérales dans les végétaux, nous examinâmes ensemble, sous ce rapport, un organisme remarquable qu'il avait déjà observé en étudiant les tissus d'une tige de *Pandanus*. On rencontre dans ces tissus un grand nombre de cristaux cubiques, rangés en série dans un organisme spécial, dont ils remplissent chacune des loges rectangulaires, évidemment disposées pour les recevoir. Cet appareil, fig. S. S''' pl. VIII, dans son ensemble, offre la configuration extérieure d'une raphide courte, dont les dimensions seraient énormément agrandies. La matière organique qui relie sa structure et recèle l'oxalate calcaire, est d'une nature différente des membranes environnantes. Fortement imprégnée de substance azotée, elle résiste et conserve une teinte jaune-orangé, en présence de l'iode et de l'acide sulfurique, tandis que les tissus environnants sont attaqués, se colorent en bleu et se désagrégent plus complétement, comme on le voit de S' en S'' et S'''. L'acide sulfurique, introduit seul, sous le

microscope, colore en jaune fauve cette sorte de gaîne cloisonnée, et attaque plus en le colorant moins tout le tissu environnant.

Les cristaux *moulés* dans les loges sont lentement attaqués par l'acide, comme on peut le remarquer dans l'avant-dernière loge de l'appareil inférieur sans dégagement de gaz. Entièrement dissous, ils laissent un tissu léger qui les enveloppait.

C'est, comme on le peut reconnaître, un exemple très-digne d'intérêt, soit en raison de ses particularités, soit parce qu'il s'est rencontré dans une Monocotylée arborescente ; il ajoutait une nouvelle et curieuse démonstration à celles que j'avais déduites des faits cités dans mon sixième mémoire, relativement aux dispositions des organismes, préparés dans les plantes pour recevoir les sécrétions solides ou liquides, minérales ou organiques. Il est donc bien évident qu'aucun dépôt ne se fait au hasard dans les tissus des végétaux vivants ; que dans ces organismes les choses se passent tout autrement que parmi les matières inertes, et à ce point que les phénomènes ordinaires de la cristallisation y sont modifiés, de façon à ranger les particules cristallisées sous des formes déterminées par les influences énergiques de la vie végétale.

NATURE VÉGÉTALE DES CORALLINÉES, CONCRÉTION MINÉRALE ET SÉCRÉTION AMYLACÉE DANS LEUR ORGANISME.

Après une étude approfondie des organes de la reproduction et de la végétation, M. Decaisne est parvenu à établir une classification méthodique des Algues. (*Ann. des sciences nat. 1843.*)

L'un des résultats de ce beau travail, qui fixa surtout mon attention, avait montré parmi ces cryptogames aquatiques une place naturelle pour des êtres considérés anciennement comme des végétaux et admis plus tard au nombre des Polypiers.

Il me parut utile de soumettre quelques-uns de ces Polypiers calcifères aux procédés de détermination chimique qui m'ont servi

à fonder une distinction précise entre les êtres de chacun des deux règnes. Ces recherches avaient pour moi beaucoup d'intérêt, car elles pouvaient s'appliquer à vérifier une loi de la composition des plantes, près de ces limites où parfois nos règles s'effacent.

Parmi les corallinées de M. Decaisne, j'étudiai plus particulièrement les *Corallina officinalis* de Saint-Wast, côtes de Normandie, et *Halymeda opuntia* de la Martinique, que je dus, l'une et l'autre, à l'obligeance de ce savant. Elles m'offraient d'ailleurs l'occasion d'examiner leurs incrustations calcaires abondantes et de les comparer avec les concrétions minérales que j'avais depuis longtemps observées dans des plantes diverses. Ce fut par là que je commençai cette sorte de vérification.

Ici, comme dans l'étude comparée des *Chara hispida*, *Chara vulgaris* et *Chara translucens*, de même encore que je l'avais observé dans un grand nombre de plantes phanérogames, je vis clairement que les sécrétions minérales se réunissent dans des positions déterminées de l'organisme et en proportions dépendantes des facultés de ces êtres vivants, bien plus que de la composition variable des milieux qu'ils habitent.

En effet, si l'on examine très-attentivement au microscope les extrémités les plus jeunes des pousses de la coralline officinale, on remarquera le tissu organique s'avançant au dehors des concrétions, et précédant partout la substance minérale; celle-ci appliquée contre les parois intérieures des cellules, reliée par la matière organique et laissant une cavité vide, graduellement rétrécie, offre dans son mode de développement une certaine analogie avec les inscrustations de substances végétales, qui donnent une grande consistance aux parties dures des plantes ligneuses.

Il est facile de voir, même sous un grossissement faible, et, soit par transparence, soit par réflexion, que dans une petite étendue, à chaque articulation, le tissu exempt d'incrustation calcaire permet une flexibilité notable, et se prolonge plus ou moins en cet état dans l'intérieur (le tissu libre, filamenteux, est beaucoup

plus abondant au milieu de l'*Halymeda opuntia*). Toute la périphérie de la plante montre la substance minérale enlacée dans la matière organique, de telle sorte qu'il serait impossible de justifier la comparaison de semblables formations avec ces dépôts de matières calcaires qui s'appliquent et s'accumulent à la superficie des corps solides inertes dans les eaux incrustantes. Les observateurs attentifs s'en feront aujourd'hui une idée toute différente.

Un autre genre des preuves que nous avons données à l'occasion des Characées se peut appliquer utilement ici : en effet, parmi les Algues venues dans les mêmes eaux, les unes sont exemptes d'incrustations, les autres en sont chargées; parmi ces dernières, encore, les proportions diffèrent suivant les espèces. Voici la composition des deux Corallinées :

	CORALLINA OFFICINALIS		*HALYMEDA OPUNTIA. M.*	
Carbonate de chaux	67,20		90,16	
Carbonate de magnésie	9,35	77,6	5,50	96,2
Sulfate de chaux, silice, etc	1,05		0,54	
Matière organique	.....	22,4	.....	3,8
		100,0		100,0

Ainsi, abstraction faite de l'eau hygroscopique, tout le tissu organique de l'une de ces plantes se réduit à 3, 8 pour 100. Plus des 96 centièmes de son poids total consistent donc en substances minérales.

Au point de vue de ces recherches, il était utile de constater la composition élémentaire de la partie organique, car elle devait correspondre à l'analyse des végétaux ou des animaux d'un ordre inférieur, et avoir dans l'un ou l'autre sens une influence notable sur la question. L'expérience a présenté les résultats suivants : ma-

tière employée, $3^{gr},130$; azote obtenu 7^{cc} ; température, + 18° ; pression, 76^{mm}.

D'où l'on peut conclure que la plante desséchée contient, pour 1,000 parties en poids, 2,63 d'azote équivalant à 17 de substances azotées sur 38 de matière organique totale. Celle-ci, privée de substance minérale, contiendrait donc, pour 100 parties, 44,85 de matière azotée plus 55,15 de matière organique non azotée, ou encore 6,9 d'azote pur, composition tout à fait analogue à celle de l'organisme des végétaux inférieurs, ainsi que des organes très-jeunes de toutes les plantes phanérogames, tandis qu'elle diffère beaucoup de la composition élémentaire des tissus appartenant aux animaux.

Les résultats auxquels j'étais arrivé semblaient concluants déjà ; toutefois il me parut convenable de rechercher dans les tissus de la coralline les propriétés qui, en dehors de la composition élémentaire, caractérisent la cellulose, principe immédiat qui relie toute structure végétale et constitue principalement la substance des *membranes* dans les plantes.

Pour atteindre ce but, j'ai d'abord débarrassé la coralline officinale de ses incrustations, à l'aide de l'acide chlorhydrique étendu. Lavée alors, puis traitée par l'ammoniaque et de nouveaux lavages à l'eau, elle fut placée entre deux lames de verre, sous le microscope et mise en contact avec une solution d'iode alcoolisée. Aussitôt toute la substance à composition quaternaire, renfermée dans les cellules ou infiltrée dans leurs parois, se décela par une teinte jaune-orangé.

Après cette préparation, introduisant entre les lames de verre une goutte d'acide sulfurique à 4 équivalents d'eau, je pus suivre les progrès de la désagrégation qui marquaient l'arrivée et le passage de l'acide. Ce fut une coloration orangée, rembrunie dans les parties du tissu, fortement imprégnées des substances quaternaires ; puis dans tout le reste du tissu on aperçut les premières réactions dissolvantes déterminant l'effet de teinture de l'iode, car la cellulose se trouvait alors, et dans toutes ses parties succes-

sivement, divisée à cet état de groupes de particules amylacées, qui dessinait en belles nuances violettes les cellules cylindroïdes irradiées ou épanouies symétriquement, à partir des points d'insertion de chaque article.

Ce joli phénomène microscopique terminait élégamment la démonstration que les analyses avaient commencée. Sur un autre échantillon de *Corallina officinalis*, j'ai obtenu directement la coloration violette qui caractérise la matière amylacée, et la cellulose agrégée faiblement.

Il a suffi de tenir la plante plongée dans une solution aqueuse alcoolisée d'iode pour obtenir une coloration violette foncée ; cette coloration manquait dans les extrémités très-jeunes. Pour reconnaître la disposition de la matière ainsi colorable, je fis dissoudre par l'acide chlorhydrique étendu la concrétion minérale ; puis, examinant sous un grossissement de 1,000 fois une coupe très-mince et longitudinale, je parvins à voir la substance teinte en bleu-violet, formant des disques appliqués contre les parois des longues cavités cellulaires de la coralline officinale. Une telle sécrétion de cellulose très-faiblement agrégée vient confirmer les précédentes démonstrations.

Ainsi donc, les dispositions organiques des concrétions minérales, l'analyse élémentaire et les propriétés caractéristiques de la cellulose, s'accordent avec les déterminations organographiques de M. Decaisne, pour classer parmi les végétaux ces algues qui, sur l'autorité de Lamouroux, comptaient naguère au nombre des Polypiers.

PROPRIÉTÉS DISTINCTIVES ENTRE LES MEMBRANES ÉPIDERMIQUES ET CELLULAIRES DES VÉGÉTAUX ET LES TISSUS TÉGUMENTAIRES DES INSECTES ET DES CRUSTACÉS.

Pendant que l'on imprimait la dernière partie de mes mémoires sur la composition chimique et les développements des végétaux, je voulus profiter de toutes les occasions offertes par

l'introduction de faits nouveaux dans la science, pour vérifier les principes généraux déduits de mes recherches. L'intéressante communication de M. Lassaigne[1] ne pouvait donc manquer d'attirer mon attention, car, tout en rectifiant nos idées relativement à l'une des conclusions d'un travail de M. Odier, elle laissait des doutes encore sur l'analogie qui pouvait exister entre les téguments des insectes et les membranes végétales.

M. Odier, dans une série d'expériences sur les élytres et téguments des coléoptères, et sur les carapaces des crustacés, avait observé plusieurs propriétés remarquables de ces tissus, notamment leur résistance aux solutions bouillantes des alcalis caustiques et des acides étendus. Après les avoir épurés par ces agents, il les soumit à la calcination, et reconnut que les produits gazeux avaient une réaction acide; qu'enfin ces membranes n'étaient pas colorées en jaune par l'acide azotique. Trouvant ainsi, dans cette substance organique, des caractères qui la distinguaient des autres tissus animaux, il lui donna un nom particulier et crut devoir la rapprocher du *ligneux*. « Il est fort remarquable, dit l'auteur, de retrouver dans la charpente des insectes la même substance qui forme celle des végétaux[2]. »

La réaction acide observée dans les produits de la calcination de cette substance, fait remarquable d'ailleurs, laissa croire à M. Odier qu'elle ne contenait pas d'azote. Une telle conclusion n'était pas suffisamment justifiée par les expériences mêmes de l'auteur, et elle s'est trouvée inexacte.

M. Lassaigne obtint, en effet, du cyanure de potassium et en égales proportions en faisant réagir le potassium sur les parties résistantes extraites, soit des élytres de coléoptères, soit des chenilles du *Bombyx mori*.

Cette rectification était importante, sans doute, mais elle ne

[1] *Comptes rendus*, mai 1843, p. 1087.

[2] Il la nomma *chitine*, du mot χιτών, enveloppe. Son travail fut imprimé, en 1821, dans les Mémoires de la société d'histoire naturelle de Paris, et un extrait reproduisit ses conclusions dans le Dictionnaire classique d'histoire naturelle.

détruisait pas l'hypothèse d'après laquelle les enveloppes des insectes eussent été assimilables aux membranes végétales, car nous savons aujourd'hui que, dans certaines parties de l'organisme des plantes, la cellulose est injectée de substances azotées, et que précisément cette circonstance se présente toujours relativement à la cuticule épidermique ou à l'épiderme entier[1].

Ainsi donc la présence d'une matière azotée dans les enveloppes des insectes n'était pas incompatible avec l'analogie, l'identité même de composition chimique entre cette membrane et la substance épidermale des plantes ; c'eût été une exception applicable à un si grand nombre d'êtres du règne animal, qu'elle pouvait bien compromettre la règle; il eût été de mon devoir de le dire, et par ce motif je tenais à le savoir des premiers.

Les recherches que j'ai entreprises pour résoudre la question ont porté sur les tissus épurés par les solutions alcalines bouillantes, l'eau, l'alcool et l'éther, et, de plus, l'acide chlorhydrique étendu, lorsque la substance était incrustée de carbonate calcaire. Obtenus ainsi des chenilles, des araignées, des mouches, de quelques autres insectes et des écrevisses, ils ont donné les résultats suivants, qui se sont reproduits encore relativement aux chrysalides.

La substance organique de ces différentes origines produisait des vapeurs acides par la calcination, comme l'avait vu M. Odier; elle donnait de l'azote comme l'avait dit M. Lassaigne; il a même suffi de la chauffer avec un alcali caustique pour obtenir un dégagement d'abondantes vapeurs ammoniacales. Cet effet commençait dès que la soude, par exemple, entrait en fusion, désagrégeant dès lors, aussi, sans carbonisation sensible, le tissu, qui était aussitôt devenu soluble dans l'eau avec l'alcali.

Les membranes résistantes en question ne sont dissoutes ni par l'acide acétique concentré, ni par l'ammoniaque en solution saturée : en cela elles ressemblent à la cellulose, mais elles en dif-

[1] Ce fait fut établi dans un mémoire que j'ai présenté à l'Académie en août 1840. (Voyez les Comptes rendus de 1841, p. 799.)

fèrent par beaucoup de propriétés. Une solution aqueuse alcoolisée d'iode les contracte et les teint en jaune-orangé; si l'on fait intervenir alors l'acide sulfurique, la désagrégation arrive et la nuance se fonce sans qu'il se développe aucune coloration violette ou bleue. Ces réactions et beaucoup d'autres, ainsi que la présence de l'azote, ne permettent pas de confondre ces tissus avec la cellulose pure; mais d'autres expériences étaient nécessaires pour les distinguer nettement des membranes épidermiques végétales. Parmi les faits que j'ai observés, je citerai seulement les plus concluants à cet égard.

1° L'acide sulfurique à 1, 5 équivalents désagrége et dissout en un instant les téguments des insectes, tandis qu'il attaque à peine, en quelques heures, le tissu de la cuticule épidermique des végétaux: l'acide sulfurique à 3 équivalents d'eau désagrége en quelques heures le tissu animal, tandis que l'épiderme des plantes résiste durant plus de quinze jours.

2° L'acide azotique ordinaire à 4 équivalents d'eau dissout immédiatement, à froid, presque son volume des téguments des insectes, tandis qu'il laisse à la pellicule végétale, durant plus d'un mois, sa structure et ses formes extérieures.

Cette réaction est remarquable, surtout quand elle s'applique aux enveloppes épaisses des écrevisses. Plongées quelques instants dans l'acide, elles s'en imbibent et deviennent diaphanes; laissant alors égoutter tout le liquide libre, les membranes conservent leurs formes, mais bientôt après leurs bords se fondent, et, la fusion se propageant, toute la substance solide, organisée, se change en un liquide sirupeux, incolore et transparent. Si l'on ajoute en ce moment de l'eau ou de l'alcool en grand excès, la matière organique se précipite; bien lavée elle reprend en partie ses caractères primitifs; les solutions alcalines ou acides étendues ne l'attaquent pas sensiblement; si, au contraire, on avait laissé continuer la réaction de l'acide azotique concentré, la solution sirupeuse serait devenue très-fluide et n'eût plus été précipitable par l'eau.

3° L'acide chlorhydrique, à 21° ou 6 équivalents d'eau, pénètre, rend diaphane, désagrége et dissout en quelques minutes les téguments des insectes. La solution n'est pas précipitée par l'eau; l'alcool la précipite en gelée opaline. Le même acide agit très-lentement sur l'épiderme des plantes et l'attaque à peine en quelques jours.

4° Toutes les solutions précédentes de la matière animale, étendues et neutralisées à l'aide d'une base soluble, furent abondamment précipitées par le tanin; le dépôt, lavé, séché, donna des vapeurs alcalines par la calcination. Rien de semblable n'eut lieu, dans les mêmes circonstances, relativement à l'épiderme végétal.

5° Une solution, presque saturée à froid, de *chlorure de chaux* pulvérulent, mise en contact avec chacune des deux substances, puis portée durant quelques minutes à l'ébullition, désagrége et brûle rapidement les téguments des insectes, tandis qu'elle attaque lentement l'épiderme d'un *Cactus peruvianus*, ménageant plus la cuticule que la cellulose sous-jacente.

On pouvait présenter encore une objection, en supposant que les propriétés particulières des tissus de ces deux origines tenaient à des cohésions spéciales et non à une composition réellement différente.

Des analyses élémentaires devenaient donc indispensables pour lever tous les doutes. Elles ont donné les résultats suivants, parmi lesquels j'ai indiqué l'analyse de l'épiderme végétal, épuré et même disséqué, de façon à obtenir isolément la composition de la cuticule épidermique. (Voir aussi le cinquième mémoire, page 112).

SUBSTANCES ANALYSÉES.	POIDS employé.	AZOTE obtenu.	PRESSION.	TEMPÉRATURE.	CENDRE déduite.	AZOTE p. 100.
Membranes de carapace d'écrevisse.	0^{gr},1354	10^{cc},5	76,1	+ 21	0,91	8,935
Téguments des vers à soie.....	0,103	8	76	19	1,40	9,045
Épiderme de pomme de terre....	0,443	8,12	76,18	21	14	2,431
Épiderme de *Cactus peruvianus* d'un an.....	0,445	7,26	76,15	19,1	8,8	2,059
Idem de deux ans.....	0,523	3,62	77,3	19	12	0,906
Cuticule de l'épiderme précédent..	0,222	5	76	18,1	5,6	2,551
Cellulose.....	//	//	//	//	//	//

Ce tableau fait ressortir des différences plus tranchées encore que n'en pouvaient offrir les réactions précédentes, entre les tissus tégumentaires des crustacés et des insectes de divers ordres [1], et les substances formant la pellicule periphérique des végétaux phanérogames.

Dans les plantes comme dans leur épiderme, on retrouve toujours d'ailleurs, et en fortes proportions, la cellulose dont l'azote ne fait point partie constituante, la cellulose qui, ne se rencontrant dans aucun des tissus animaux, reste la base d'une distinction fondamentale entre ceux-ci et les végétaux dont elle relie toute la structure.

[1] La composition élémentaire de ces tissus, qui offre une proportion d'azote plus faible que celle des matières azotées neutres, la réaction acide des gaz de leur calcination et la réaction alcaline des vapeurs obtenues en calcinant la portion unie au tanin, me semblent autant de motifs pour croire que ces tissus contiennent deux principes immédiats, dont l'un pourrait bien se rapprocher, par sa composition élémentaire, des autres membranes animales.

PROPRIÉTÉS NOUVELLES DES ACÉTATES ET DU PROTOXYDE DE PLOMB ANHYDRES ET HYDRATÉS; APPLICATIONS AUX ANALYSES ORGANIQUES.

Je fus conduit à entreprendre ce travail en 1837, après avoir étudié le moyen de contre-balancer la force qui unit la base à l'acide de l'un des acétates de plomb, résultat qui me paraissait utile, surtout pour déterminer les poids équivalents des principes immédiats, neutres ou indifférents des végétaux. L'application que j'avais pu faire de ces données à préparer l'amylate et le dextrinate de plomb (voyez 2e mémoire, page 321), me fit espérer que le même moyen servirait à combiner en proportions définies plusieurs autres substances organiques indifférentes. Enfin, il pouvait être utile de présenter un exemple des avantages que procure l'emploi du microscope pour l'étude des cristallisations ayant l'apparence de précipités amorphes.

Je crois être parvenu au but que je m'étais proposé et, de plus, à faire connaître plusieurs procédés à l'aide desquels on obtient bien pur l'acétate tribasique, dont on ignorait la véritable cristallisation; à démontrer la préparation par voie humide du protoxyde de plomb à l'état de cristaux anhydres purs et diaphanes; à prouver l'existence, jusqu'ici douteuse, d'un hydrate de protoxyde de plomb, et sa préparation sous formes cristallines bien nettes; enfin, à indiquer des moyens faciles et sûrs de distinguer les uns des autres les acétates de plomb et leurs mélanges.

J'exposerai plusieurs caractères nouveaux de l'acétate neutre de plomb, puis les phénomènes qu'offrent sa décomposition et celle de l'acétate tribasique, lorsqu'elles donnent naissance aux produits ci-dessus annoncés.

CRISTALLISATION DE L'ACÉTATE NEUTRE PAR L'ALCOOL.

Une solution aqueuse d'acétate de plomb neutre, saturée à la température de + 22° centésimaux, que l'on agite un instant

avec son volume d'alcool à 0,95, ne se trouble pas, mais donne, au bout de plusieurs jours, une cristallisation en prisme volumineux nettement terminés. Il arrive parfois qu'au bout de 48 et même de 96 heures la cristallisation n'est pas encore commencée: si alors on agite, elle se fait rapidement sous la forme d'un précipité cristallin.

DÉGAGEMENT DE L'EAU DE CRISTALLISATION DE L'ACÉTATE NEUTRE DE PLOMB, À FROID ET DANS LE VIDE SEC.

L'acétate neutre placé dans le vide sec, à la température de 20°, commença bientôt à s'effleurir et perdit sa transparence; au bout de 12 heures on le réduisit en poudre, puis il fut replacé dans le vide.

48 heures après on en soumit 3 décigrammes à la calcination : ce sel éprouva la fusion ignée, entra en ébullition, puis se concreta et fut brûlé; il laissa un résidu formé en grande partie de globules métalliques. On voit qu'il présentait les caractères de l'acétate anhydre : en effet, la combustion ayant été rendue complète par l'acide azotique, le résidu pesa 205 milligrammes. La perte avait donc été de 95 milligrammes; ce qui donne, à peu de chose près, le rapport de l'équivalent du protoxyde à l'acide acétique, 205 : 95 : : 1394,5 : 646,2.

24 heures après, la portion laissée dans le vide avait encore éprouvé une légère déperdition d'eau accompagnée de traces d'acide; et une deuxième incinération fit voir que le rapport de l'oxyde aux substances dégagées en brûlant était : : 1394,5 : 641,5. On recommença le même essai au bout de 48 heures : la déperdition, encore un peu accrue, donnait la proportion 1394,5 : 626; en effet, 3 décigrammes complétement brûlés laissèrent 207 milligrammes de protoxyde de plomb (207 : 93 : : 1394,5 : 626). Il paraissait donc évident que l'eau de cristallisation s'était, à très-peu près, entièrement dégagée en déterminant la décomposition de quelques particules du sel. Afin de s'en assu-

rer on laissa 12 heures encore l'acétate dans le vide, à la température de l'air, qui s'était alors abaissée à 15°; puis on procéda à son analyse élémentaire par l'oxyde de cuivre et à un nouvel essai par incinération. Voici les résultats de ces deux opérations.

L'incinération à l'air donna, à 0,0005 près, le même produit fixe que la précédente. 12 décigrammes brûlés par l'oxyde de cuivre donnèrent 6,24 d'acide carbonique et 2,01 d'eau.

D'où l'on déduit, pour la composition du sel de plomb,

EXPÉRIENCE.			CALCUL.	
Carbone.....	14,4	C^6.....	306,0...	15,0
Hydrogène.....	1,8	H^6.....	37,5...	1,8
Oxygène.....	15,0	O^3.....	300,0...	14,8
Oxyde de plomb.....	68,8	Pbo.....	1394,5...	68,4
	100,0		2038,0	100,0

Si l'on compare dans ces résultats le poids du résidu fixe à celui des substances volatilisées, on aura 8,264 : 3,736 : : 1394,5 : 630.

On voit donc, d'une part, que cette analyse s'accorde, à 0,01 près, avec le produit de l'incinération à l'air; qu'en outre, la proportion d'acide acétique représentée par le carbone serait seulement égale à 609 pour 1394,5 d'oxyde de plomb : il y avait donc eu perte de 34 sur 643, ou environ 5 pour 100, ce qui s'accorde bien encore avec l'observation de la réaction acide des produits volatilisés dans le vide. Enfin, le léger excès d'eau (21 sur 630) doit tenir à trois causes : la formation d'une minime quantité d'acétate tribasique à 1 équivalent d'eau, l'existence d'une petite proportion d'acétate neutre non encore privé de son eau, et peut-être le léger excès d'hydrogène que donne ordinairement l'analyse [1].

[1] La vapeur aqueuse d'une solution bouillante, même étendue d'acétate neutre de plomb, a constamment une réaction acide.

PHÉNOMÈNES DE LA DÉCOMPOSITION DE L'ACÉTATE NEUTRE DE PROTOXYDE DE PLOMB PAR L'AMMONIAQUE.

Suivant les proportions, la température et le mode d'opérer, les résultats de la décomposition de l'acétate de plomb neutre par l'ammoniaque peuvent être fort différents. Nous décrirons les procédés qui, par ces agents, donnent à part l'acétate tribasique, le protoxyde hydraté et le protoxyde anhydre, tous trois cristallisés.

Si l'on verse, goutte à goutte et en agitant, de l'ammoniaque dans une solution d'acétate neutre saturée à + 22°, étendue de 2 volumes d'eau, chaque addition donne lieu à un équivalent d'acétate d'ammoniaque et d'acétate de plomb tribasique, mais tout reste dissous.

On dépasse même la proportion d'ammoniaque utile pour opérer la conversion complète en ces deux nouveaux acétates, et au point que le liquide développe une odeur sensible d'ammoniaque sans rien précipiter.

Cependant, peu à peu, au bout de plusieurs heures une très-lente cristallisation se manifeste en vases clos et sans changements de température appréciables.

ACÉTATE TRIBASIQUE FORMÉ SOUS L'INFLUENCE DE L'AMMONIAQUE ET OBTENU EN CRISTAUX.

On peut aisément observer cette réaction en opérant ainsi :

On porte 100 volumes d'eau à l'ébullition, qu'on soutient 20 minutes afin de chasser tous les gaz; on y ajoute 100 volumes de solution d'acétate neutre saturée à 30°; puis, lorsque le liquide est à la température de 70° centésimaux, on y ajoute en l'agitant 20 volumes d'ammoniaque liquide délayés dans 100 volumes d'eau à 60°. On laisse en repos, et une cristallisation lente dépose sur les parois du vase des prismes très-fins aiguil-

lés qui, sur divers points, s'opposent bouts à bouts, puis d'autres venant converger aux mêmes points ; on aperçoit en nombre croissant de belles aigrettes blanches satinées.

Si, toutes choses égales d'ailleurs, on diminue ou l'on augmente la proportion d'eau, la cristallisation pourra être beaucoup ralentie ou accélérée. Ainsi la solution d'acétate neutre, *saturée à + 20°*, traitée même à froid, comme nous venons de le dire, l'air extérieur étant à la même température, ne commencera qu'après quelques heures à donner des cristaux, dont le nombre s'augmentera durant plusieurs jours.

Si l'on ajoute l'ammoniaque à froid dans la même solution d'acétate neutre saturée, mais sans y ajouter d'eau, un abondant précipité aura lieu à l'instant même; il paraîtra blanc, opaque et amorphe. En l'examinant sous le microscope, on reconnaîtra qu'il est réellement formé par des cristaux prismatiques allongés et diaphanes; alors, en ajoutant un volume d'eau, portant à l'ébullition, puis laissant en repos refroidir, on obtient encore la cristallisation en houpes satinées visibles à l'œil nu.

COMPOSITION DE L'ACÉTATE TRIBASIQUE CRISTALLISÉ.

Les produits cristallins obtenus par les réactions précitées, lentes ou brusques, furent lavés avec toutes les précautions utiles pour éviter leur altération par l'acide carbonique de l'air; bien égouttés et pressés dans du papier à filtre, ils ne retenaient plus d'acétate d'ammoniaque, puisque la potasse en excès ne dégageait pas de traces de cette base volatile.

Désséchés pendant 12 heures dans le vide, à la température de 15°, ils donnèrent, à l'incinération complétée par l'acide azotique, les résultats suivants : 3 décigrammes laissèrent un résidu pesant 255 milligrammes, d'où l'on déduit 255 : 45 : : 41835 : 738; et la composition théorique $= 3\,PbO, C^8H^6O^3 + H^2O$. D'ailleurs, examinés sous le microscope, après être restés 48 heures dans le vide sec, on ne pouvait apercevoir aucune efflorescence.

Les cristaux avaient conservé leurs formes et leur diaphanéité.

Les liquides dans lesquels avait eu lieu la cristallisation de cet acétate en retenaient une quantité notable. Une partie fut effectivement séparée par une simple modification de la propriété dissolvante, à l'aide de l'alcool ou de l'esprit de bois ajoutés à volume égal dans ces solutions, et ce fut encore sous la forme de prismes aiguillés, plus ou moins fins ou microscopiques, que l'acétate tribasique de plomb se déposa : bien épuré et séché, il offrit d'ailleurs la même composition.

Cependant on avait jusqu'ici regardé l'acétate tribasique de plomb comme anhydre et incristallisable, ou cristallisable en tables opaques; il importait donc, pour donner quelque valeur à mes observations, de rechercher la cause de différences aussi notables et les moyens de reproduire les cristallisations nouvelles, en s'écartant moins des voies jusqu'alors suivies.

IDENTITÉ DE FORMES ET DE COMPOSITION ENTRE L'ACÉTATE TRIBASIQUE PRÉPARÉ PAR L'AMMONIAQUE ET L'ACÉTATE OBTENU DIRECTEMENT.

Je préparai, à cet effet, de l'acétate tribasique pur, en traitant une partie d'acétate neutre en cristaux par 1,5 de protoxyde de plomb, extrait en calcinant du carbonate, et 10 d'eau. La réaction ayant été favorisée par une ébullition durant trente minutes, on filtra le liquide, qui était alors rapproché au point de donner des pellicules cristallines opaques.

Par le refroidissement, il ne se déposa rien; cependant, au bout de deux jours, on vit quelques points blancs opaques offrant l'aspect de petites concrétions arrondies irrégulières. Quelques parcelles, examinées au microscope, offrirent les prismes aiguillés diaphanes qui sont un des caractères constants de l'acétate tribasique cristallisé.

Une portion du liquide rapprochée dans l'air sec privé d'acide carbonique, et un autre dans le vide, donnèrent des lamelles

opaques, sans formes arrêtées, et des concrétions amorphes; mais, sous toutes ces apparences, on distingua nettement, à l'aide du microscope, la cristallisation aiguillée du même acétate.

Une addition d'un demi-volume d'alcool ou d'esprit de bois détermina, lentement, ce dernier surtout, la même cristallisation et, en outre, l'agglomération des prismes fins en houppes mamelonnées, visibles à la loupe et à l'œil nu.

Plusieurs analyses de ces différentes formes apparentes de l'acétate tribasique donnèrent les mêmes résultats : ce fut toujours la composition représentée par 3, PbO, C^8 H^6 O^3 + H^2 O.

ACTION DE L'ACÉTATE D'AMMONIAQUE SUR LA SOLUBILITÉ ET LA STABILITÉ DE L'ACÉTATE TRIBASIQUE DE PLOMB.

Il restait toutefois à expliquer la formation si facile des cristaux en belles houppes soyeuses, par la décomposition de l'acétate neutre, à l'aide de l'ammoniaque : deux causes semblaient y concourir. D'une part, on pouvait admettre une réaction graduée qui, produisant avec lenteur l'acétate tribasique, lui laissait la facilité de disposer ses particules et ses cristaux symétriquement; et, en effet, nous avons vu que cette disposition a lieu même à froid.

Mais il se pouvait aussi que, dans la cristallisation plus volumineuse encore obtenue à chaud, l'acétate d'ammoniaque, formé simultanément, agît comme augmentant la propriété dissolvante de l'eau.

Une expérience simple le prouve : on traita à chaud de l'acétate tribasique par l'eau contenant de l'acétate d'ammoniaque dans la proportion de deux équivalents de ce dernier pour un du premier, et, après le refroidissement, on obtint les houppes de prismes irradiés; c'est d'ailleurs une nouvelle preuve de l'identité de l'acétate obtenu par les deux moyens.

Ici encore on a constaté que l'acétate d'ammoniaque agit comme simple dissolvant; car les cristaux, lavés, n'en retinrent

pas de traces sensibles. Le même sel augmente par sa présence la stabilité de l'acétate tribasique, car un excès d'un atome d'ammoniaque ne le décompose pas, tandis qu'une proportion moitié moindre produit à l'instant même un abondant précipité dans la solution saturée du même acétate, s'il est exempt d'acétate d'ammoniaque.

SOLUBILITÉ DE L'ACÉTATE TRIBASIQUE DANS L'ALCOOL ET L'ESPRIT DE BOIS ÉTENDUS D'EAU.

L'esprit de bois et l'alcool dissolvent l'acétate tribasique pur, et en proportions d'autant plus fortes qu'ils sont plus étendus d'eau ; on s'en assure à l'aide de la dextrine et de l'ammoniaque, ou par un courant d'acide carbonique. L'esprit de bois à 0, 96 le dissout encore à chaud, car filtré, puis étendu d'un volume d'eau, il est précipité par les réactifs ci-dessus, qui n'ont sensiblement rien démontré dans l'alcool à 0,96, essayé dans les mêmes circonstances. 100 d'eau pure à 100° dissolvent 18 parties d'acétate tribasique, dont il ne se sépare que lentement des traces après le refroidissement.

PROTOXYDE DE PLOMB CRISTALLISÉ PAR VOIE HUMIDE.

Nous avons dit qu'en décomposant l'acétate neutre par l'ammoniaque, on pouvait, au lieu de l'acétate tribasique, obtenir de l'hydrate de protoxyde de plomb cristallisé. En effet, si l'on verse à froid, *guttatim*, la solution de l'acétate neutre ou de l'acétate tribasique de plomb dans un grand excès d'ammoniaque pure liquide, chaque addition détermine un précipité blanc, opaque, pulvérulent.

Vu sous le microscope, il se compose tout entier de cristaux étoilés (prismes courts à quatre pans, terminés par des pyramides à quatre faces et réunis à angles droits). Diaphanes, incolores, ils laissaient discerner les lignes de leurs arêtes. Leurs dimensions

d'un sommet à l'autre étaient comprises entre 3 et 10 centièmes de millimètre.

Ces cristaux furent recueillis sur un filtre, lavés, égouttés, à l'abri de l'air, et séchés à 15° dans le vide sec pendant vingt-quatre heures.

Calcinés alors dans un tube clos, ils dégagèrent de l'eau, sans réaction acide, et prirent les teintes variées entre le jaune et l'orangé du protoxyde anhydre. Ce résidu, complétement soluble dans l'acide acétique, ne contenait, par conséquent, aucune trace de charbon ni de plomb métallique.

Voici les détails de cet essai :

Matière emploloyée = $0^{g},756$, eau = 0,020, PbO = 0,736, d'où 736 : 20 :: 4183 : 113,6 et la composition théorique : $3PbO, + H^{2}O$.

On doit éviter avec un grand soin l'action de l'acide carbonique de l'air, dont 0,01 seulement changerait notablement ces relations.

Le résidu de la calcination, examiné au microscope, offrait les mêmes cristaux, mais ils avaient perdu leur transparence et la netteté de leurs arêtes.

En traitant de la même manière l'acétate tribasique, à froid, par un grand excès d'ammoniaque, on obtint le même hydrate de protoxyde, mais en étoiles plus courtes la plupart et paraissant, sous le microscope, formées par la réunion de quatre octaèdres.

PRÉPARATION SIMULTANÉE DES CRISTAUX DU PROTOXYDE HYDRATÉ ET DU PROTOXYDE ANHYDRE.

On peut obtenir simultanément des cristaux de protoxyde anhydre et de protoxyde hydraté en faisant réagir à chaud un excès d'ammoniaque sur l'acétate neutre de plomb.

En effet, si dans 100 volumes d'eau bouillante on ajoute 4 volumes de solution d'acétate neutre saturée à + 30°, puis qu'on

mélange le tout avec 45 volumes d'ammoniaque à + 20, on verra, au bout d'une demi-minute, dans le liquide commencer une sorte de *pluie* de lamelles très-minces, à brillants reflets d'un blanc jaunâtre, et bientôt des lamelles semblables se grouper en houppes irradiées de centres communs, présentant à leur contact avec les parois du vase des moirures rayonnées et douées d'un vif éclat.

En même temps que le joli phénomène de cette cristallisation particulière, sur laquelle nous allons revenir, a lieu, on aperçoit de petits corps blancs, grenus, se précipiter, puis se réunir à part entre eux en séries linéaires droites ou contournées, affectant, à l'œil nu, des apparences cristallines et, sous le microscope, la forme de prismes courts rectangulaires. Terminés par des pyramides à quatre faces, ces petits prismes sont souvent réunis à angles droits.

Soumis à la calcination, ils donnèrent lieu aux mêmes phénomènes que les cristaux blancs plus petits, obtenus à froid. Leur composition est exactement aussi représentée par la formule $3PbO, H^2O$: l'hydrate de protoxyde de plomb en cristaux blancs retient donc un équivalent d'eau avec plus d'énergie que l'acétate neutre.

PROTOXYDE ANHYDRE EN CRISTAUX DIAPHANES.

Les lamelles brillantes, obtenues comme nous l'avons dit ci-dessus, peuvent être séparées par lévigation des cristaux d'hydrate, parce que leur forme ralentit leur précipitation ; recueillies sur un filtre, lavées par l'eau bouillie, pressées entre des feuilles de papier à filtrer, puis séchées pendant douze heures dans le vide sec, elles conservent leur nuance argentine avec un léger reflet jaune verdâtre et le brillant métallique. Sous le microscope, leur transparence est telle qu'on les distingue très-bien à travers les unes des autres, même superposées au nombre de six; leurs cassures sont rectilignes, anguleuses et nettes; entières, elles sont terminées en angles aigus opposés, et forment, isolées, des lames rhomboïdales.

Chauffées dans un tube, elles ne laissent rien dégager, si ce n'est quelquefois une proportion insignifiante d'eau interposée, sans doute, et qui produit une décrépitation marquée. La calcination fait varier leur nuance : elle tourne au jaune-orangé, qui pâlit par le refroidissement. Il ne s'est alors produit ni charbon, ni gaz, ni plomb métallique; la transparence des cristaux s'est conservée, ainsi que leur solubilité dans l'acide acétique et dans la solution d'acétate neutre de plomb. Réduits par l'hydrogène, $1^g,081$ donnèrent 1,004 milligrammes de métal; ce qui correspond au rapport 1395 : 1295 : leur composition est donc évidemment celle du protoxyde anhydre PbO.

PROTOXYDE ANHYDRE OBTENU SEUL ET CRISTALLISÉ.

Il me paraissait évident que l'augmentation de la température était la cause de la séparation du protoxyde à l'état anhydre, puisque la décomposition à froid, soit de l'acétate neutre, soit de l'acétate tribasique par un grand excès d'ammoniaque, donnait l'hydrate seul, et l'on pouvait admettre que, dans la préparation simultanée des deux oxydes, les portions le moins échauffées du liquide produisaient l'oxyde hydraté à l'instant du mélange. J'essayai donc d'obtenir à son tour le protoxyde anhydre isolé, en opérant la séparation à une température plus élevée ; je choisis l'acétate tribasique, parce qu'il exigeait moins d'ammoniaque.

100 volumes de solution saturée d'acétate tribasique furent mêlés à 50 volumes d'eau, et le tout porté à l'ébullition; et d'un autre côté, 50 volumes d'eau ayant été chauffés à 80°, puis mêlés avec 8 volumes d'ammoniaque, on réunit ces deux mélanges dans le premier vase qui était plongé dans un bain d'eau chauffée et soutenue à la température de 100°.

Au bout d'une minute, on vit quelques lamelles brillantes se grouper sur les parois et à la surface de la solution; en moins d'une demi-heure, plus étendues, elles formèrent une cristallisation de couleur jaune, un peu plus foncée que la nuance de

l'oxyde précédemment obtenu à l'aide d'une température moindre. Elles étaient nombreuses, adhérentes aux parois, en aigrettes douées d'un éclat métallique, et formées de lamelles lancéolées convergeant par leurs pointes vers un centre commun; il ne s'y trouvait pas alors sensiblement de cristaux hydratés. On remarquera que cette jolie expérience de la cristallisation du protoxyde anhydre peut se répéter dans un cours aussi facilement que la cristallisation de l'acétate tribasique, et d'une manière plus distincte et plus prompte que la plupart des cristallisations connues.

Le succès obtenu dans l'extraction de l'oxyde anhydre cristallisé me fit entreprendre de préparer l'oxyde hydraté sous forme de cristaux plus volumineux, plus nets et plus isolés, en un mot visibles à l'œil nu, tels qu'une partie d'entre eux se présentaient dans des dimensions microscopiques, lorsque la décomposition d'une goutte d'acétate tribasique avait lieu sur le porte-objet, au milieu d'un volume décuple d'ammoniaque étendue de deux volumes d'eau [1].

Il me parut convenable, pour cela, de diminuer l'énergie de l'agent de décomposition afin de rendre plus lente la réaction et dans les mêmes vues d'éviter toutes secousses et tout changement brusque dans la température.

CRISTALLISATION DE L'HYDRATE DE PROTOXYDE DE PLOMB EN OCTAÈDRES RÉGULIERS.

Après quelques expériences de tâtonnement, qui toutes approchèrent du but, voici le détail de l'opération qui réussit le mieux.

120 centimètres cubes de solution saturée d'acétate tribasique furent mêlés avec 60 parties d'eau pure, préalablement soumise durant une demi-heure à l'ébullition.

[1] J'ai remarqué sous le microscope que l'acétate neutre dans l'ammoniaque étendue donne à froid un mélange d'acétate tribasique et d'oxyde hydraté.

D'un autre côté, 4 centimètres cubes d'ammoniaque furent délayés dans 60 centimètres cubes d'eau, également privée de gaz, et refroidie à + 30°.

Les deux liquides, à la température de 28°, furent réunis dans le premier vase qu'on venait de placer dans un bain d'eau à 30°; agités un seul instant, on les livra au repos.

La solution conserva sa diaphanéité tout le temps que dura la réaction, et celle-ci ne s'annonça au bout d'une heure environ que par le dépôt de quelques rudiments de cristaux. Ceux-ci augmentèrent graduellement en nombre et en volume.

12 heures plus tard, ils étaient remarquables, surtout par leur puissance de réfraction qui, à la lumière du jour, et plus encore à celle d'une bougie, permettait de les faire apparaître étincelants des rayons colorés du spectre, comme de petits diamants.

24 heures après, tous ces caractères étaient plus prononcés encore. Examinés à l'aide d'un faible grossissement du microscope simple, ils montrèrent les formes d'octaèdres réguliers, tronqués vers la paroi du vase, et à l'exclusion absolue de toute agglomération en étoiles et de prismes droits.

Bien que ces diverses configurations parussent évidemment engendrées par les cristaux obtenus isolés en dernier lieu, la faible proportion d'ammoniaque employée ici pouvant faire croire à la production de l'acétate sébasique, je dus procéder à leur analyse [1].

Après 24 heures de séjour dans le vide sec, à la température de 15°, ils furent calcinés dans un tube clos. Il se dégagea de l'eau exempte de réaction acide; le résidu jaune, orangé pendant la calcination, devint jaune pur après le refroidissement; il ne contenait pas de traces de plomb métallique; son poids était

[1] Le liquide au milieu duquel l'hydrate de protoxyde de plomb avait été déposé dans cette dernière expérience retenait en dissolution de l'acétate tribasique indécomposé, car l'addition de 2 volumes d'alcool anhydre l'en séparait en grande partie, lentement cristallisé, avec tous ses caractères et sa composition.

moindre, dans la proportion correspondante à la formule, $3PbO, H^2O$. Ces cristaux étaient donc en effet de l'hydrate de protoxyde de plomb tribasique.

COMPLÉMENT DE L'ANALYSE DES CHOUX-FLEURS.

La proportion considérable d'azote trouvée dans les bourgeons blancs, jeunes et tendres des choux-fleurs, pouvait être vérifiée par la détermination précise du carbone et de l'hydrogène, car alors la composition élémentaire totale connue devait s'accorder avec la composition immédiate, soit obtenue directement, soit déduite par le calcul des éléments constitutifs des substances neutres azotées, des matières grasses et de la cellulose. Je ne négligeai pas ce moyen de contrôler plusieurs de mes résultats précédents.

Voici les détails et les nombres de cette analyse :

Les bourgeons, coupés et soumis à la dessiccation, aidés par une température de 110° dans le vide, perdirent 88,1 pour 100. (Ces choux-fleurs avaient été coupés la veille, tandis que j'avais opéré, lors de l'ancienne analyse, sur des choux-fleurs coupés à l'instant et qui perdirent 90,7 pour 100.) L'incinération laissa, comme dans la première analyse, un résidu blanc alcalin pesant 11,1 pour 100 de la substance sèche.

J'employai pour l'analyse élémentaire 420 milligrammes, qui donnèrent 698 milligrammes d'acide carbonique et 219 d'eau, d'où l'on déduit, pour 100 parties en poids : carbone 45,95 et hydrogène 5,78.

L'analyse pour la détermination de l'azote, reprise sur la même matière, donna les résultats suivants :

Substance sèche employée, 334.

Volume du gaz obtenu, 62 centimètres cubes.

Pression barométrique, 0,765; température, 21,55.

Ce qui correspond à 10,65 d'azote pour 100 de choux-fleurs desséchés, et se trouve parfaitement conforme à l'ancienne analyse.

On pouvait donc compléter la composition élémentaire, en ajoutant aux précédentes données (voyez page 206 du premier mémoire, VIII[e] vol. *Savants étrangers*) le carbone et l'hydrogène déterminés ici; on arrive ainsi à la composition suivante :

	SUBSTANCE NORMALE desséchée.	MATIÈRE ORGANIQUE, cendres déduites.
Carbone	45,95	51,62
Hydrogène	5,78	6,47
Oxygène	26,61	29,94
Azote	10,66	11,97
Matière inorganique	11	0
	100	100

Si l'on veut comparer approximativement ces nombres avec ceux que donneraient les sommes réunies des compositions élémentaires des principes immédiats, on pourra admettre les 0,7182 ou 0,72 de matières neutres azotées indiquées dans notre premier mémoire, et qui se déduiraient encore des données nouvelles; y ajouter 0,05 de matières grasses, puis enfin 0,23 de cellulose et principes immédiats à composition équivalente. On obtiendra de cette manière, en attribuant d'ailleurs aux substances neutres azotées une composition moyenne de 52 de carbone et 7 d'hydrogène; à la matière grasse, 78 de carbone et 10 d'hydrogène; enfin, à la cellulose, sa composition bien connue, les équations suivantes :

	SUBSTANCES AZOTÉES.	MATIÈRE GRASSE.	CELLULOSE et ses congénères.	
Carbone	$0{,}72 \times 52 = 37{,}44$	$0{,}05 \times 78 = 3{,}90$	$0{,}23 \times 44{,}4 = 10{,}20$	51,54
Hydrogène	$0{,}72 \times 7 = 5$	$0{,}05 \times 10 = 0{,}5$	$0{,}23 \times 6{,}1 = 1{,}40$	6,90
Oxygène	$0{,}72 \times 25 = 18$	$0{,}05 \times 12 = 0{,}6$	$0{,}23 \times 49{,}5 = 11{,}38$	30,04
Azote	$0{,}72 \times 16 = 11{,}52$	//	//	11,52
				100

On voit que la composition élémentaire totale, calculée d'après la composition des principes immédiats, se rapproche trop des résultats de l'analyse directe, pour qu'il puisse s'être introduit aucune erreur notable dans nos données précédentes, ni dans les lois générales de la composition chimique des végétaux, que nous résumerons à la fin de ce mémoire.

COMPOSITION DU GLUTEN PUR.

Après avoir indiqué, dans mon mémoire sur la cellulose, les parties du tissu du périsperme des blés qui contiennent le gluten, et montré que cette substance est renfermée avec des granules d'amidon dans de grandes cellules à parois très-minces en cellulose, j'avais cherché le moyen d'obtenir le gluten pur et inaltéré, conservant sans altérations sa souplesse, son extensibilité en lames élastiques membraniformes.

J'indiquai, en 1840, dans une séance de la société philomatique, le procédé suivant, au moyen duquel j'étais parvenu à ce but.

On prépare, avec 100 de farine de gruaux blancs et 60 d'eau, une pâte un peu plus ferme que pour le pain; on laisse l'hydratation se compléter pendant environ 38 minutes, puis on procède à l'extraction du gluten brut, en malaxant cette pâte dans l'eau.

Le produit, étendu et desséché en lames très-minces, est divisé au pilon, puis mis en digestion avec l'éther, qu'on renouvelle chaque jour jusqu'à épuisement complet des matières grasses et colorantes jaunes.

On fait dessécher alors le gluten qui, en cet état, est presque entièrement insoluble à froid dans l'alcool anhydre, dans l'alcool très-faible et dans l'eau. Après plusieurs tâtonnements, je suis parvenu à reconnaître qu'un mélange de 40 d'eau et 60 d'alcool en volume, marquant 60° à l'alcoomètre, pouvait dissoudre à froid, et plus facilement encore à 35 ou 40°, la portion vérita-

blement glutineuse, qu'on extrayait ensuite par évaporation et dessiccation dans le vide. Quant à la portion restée indissoute, elle est tenace et contractile, mais très-peu extensible.

Le gluten pur ainsi obtenu, tel que je le présentai à la société, est blanc et diaphane; il s'hydrate vite en absorbant deux fois et demie son poids d'eau, et reprenant son élasticité dès qu'on le plonge dans l'eau. Le considérant alors comme plus pur, plus blanc, plus diaphane qu'il n'avait encore été obtenu, je le soumis à l'analyse, préalablement desséché à 125° dans le vide.

Voici l'indication des détails de cette opération :

Poids du gluten employé, 723 milligrammes; gaz azote obtenu, 98 cent. cubes ;

La pression barométrique étant de 767 millimètres, et la température de 9° centésimaux.

On déduit de ces nombres 16,46 d'azote pour 100 de gluten pur.

SUPPLÉMENT AUX ANALYSES DES SÉVES.

En terminant mon premier mémoire sur la composition chimique des végétaux, j'ai donné les analyses des substances organiques contenues dans plusieurs parties des plantes (p. 206, vol. VIII, *Savants étrangers*), et notamment dans les jeunes organismes, et dans la séve extraite par déplacement, c'est-à-dire en faisant infiltrer de l'eau pure dans les conduits séveux et recueillant le liquide qui avait été chassé ou déplacé par l'eau, puis extrayant par évaporation les substances contenues dans ces liquides. Depuis lors (au mois d'avril 1841) M. Brongniart voulut bien mettre à ma disposition, pour l'analyser, la séve montante qu'il obtenait directement, par suite d'autres expériences, sur un pied de *Virgilia* âgé de 14 ans (*Virgilia lutea*, f. légumineuses, t. papilionacées). Je m'empressai de profiter de cette occasion pour vérifier et étendre mes précédentes observations, me proposant surtout de déterminer les proportions de substances

dissoutes dans cette sève, la composition élémentaire des matières organiques et les quantités de substances inorganiques; enfin, de comparer les proportions des substances tenues en dissolution dans la sève à plusieurs époques de la végétation.

La sève du premier envoi occupait un volume de 555 centimètres cubes; elle marquait 0°,52 à l'aréomètre Baumé, la température étant + 14°; sa réaction était légèrement acide. Évaporée à sec, elle devint plus acide, aromatique, et développa une odeur de petit-lait. La dessiccation étant complétée à 100° dans le vide, le résidu pesait $9^{gr},701$, ce qui représente 1,72 de matière solide pour 100 de sève. $7^{gr},3$ de substance solide donnèrent, à l'incinération, $0^{gr},426$ de substance inorganique ou 5,83 pour 100. Les cendres étaient très-alcalines, et se composaient de carbonate, silicate et phosphate de chaux, de magnésie, de potasse et de soude.

Le résidu de l'évaporation était jaunâtre, très-hygroscopique; les gaz et vapeurs de la calcination étaient acides, tandis que les extraits des sèves obtenus par déplacement du pin *laricio* ou du bouleau avaient donné par la calcination des vapeurs alcalines.

L'extrait sec de la sève du *Virgilia* fut soumis à l'analyse élémentaire pour la détermination de l'azote.

Voici les détails de cette analyse :

Poids de la substance sèche employée	$1^{gr},160$
Matière inorganique	0 ,067
	1 ,093

Volume d'acide carbonique = 12^{cc}; température = 13°,5; pression barométrique 0,757; ce qui donne, pour 100 de substance normale sèche :

Azote	1,217
Et pour 100 de la matière organique	1,292

Le 16 avril, je reçus 667 centimètres cubes de sève écoulée du tronc du même arbre. Elle était légèrement acide; l'évapo-

ration développa l'odeur aromatique et lactescente; l'acidité augmenta, et des pellicules membraniformes se produisirent encore. Le résidu était, comme la première fois, jaunâtre, très-hygroscopique; desséché à 100°, il pesait 10gr,515 ou 1,57 pour 100 du liquide employé; il donnait, à la calcination, des vapeurs acides: mais, calciné avec le contact de la potasse, il dégagea des vapeurs ammoniacales. Ce liquide séveux présentait donc les mêmes caractères que la première séve examinée; seulement, il contenait un peu moins de substance en dissolution.

La dernière séve écoulée, du 17 au 20 avril, occupait un volume de 225 centimètres cubes. Pendant le rapprochement à siccité, elle présenta les phénomènes ci-dessus décrits et laissa un résidu semblable aux précédents; son poids, après dessiccation à 100°, fut égal à 3,772 milligrammes, ce qui équivaut à 1,5 pour 100 du poids du liquide. Ainsi la quantité de matière dissoute dans la séve était encore un peu diminuée. 560cc de séve obtenus d'une branche laissèrent, après l'évaporation, un résidu pesant 7,45, qui, desséché à 100°, se réduisit à 6,75, ce qui correspond à 1,49 du 100. Les propriétés de ce résidu étaient les mêmes que celles des résidus ci-dessus examinés.

Les résultats de ces essais et de l'analyse élémentaire différaient beaucoup des résultats obtenus lorsque j'avais opéré, en 1837, sur des séves extraites par déplacement; en effet, les extraits paraissaient aujourd'hui beaucoup plus difficiles à dessécher. La réaction des gaz de leur calcination était acide, au lieu d'être alcaline; la proportion de substance azotée ou d'azote y était très-notablement moindre, ainsi que la matière inorganique. De telles différences tenaient-elles à des propriétés spéciales de la plante, ou ne devait-on pas plutôt les attribuer au mode d'extraction de la séve? On pouvait effectivement comprendre qu'en traversant la tige et les branches de l'arbre sur pied, la séve, sous les influences de la végétation, avait fourni, tout en cheminant, une partie des substances alimentaires, notamment des matières azotées et même des sels minéraux, aux tissus environnants, tandis

que l'arbre, abattu et soumis à une sorte de lavage intérieur, devait céder, non-seulement sa séve entière à l'eau, mais encore une partie des substances organiques et inorganiques récemment déposées autour des conduits séveux.

Les conjectures que nous venons d'exposer ne pouvaient, au surplus, avoir de valeur qu'autant que des faits positifs viendraient les confirmer. Dans la vue de parvenir à cette vérification, je me proposai d'extraire, par infiltration ou déplacement, la séve du *Virgilia*. M. Brongniart, jugeant aussi ces expériences utiles, voulut bien mettre à ma disposition une forte branche de cet arbre. Je la plaçai aussitôt verticalement, et autour de la section supérieure (qui, sur l'arbre, était la plus rapprochée de la souche), je formai, avec une cloche ouverte, assujettie par une lanière en caoutchouc et par une ligature, un vase, dans lequel on versa de l'eau distillée. Aussitôt la séve chassée, les produits du lavage des conduits séveux s'écoulèrent par le bout opposé. Cette solution fut évaporée; elle donna un extrait beaucoup moins hygroscopique que les résidus des séves normales du même arbre. Cet extrait donnait à la calcination des vapeurs alcalines directement[1]; on le soumit à l'analyse, et il donna les résultats suivants :

Substance sèche employée $0^{gr},361$; volume d'azote obtenu 12^{cc}; température 19°; pression 7665.

Un essai d'incinération donna, pour 100 de la matière, 29,92 de cendres. De ces données on déduit :

La proportion en poids dans la substance desséchée..... = 3,853 d'azote pour 100.
——————— dans la matière organique seule... = 5,498 *idem*.

Cette dernière analyse indique donc une composition élémentaire très-rapprochée dans les séves extraites par déplacement, soit du *Virgilia*, soit du bouleau ou du pin *laricio*.

[1] La branche, laissée deux jours à sec, fut une deuxième fois soumise au même traitement. Le liquide extrait par infiltration fut évaporé; les 725 centimètres cubes écoulés ne donnèrent que 11 centigrammes d'extrait : celui-ci était peu hygroscopique et dégageait par la calcination des vapeurs directement ammoniacales.

COMPOSITION DU LAIT DE LA NOIX DE COCO[1].

Le liquide lactescent contenu dans la noix de coco, lorsque le tissu de l'amande commence à s'organiser, donne à l'analyse : 1° de l'eau, qui forme la plus grande partie du poids de ce liquide; 2° les substances azotées, sous les trois états qui précèdent et accompagnent toutes les formations végétales; 3° des globules oléiformes, contenant une substance grasse cristallisable et une autre fluide; 4° plusieurs sels; 5° une proportion de sucre assez considérable pour que la solution limpide rapprochée se soit prise en une masse de cristaux blancs, dont les formes, la composition et les propriétés appartiennent exclusivement au sucre de cannes : il sera facile de s'en assurer, en examinant l'échantillon que j'ai déposé sur le bureau de l'Académie; 6° enfin, de la cellulose formant les cellules ellipsoïdales, à très-minces parois, dans lesquelles s'enveloppent les corpuscules azotés et les substances ci-dessus, et qui s'agrégent par degrés et en gagnant de la périphérie de l'amande vers le centre, qui se solidifie en dernier lieu par une semblable organisation.

SUCRE DES FRUITS DU *CACTUS OPUNTIA*.

M. le général Saldanha ayant bien voulu me remettre toute la provision des fruits de cactus qu'il avait fait venir du Portugal à Paris pour les analyser, il s'en est trouvé deux ou trois seulement assez peu altérés pour les soumettre à cet examen. Outre les principes qui toujours président à l'organisation végétale et que je viens de rappeler, ces fruits contiennent, non du sucre de cannes, comme celui qui donne une saveur douce au *lait* des noix de coco, mais de la glucose ou sucre de raisin.

[1] J'ai cru devoir rapporter dans ces analyses supplémentaires la composition de cette substance et des fruits du *Cactus opuntia*, composition que j'avais présentée, en 1840, dans mon mémoire sur la cellulose. (Voir *Annales des sciences naturelles*, août 1840.)

Les cristaux groupés en houppes irradiées de lamelles rhomboïdales très-minces et peu consistantes que j'en ai obtenus ne peuvent laisser aucun doute sur sa nature; quant aux proportions, elles s'élevèrent à plus de 12 p. 100, si, ce qui est d'ailleurs probable, l'altération d'une partie de ce sucre était accidentelle et devait exclusivement être attribuée aux influences subies durant les transports.

COMPOSITION DES FRUITS DU MAÏS.

Nous avons vu, en examinant une coupe du fruit du blé, qu'une rangée de cellules rapprochées de la périphérie du périsperme renferme des sécrétions oléifères. Le fruit du maïs présente deux rangées de cellules semblables; le cotylédon est, d'ailleurs, beaucoup plus volumineux dans cette céréale. Il pouvait donc être intéressant d'étudier la composition chimique de ce fruit, et les rapports avec la composition de ses différentes parties. J'en donnerai une idée suffisante en transcrivant ici les résultats des recherches que j'ai entreprises à cet égard avec M. Bonafous, pour son grand ouvrage sur le maïs [1] : voici l'analyse immédiate du fruit entier, du maïs à gros grains venu à parfaite maturité.

Amidon	71,18	100
Substances azotées insolubles dans l'eau à 100°	11,66	
Huile grasse	8,75	
Ligneux (cellulose)	6,17	
Matière azotée soluble	0,60	
Dextrine et sucre	0,44	
Sels de soude, potasse, chaux, acide phosphorique, silice, oxyde de fer, soufre, huile essentielle et matière colorante	1,20	

Afin de constater les proportions relatives de ces principes dans chacune des parties des *graines*, on les laissa s'imbiber d'eau à froid pendant 3 heures, puis on enleva avec précaution l'épisperme. Coupant alors par un plan dans l'axe de la radicule le

[1] Voyez page 124 de l'Histoire naturelle du maïs, in-fol. 1836; chez Mme Huzard.

fruit en deux parts, on peut séparer le périsperme, dégager l'embryon du corps cotylédonaire et isoler celui-ci.

Les premiers produits de cette dissection, pesés après les avoir desséchés, offrirent les rapports suivants en poids.

Épisperme	6
Périsperme	79,95
Cotylédon	12,53
Corps embryonnaire	1,52
	100

On rechercha après cette opération quelle était la substance prédominante dans chacune de ces parties.

1° L'épisperme présentait 47,5 pour 100 de ligneux;

2° Le périsperme, formant à peu près les 0,8 du poids de toute la graine, contenait les substances suivantes dans les proportions indiquées :

Amidon	80
Substance azotée	13,03
Ligneux (cellulose)	2,90
Huile	1,55
Sels et diverses substances de l'analyse générale	2,52
	100

Ainsi, dans le périsperme, la proportion d'amidon s'est trouvée plus forte, la proportion de ligneux inférieure, et celle de l'huile bien moindre que dans les produits de l'analyse générale.

3° Le cotylédon contenait 63 p. 0/0 d'huile, proportion beaucoup plus considérable que celle reconnue dans le périsperme et dans les autres parties de la graine.

4° Enfin, dans le corps embryonnaire séparé du cotylédon, la substance azotée, pour la plus grande partie insoluble dans l'eau bouillante, dominait au point que le corps embryonnaire calciné donnait directement d'abondantes vapeurs ammoniacales; la substance ligneuse (cellulose) n'en constituait que les 0,06.

Or, en réunissant les quantités de chacune des substances trouvées dans les parties organiques du fruit, et, d'après les proportions de celles-ci dans la masse, l'analyse partielle se rap-

proche assez des résultats de l'analyse générale pour que toutes ces données puissent être considérées comme exactes.

Les substances contenues, pour la plus grande partie, dans les organes de la graine sont donc :

Le ligneux (ou la cellulose) dans.....	l'épisperme;
L'amidon et les matières azotées dans.....	le pérismerme;
Les matières azotées dans.....	l'embryon;
L'huile dans.....	le cotylédon.

Considéré sous le rapport économique, le maïs, d'après sa composition, serait au premier rang des céréales. En effet, outre sa proportion de matière azotée, presque égale à celle des grains qui en renferment le plus, l'huile douce et comestible qu'il contient dans une proportion supérieure ajoute à ses propriétés alimentaires, en sorte que très-peu de productions naturelles réunissent mieux que le maïs les principes nécessaires pour compléter les propriétés nutritives applicables à l'homme et aux animaux.

La contexture de la graine permet aussi de se rendre compte de certaines opérations usuelles. Lorsque, par exemple, on fait sécher le maïs au four, la saveur change et devient plus agréable, parce que la substance huileuse se distribue, par infiltration, dans la partie amylacée qui enveloppe le cotylédon : il en résulte une sorte d'assaisonnement spontané par le mélange de deux substances qui, chacune isolément, avaient une saveur moins agréable.

On peut enfin expliquer par l'oxygénation ou le rancissement de la matière huileuse la détérioration de la farine du maïs plus prompte que celle du blé, et concevoir de quelle manière on retarde cette sorte d'altération, lorsque l'on conserve les graines sans les moudre.

L'huile alors est presque complétement mise à l'abri du contact de l'air par le tégument des fruits, tégument assez peu perméable pour que le fruit, chauffé brusquement, éclate avec explosion, et présente à nu le périsperme gonflé et comme neigeux aussitôt que la vapeur, retenue sous une assez forte pression, parvient à se développer.

On voit donc reparaître ici les substances azotées, le sucre ou ses congénères, les matières grasses, etc. dont j'ai démontré la présence dans les fruits des céréales, des dattiers, etc.

La composition des fruits, qui rassemble autour des appareils reproducteurs des plantes les principes immédiats de la nutrition végétale, s'était présentée dans les analyses que nous avons faites, M. Henry et moi, des semences de l'*Arachis hypogea*, des amandes de l'*Amygdalus sativa*. Nous l'avons retrouvée encore dans les tubercules des batates; c'est ce que prouvent les passages suivants de ces travaux.

« D'après les expériences ci-dessus indiquées, les amandes des semences de l'*Arachis hypogea* se composent des substances suivantes, rangées suivant l'ordre de leurs plus fortes proportions, mais dont les deux premières forment la plus grande partie : *huile, caséum, eau, ligneux* (*cellulose*), *sucre cristallisable de raisin, amidon, gomme* (*dextrine* [1]), *matière colorante, huile essentielle, acide malique libre, phosphate et malate de chaux, chlorure de potassium* [2].

Voici les résultats de notre analyse sur les turbercules de la batate douce : *eau*, 74,10; *amidon*, 9,42; *ligneux* (*cellulose*), 2,54; *acide pectique*, 1,30; *sucre cristallisable identique avec le sucre de cannes*, 1,45; *sucre incristallisable*, 1,04 [2]; *albumine*, 1,10; *matières grasses, l'une fluide, l'autre consistante*, 0,89; *acide malique*, 0,21; *huile essentielle, subst. aromatique et mat. colorante, traces; malates de potasse et d'ammoniaque*, 7; *chlorure de potassium*, 1; *oxalate de chaux*, 0,72; *phosphate de chaux*, 0,57; *sulfate de potasse*, 0,43; *silice*, 0,09; *oxydes de fer, manganèse, etc.* 2,39.

Dans des analyses comparées faites, en 1834, sur des batates blanches, jaunes et rouges, venues dans le même terrain chez M. Jacques, de Neuilly, je trouvai 2,60, 2,80 et 3,20 de sucre entièrement cristallisable. La variété rouge, plus riche en sucre,

[1] *Journal de chimie médicale*, 1825, t. I, p. 436 et 437; t. II, p. 27, 1826.

[2] Nous ajoutions, d'après l'observation que j'avais faite sur les betteraves (voyez p. 153) : « Ce sucre, qui résulte si facilement de l'altération du premier, ne préexiste peut-être pas dans les tubercules de la batate au sortir de la terre. »

était aussi plus abondante en fécule amylacée, dont elle contenait 17 p. o/o; les autres principes immédiats s'y sont retrouvés les mêmes que ci-dessus et en proportions peu différentes. (Voyez les Annales d'horticulture, t. XVI, février 1835.)

L'analyse du fruit des melons (*Cucumis pepo*) m'offrit aussi, en 1827 [1], la réunion des substances alimentaires utiles aux premiers développements des végétaux. Ces dernières recherches indiquèrent dans la substance comestible charnue 5 de pulpe fibreuse (cellulose) seulement pour 638, ou 0,78 p. o/o, c'est-à-dire moins d'un centième du poids total; chose digne de remarque, car cette proportion minime de tissu végétal suffisait pour donner à la chair du melon toute sa consistance. Voici, au surplus, sa composition : *eau, albumine, mucilage, sucre cristallisable identique avec le sucre de cannes, sucre incristallisable* [2], *acide libre, matière grasse saponifiable, substance azotée très-altérable développant une odeur urineuse, matière colorante, substance aromatique, acide pectique, amidon et quelques sels, plus du ligneux* (*cellulose*).

NOTE ADDITIONNELLE

RELATIVE AU MÉMOIRE SUR LES FEUILLES DÉCRÉPITANTES.

Dans le mémoire précédent, nous avons indiqué la propriété que possèdent les feuilles de *Magnolia grandiflora* de décrépiter assez fortement. En vérifiant ce fait, à deux années d'intervalle, je le compris mieux encore, car j'avais alors observé, avec M. de Mirbel, une structure particulière dans ces feuilles qui leur donnait plus de solidité, et qui, rattachant avec force l'un à l'autre les épidermes des deux faces, devait emprisonner mieux la va-

[1] *Journal de chimie médicale*, t. III, p. 15.

[2] « ..... Il est permis de supposer que la totalité du sucre des melons affecterait la forme « cristalline si l'on pouvait parvenir à l'extraire sans en altérer aucune partie. »

peur et les gaz, nécessitant une plus forte pression pour rompre les parois reliées par ces attaches cloisonnées[1].

Cette structure spéciale fournissait encore une explication d'un phénomène qui m'avait été présenté comme une objection à la théorie de la décrépitation des feuilles. J'avais observé qu'en général, les feuilles flétries, en se desséchant, présentaient des stomates plus perméables aux gaz et décrépitaient peu ou point; il semblait en être autrement des feuilles de *Magnolia* : celles-ci faisaient entendre, lorsqu'elles étaient spontanément desséchées, des explosions assez fortes encore et bien plus nombreuses. J'étudiai très-attentivement ce phénomène, et je reconnus bientôt que, dans ce cas, la décrépitation était surtout vive et bruyante lorsqu'on posait sur la flamme la face supérieure de la feuille. Après l'expérience on reconnaissait que l'épiderme supérieur avait seul été déchiré par les explosions qui avaient projeté en grand nombre des lamelles épidermiques circonscrites et détachées de la face supérieure du limbe. Il résulte de ces observations, 1° que les stomates, laissant des issues, avaient fait avorter les explosions sous la feuille; 2° qu'en chauffant la face supérieure jusqu'à légère torréfaction, la vapeur et les gaz enfermés dans les petits et très-nombreux espaces entourés de fortes cloisons, ne pouvant se faire jour au travers du parenchyme serré sous l'épiderme supérieur, et ne trouvant pas de stomates dans cette face du limbe, ces fluides élastiques, dis-je, en se dilatant, avaient établi une forte pression à laquelle l'épiderme supérieur, déjà sensiblement altéré par la température, n'avait pu résister; qu'alors il avait été projeté au dehors sur une foule de points, en occasionnant ainsi de nombreuses explosions. Ces nouveaux phénomènes, loin d'être en opposition avec les explications précédemment données, venaient, au contraire, à l'appui, tout en montrant de curieuses modifications des premiers effets décrits.

[1] Il serait difficile de faire comprendre sans figures ces curieuses dispositions; mais on en trouvera les dessins et la description complète dans le mémoire actuellement sous presse et publié par M. de Mirbel et moi dans les recueils de l'Académe, t. XIX.

SUPPLÉMENT AUX ANALYSES DE LA TOURBE.

Ayant eu l'occasion d'examiner une tourbe très-légère qui contenait beaucoup de tissus végétaux non désagrégés, je me proposai d'y rechercher les produits solubles directement dans l'éther, afin de constater de nouveau leur présence et leur composition élémentaire.

La tourbe, desséchée et pulvérisée, fut lavée jusqu'à épuisement avec de l'éther; la substance dissoute fut épurée, par l'alcool, de la portion soluble dans ce dernier véhicule, et elle était alors insoluble dans l'alcool froid et dans l'alcool chaud.

L'analyse de cette matière, soluble dans l'éther et insoluble dans l'alcool, donna les nombre suivants :

Poids de la substance analysée	327 milligr.
Acide carbonique obtenu	945
Eau	358

D'où l'on déduit la composition en centièmes:

Carbone	68,83
Hydrogène	12,14
Oxygène	19,03
	100

Cette composition élémentaire s'éloigne peu des premiers résultats obtenus. (Voyez page 73 ci-dessus).

La portion dissoute par l'alcool froid, et extraite ainsi de la dissolution éthérée, fut desséchée et soumise à une analyse élémentaire; on obtint les nombres ci-dessous indiqués :

Substance employée	273 milligr.
Acide carbonique obtenu	749
Eau	263

D'où l'on peut déduire la composition élémentaire :

Carbone	75,86
Hydrogène,	10,68
Oxygène	13,46
	100

Cette composition est plus rapprochée encore de celle que j'avais obtenue dans les premières expériences. (Voyez la 2e analyse, page 73.)

Le résidu de cette tourbe contenait, en outre, une matière soluble dans l'alcool, et, ainsi épuisé, il fournissait à la potasse trois autres matières précipitables par les acides, et que séparaient l'alcool et l'éther, laissant enfin un résidu insoluble dans tous ces véhicules.

La vérification ainsi faite a donc confirmé la conclusion générale tirée des premières recherches, et dont nous indiquerons plus loin les applications.

COMPOSITION DES TERRES VÉGÉTALES.

SUBSTANCES ORGANIQUES ET INORGANIQUES ASSIMILABLES PAR LES PLANTES.

Dans les mémoires qui précèdent, je me suis efforcé d'établir, par des démonstrations précises, le rôle et la distribution des substances azotées et des matières minérales dans les végétaux : nous avons vu comment les unes et les autres se rencontrent dans les débris des animaux et des plantes qui forment les engrais.

Ces observations physiologiques et organographiques concouraient, avec une foule de faits pratiques, à prouver l'utilité des substances azotées et leur emploi indispensable dans la formation et les développements des organes des plantes dans toute l'étendue du règne végétal, et pour les organismes qui s'accroissent en certaines circonstances [1], sans profiter des fonctions dévolues aux appendices foliacés; il fallait donc admettre que toujours le sol, plus ou moins fertile, pût fournir aux plantes qui y croissent ces aliments organiques dans des proportions qui coïncidassent avec l'activité de la végétation.

[1] En hiver les radicelles, au printemps les bourgeons dépourvus de granules verts et enfermés par des enveloppes multiples, épaisses, impénétrables à l'air ou qui s'opposent à ses renouvellements.

S'il était bien avéré que les engrais organiques eussent d'autant plus d'efficacité qu'ils étaient plus riches en matières azotées, ou qu'ils pouvaient fournir plus d'ammoniaque[1], en serait-il de même relativement au sol? Celui-ci contiendrait-il toujours l'aliment azoté des plantes et dans des proportions correspondantes à sa fertilité?

Je ne pouvais me dispenser d'aborder ces questions, car leur solution devait amener, soit des objections graves contre les principales conclusions des faits que j'avais observés, soit des arguments très-forts à l'appui de la théorie déduite de tous ces faits.

Ne pouvant prétendre approfondir un sujet aussi vaste, je voulus, du moins, choisir des exemples concluants, en agissant sur des terres placées dans des conditions tellement différentes, qu'elles dussent présenter des anomalies, si les règles précitées étaient fausses, ou offrir des résultats plus significatifs par leur accord avec notre théorie, si celle-ci était vraie.

Je me proposai donc d'analyser et de comparer sous ce rapport, 1° une des terres les plus productives qui, dans les environs de Paris, reçoivent d'abondantes fumures; 2° une terre de la Limagne d'Auvergne, remarquable par une fertilité devenue proverbiale, qui persiste assez grande encore, malgré l'insuffisance des engrais; 3° une terre provenant de la Russie, et très-digne d'intérêt par son étendue, par sa profondeur et par une si grande fertilité naturelle, qu'elle peut depuis des siècles, et pourra longtemps encore, sans doute, produire beaucoup sans recevoir de fumure; 4° une terre peu fertile, manquant d'engrais, produisant toutefois assez pour que l'on dût y retrouver cette sorte de composés azotés ou ammoniacaux qui semblent indispensables à toute végétation.

Voici les détails analytiques et les résultats de cette série de recherches.

[1] Voyez l'article *Poudrette* du grand dictionnaire technologique.

TABLEAU DES ANALYSES DE DIVERSES TERRES EN CULTURE SOUS LE RAPPORT DE L'AZOTE EN COMBINAISON DANS LES MATIÈRES ORGANIQUES QU'ELLES CONTIENNENT (TOUS LES ÉCHANTILLONS DESSÉCHÉS À 100° DANS LE VIDE).

	TERRES ANALYSÉES.	POIDS employé.	VOLUME du gaz obtenu.	TEMPÉRATURE.	PRESSION en millim. mercure.	AZOTE en poids pour 1000 de terre.	MATIÈRE organ. pour 1000.	AZOTE pour 1000 de la matière organique
1°	De Marville, près S. Denis.	10gr700	19cc	18°	767	2,070	75	26,90
	Idem, 2e échantillon....	8,615	16	17	764	2,167	80	27
2°	De Russie.....	3,940	5,5	15	769,5	1,74	100	17,40
3°	De la Limagne.....	6,859	20	15,25	756	3,17	115	27,56
4°	Des boulbènes (Haute-Garonne).....	13,500	8,50	12	737,75	0,725	16	4,5

On voit que les quatre premiers échantillons de terres, toutes très-fertiles, contiennent des proportions d'azote très-notables, et qui diffèrent peu entre elles; que la terre la plus productive (de la Limagne[1]) est aussi la plus abondante en azote, et celle dont la matière organique est elle-même la plus riche sous ce rapport. Calcinée en vase clos, cette terre donnait d'abondantes vapeurs ammoniacales. En comparant ces résultats avec ceux de la quatrième analyse faite sur les terres des boulbènes, très-peu fertiles par défaut d'engrais, on remarque combien cette analyse diffère effectivement, quant aux proportions de matière organique azotée et à la richesse de celle-ci en azote.

Il ne semblerait donc pas impossible de comparer les terres sous le rapport de leur richesse en matière azotée, et d'obtenir ainsi l'un des éléments les plus importants de l'appréciation de leur fertilité. Il faudrait, sans aucun doute, tenir compte aussi de plusieurs autres conditions, et notamment des quantités de subs-

[1] L'échantillon de terre de la Limagne d'Auvergne avait été pris par M. de Morny dans sa propriété. La terre des boulbènes venait de la propriété de M. Lagarde.

tance organique non azotée qui, en certaines proportions, pourraient devenir nuisibles[1]; il y aurait à considérer, en outre, l'état et les rapports des composés inorganiques.

Au surplus, le dosage de l'azote, tant de la terre que de sa matière organique, pourrait, du moins, servir pour estimer, beaucoup mieux qu'on ne l'a jusqu'à ce jour pu faire, l'état de fumure des terres pendant la durée des baux; et, à leur expiration, ce serait une mesure d'une haute portée, si elle devenait générale, car elle ne tendrait à rien moins qu'à intéresser également le propriétaire et le fermier à l'amélioration des fonds, puisque tout accroissement ou diminution de l'état de fumure serait mis au compte de l'un des deux, et que, d'ailleurs, les produits durant le bail seraient d'autant plus forts que la fumure aurait été plus abondante; en un mot, chaque fermier n'aurait plus intérêt à épuiser la terre vers la fin de son bail[2].

Enfin, de toutes ces conséquences, la plus évidente est précisément celle qu'il fallait démontrer pour justifier le rôle attribué aux substances azotées dans les développements des végétaux.

Une objection encore pouvait se fonder sur ce que les substances organiques, pour être directement assimilables par les plantes, devaient être directement aussi solubles dans l'eau. Je crus donc devoir soumettre à cette épreuve quelques-unes des terres précitées; en voici les résultats :

[1] Telle me semble être la cause du peu de fertilité d'une terre de M. Darblay, et qui donnait à l'analyse des proportions d'azote aussi fortes que les meilleurs sols; mais il convient d'ajouter que dans cette terre les débris végétaux étaient beaucoup plus abondants encore et faisaient dominer les acides bruns, dont l'excès est toujours nuisible aux plantes.

[2] Ce fut aussi l'opinion émise récemment par M. de Mirbel à la réunion du conseil général d'agriculture, opinion qu'il voulut bien baser sur les travaux analytiques que nous avions exécutés et discutés ensemble.

Analyses des parties solubles à froid des terres cultivées.

TERRES SOUMISES AU LAVAGE.	EXTRAIT SEC employé pour l'analyse.	VOLUME d'azote.	TEMPÉRATURE.	PRESSION.	AZOTE EN POIDS pour 100 d'extrait.	AZOTE EN POIDS pour 100 de la matière organique.	MATIÈRE inorganique pour 100.
Terre de Marville.....	0gr3015	6,5	14,5	770	2,957	11,334	74
—— des boulbènes.....	1,775	4,37	17,5	757,4	2,88	7,03	41
—— de la Limagne.....	0,3155	5,25	14	751	2,087	6,106	65,8

Ainsi donc la partie soluble de ces terres contient des matières azotées en proportions très-notables et peu différentes entre elles, pour un égal poids des extraits examinés et même pour la partie organique de ces trois extraits. Il y a donc là encore une concordance très-digne de remarque avec le rôle et la distribution des corps organiques à composition quaternaire riche en azote, et abondants en particulier dans les très-jeunes organes des plantes, qui puisent surtout leur nourriture dans le sol ou la séve ascendante, et qui commencent, sous l'influence de cette alimentation, les développements de toutes les parties des végétaux.

RELATIONS ENTRE LES MATIÈRES INORGANIQUES PUISÉES DANS LE SOL, LES EAUX NATURELLES, ETC. ET LES COMPOSÉS À BASES MINÉRALES RENFERMÉS DANS LES PLANTES.

Nous venons de voir que les terres plus ou moins fertiles, lors même qu'elles sont longtemps cultivées sans fumure, peuvent cependant céder à l'eau les matières organiques azotées que j'avais trouvées précédemment dans les tissus des plantes.

Une vérification du même genre me parut indispensable pour

contrôler mes résultats relatifs aux composés minéraux et mieux assurer les lois générales sur la présence et la distribution de ces composés dans les organismes végétaux; j'examinai, dans ces vues, les terres de Russie et des boulbènes de la Haute-Garonne [1].

TERRE DE RUSSIE.

Matières organiques (azote 0,0174)			6,93
Matières minérales	Silice	72,09	93,07
	Alumine	10,30	
	Oxyde de fer	5,62	
	Chaux, plus traces de phosphate	0,83	
	Magnésie	1,01	
	Chlorures, sodium et potassium	1,21	
	Perte	2,01	
			100

TERRE DES BOULBÈNES.

Silice	84,40
Alumine et oxyde de fer	3,60
Silice, alumine, oxyde de fer, directement solubles par l'acide hydrochlorique de chaux	4,31
Chlorures, sodium, potassium, calcium, magnesium et matières organiques	3,40
Débris de tissus végétaux	1,90
Silicates de chaux, magnésie, soude	1,19
Eau hygroscopique et perte	1,20
	100

On pouvait déduire de ces analyses que les terres cultivées sans fumure, ou rarement fumées, contiennent cependant les substances minérales indiquées dans les tissus des plantes par les observations précédentes; mais il était important de rechercher ces substances dans les eaux de lavages, dans lesquelles on devait supposer que les plantes puisent plus particulièrement les composés minéraux, ainsi que les substances organiques propres à leur nutrition.

[1] Je dois à l'active coopération de M. Poinsot d'avoir pu achever toutes ces analyses minérales.

Les terres de Marville et des boulbènes furent lavées presque jusques à épuisement; la solution filtrée, rapprochée à sec, laissa un résidu qui fut analysé, et dans lequel on trouva les substances ci-après indiquées.

RÉSIDU EXTRAIT DE LA SOLUTION AQUEUSE DE LA TERRE DE MARVILLE.

Matières organiques et eau hygroscopique	26,5
Silice	7,6
Magnésie	2,4
Chaux	21
Soude	2
Potasse	3
Acides sulfurique, phosphorique et carbonique	20,2
Chlore	8,8
Alumine et oxyde de fer	7,5
	100

La matière extraite par des lavages à l'eau de la terre de Marville contenait toutes les substances minérales trouvées dans les tissus des plantes.

En entreprenant quelques recherches sur le produit semblable du lavage de la terre dite des *boulbènes*, je me proposai de comparer les proportions de plusieurs de ses composants avec les quantités des mêmes matières minérales qu'on retrouve dans les plantes cultivées sur le même sol. C'était encore un moyen de retrouver des exemples de la diversité des aptitudes des plantes de familles différentes pour puiser les composés minéraux qui leur conviennent.

Les expériences furent faites sur la terre des boulbènes et sur les cendres des plantes venues dans ce terrain, et envoyées par M. Lagarde. Ces plantes avaient été choisies en état de végétation active au commencement de leur fructification, et l'on a incinéré ensemble tiges, feuilles et fruits.

Analyses comparées de l'extrait obtenu par lavages de la terre des boulbènes et des cendres de plantes venues sur cette terre.

	EXTRAIT obtenu par lavages; résultats sur 100.	100 du résidu de l'incinération.	100 DE CENDRES de Figuier.	de Vigne.	de Maïs.
Substances enlevées par l'incinération...	30,8	//	//	//	//
Silice.....	8,6	12,10	16,48	9,4	20,8
Magnésie.....	12	16,9	15,01	14,4	10,6
Chaux.....	19,4	26,7	26,27	21,6	5,4
Alumine.....	1,3	1,83	2,54	8,7	4,3
Soude et potasse.....	6,6	9,2	6	6,2	29,3
Acides sulfurique, phosphorique, carbonique; chlore, oxyde de fer, etc.....	//	33,47	33,70	39,7	29,6

Les résultats que présente ce tableau montrent clairement encore que la partie directement soluble des terrains peut fournir les substances minérales qu'on retrouve dans les plantes; que probablement l'action dissolvante est, dans certains cas, favorisée par l'influence de la végétation, surtout relativement aux matières minérales dont chaque espèce exige le plus; qu'enfin, dans les mêmes circonstances, les proportions des composés minéraux fixés dans les tissus varient dans les différentes familles; qu'ici, comme on l'avait pu remarquer ailleurs, c'est une graminée qui renferme les plus fortes proportions de soude ou potasse et de silice, tandis que les cendres de figuier contiennent les plus grandes quantités de chaux et de magnésie.

On peut admettre que les plantes absorbent de préférence les matières minérales qu'on retrouve, en général, plus abondantes dans leurs tissus; l'existence même des organismes spéciaux destinés à les recevoir annonce que ces matières doivent exercer

une influence notable sur les développements de ces plantes. Les mêmes composés inorganiques sont favorables à la végétation des différentes espèces d'une même famille. On n'en saurait douter, ces faits peuvent aider à comprendre les bons effets des assolements, lorsque la succession des récoltes évite l'épuisement de certaines substances minérales, dont on laisse le temps de réparer les pertes par des fumures ou des amendements bien appropriés, ou même par la désagrégation spontanée des parties que leur cohésion rendait inattaquables par l'eau.

J'ajouterai ici, en terminant, une observation susceptible encore d'être généralisée et de concourir à expliquer les effets avantageux et si remarquables des irrigations; c'est que la plupart des eaux naturelles convenables pour cette grande application, toutes celles que j'ai examinées du moins, ont une réaction alcaline et tiennent en solution des composés où se rencontrent des sels alcalins et calcaires, de la silice et des matières organiques azotées, c'est-à-dire les principaux agents de l'alimentation végétale [1].

[1] Lorsque je communiquai, en mars 1841, à l'Académie des sciences, l'analyse de l'eau du puits de Grenelle, qui renferme aussi, quoiqu'en faibles proportions, tous ces composés dissous, je disais que la présence de la silice dans les eaux des rivières et des sources pouvait favoriser le développement des tissus végétaux qui en sont imprégnés et des spongilles abondamment pourvues de concrétions siliceuses sous la forme de spicules.

APPLICATIONS

DES

PRINCIPAUX FAITS CONTENUS DANS LES MÉMOIRES PRÉCÉDENTS,

À L'ORGANOGRAPHIE,

À LA PHYSIOLOGIE ET AUX ARTS AGRICOLES ET INDUSTRIELS.

SPONGIOLES ET JEUNES ORGANES DES PLANTES.

Les *expériences sur les spongioles*, contenues dans le premier mémoire, prouvent l'altérabilité de cet organisme important des végétaux sous les influences du tanin, qui contracte, ou des alcalis caustiques, qui dissolvent en partie leur substance azotée et arrêtent tout développement ultérieur de ces extrémités radicellaires.

Il en faut conclure, non-seulement que les débris de chênes peuvent exercer une action délétère, s'ils sont abondants autour des racines des plantes, mais encore, en rapprochant ces faits des observations de M. Dutrochet, sur une foule de solutions légèrement visqueuses qui font obstacle aux infiltrations par les tissus si déliés des spongioles, qu'on doit éviter de mettre en contact avec les racines les solutions trop chargées de matières solubles quelconques, provenant, soit des engrais ou des stimulants, soit des racines elles-mêmes, si, par défaut de perméabilité du sol, elles pouvaient être momentanément baignées d'eau; car leurs propres sucs, en se dissolvant, seraient capables de réagir sur les spongioles.

Tel est, par exemple, l'effet de l'immersion des racines de fraisiers et de plusieurs rosacées qui cèdent assez de tanin pour altérer fortement leurs propres radicelles.

On voit combien sont utiles, dans toutes ces circonstances, les sols convenablement perméables, qui, dans leurs interstices, laissent librement cheminer les prolongements radicellaires au milieu de gaz et des vapeurs condensables qui divisent et étendent d'eau distillée les solutions autour de ces radicelles et de leurs spongioles. De tels sols placent les organes les plus délicats des racines dans des conditions analogues à celles où se trouvent les racines aériennes qui, par leur structure et leur composition chimique, sont, en effet, comparables aux autres racines.

Cette perméabilité, ou l'ameublissement des terres labourables est à juste titre l'une des préoccupations des agriculteurs. Ils doivent redouter en outre les influences des sous-sols imperméables qui, retenant les eaux, occasionnent parfois l'immersion des racines, et par suite, non-seulement les altérations précitées, mais encore la désagrégation des tissus, que peut amener une macération prolongée.

On comprend ainsi la nécessité d'éloigner tout contact direct de ces organismes délicats avec les engrais fluides très-actifs, et de distribuer ceux-ci à distance des plants, comme le font les cultivateurs flamands.

De là encore l'explication des bons effets produits par les poudres charbonneuses qui absorbent et rendent plus stables les matières trop putrescibles ou volatiles et distribuent lentement ensuite aux végétaux les produits ammoniacaux de ces fermentations convenablement ralenties.

En découvrant *la prépondérance des substances azotées dans les cellules de tous les organes jeunes* et doués des plus actives fonctions vitales, je crois avoir fondé sur une base certaine, que tous les travaux ultérieurs ont élargie, la théorie de l'action des produits de la décomposition des débris organiques azotés, leur véritable rôle dans la nutrition végétale, les maxima d'effets utiles réalisables par un dégagement proportionné aux forces et aux surfaces assimilatrices des plantes; l'application avantageuse des radicelles d'*orge germée* (touraillons des brasseurs) à l'engrais des

terres; l'appréciation de la valeur des engrais par le dosage des produits ammoniacaux de leur décomposition (voir page 46); la présence des corps azotés dans les tissus cellulaires et vasculaires, comme dans la séve des plantes; l'altérabilité de ces corps entraînant les altérations du bois et indiquant l'ordre des moyens à employer pour prévenir ces altérations, c'est-à-dire l'application à cet usage des agents mêmes de la conservation des débris animaux[1]. Une série d'expériences sur la végétation conduisit M. Boussingault aux mêmes conséquences que nous avons présentées de concert dans un récent mémoire sur les engrais[2].

Le grand nombre de familles chez lesquelles la composition riche en azote des jeunes organes végétaux a été constatée (voir pages 5, 6, 9, 24 à 36 et 44) ne peut laisser aucun doute sur la généralité de cette loi naturelle.

En présence de tous ces faits, il devait venir à l'idée de *comparer les organismes si divers doués de la vie animale avec les corps azotés des végétaux*, de considérer les cellules végétales comme les enveloppes protectrices de ces corps vivants : telles furent effectivement les conclusions d'une foule d'expériences et la pensée dernière de chacun des mémoires qui précèdent.

AMIDON, DEXTRINE, DIASTASE, GLUCOSE, INULINE NORMALE ET INULINE ISOMÉRIQUE.

Les applications organographiques, physiologiques, agricoles et industrielles des faits contenus dans le deuxième mémoire, sont particulièrement relatives à des substances congénères du

[1] Dans le mémoire sur les engrais, approuvé par l'Académie des sciences (voyez les Annales des sciences naturelles, t. XXX, et le Cultivateur, journal des progrès agricoles, juin 1834), on trouve l'indication des moyens qui ralentissent avantageusement les décompositions spontanées des engrais riches : la coagulation, la dessiccation, les additions de terres poreuses charbonnées, la distribution sur de grandes superficies, etc. ceux qui activent les putréfactions trop lentes : la division, l'hydratation, la mise en tas, une macération préalable, etc. etc.

[2] *Annales de chimie et de physique*, 1842.

tissu végétal, et qui peuvent s'y assimiler. Telles sont, en effet, l'amidon, la dextrine et l'inuline.

La *découverte de la diastase* a permis d'expliquer la dissolution de la substance amylacée dans les plantes, de bien comprendre et de régulariser les phénomènes analogues, dans la *germination et la saccharification des grains,* chez les brasseurs et les distillateurs qui emploient les céréales.

Les *formes et dimensions des grains d'amidon,* telles qu'on les trouve indiquées pour quarante-huit plantes, pages 57 à 76, ainsi que dans la première série de huit planches et leur description, pages 204 à 210, caractérisent assez la plupart des fécules en usage pour qu'on puisse reconnaître leur origine à l'inspection, sous le microscope, et distinguer entre elles certaines fécules commerciales.

L'*étude anatomique de l'amidon*, convenablement approfondie, soit par l'observation directe de ses grains entiers ou rompus en fragments, soit par diverses réactions chimiques, ne peut aujourd'hui laisser aucun doute sur sa structure générale. Il est évident que chacun de ces granules est formé de couches concentriques résultant de l'introduction, successivement opérée, de toute la matière amylacée par une même ouverture appelée *hile,* qui, en réalité, n'a point de rapport d'adhérence ou de nutrition, comme on l'avait à tort supposé, avec les parois de la cellule. Chaque couche, dans son épaisseur, offre un maximum de cohésion vers l'extérieur et le minimum à l'intérieur; la couche externe est douée d'une consistance plus forte que toutes les autres, et la couche centrale offre la plus faible cohésion.

L'*hydratation des granules amylacés* a lieu en plusieurs termes, dont le premier offre une combinaison si énergique, que l'oxyde de plomb seul peut la défaire en se substituant à l'équivalent d'eau.

Quatre autres termes, présentant 2, 4, 10 et 15 équivalents d'eau de plus, étaient intéressants à connaître pour la fixation de la valeur vénale des fécules industrielles.

Il importe de se rappeler aussi que la fécule, lorsqu'elle contient

de 10 à 15 équivalents d'eau, se réunirait en masses cohérentes, grumeleuses, impropres à la plupart des applications usuelles si on la chauffait brusquement au-dessus de 60° c^{x} : la dessiccation doit donc commencer dans les étuves à une température plus basse et être très-graduellement élevée, de façon à ce que le maximum de température dans les étuves continues, par exemple, n'atteigne la fécule qu'au moment où la plus grande partie de l'eau hygroscopique s'est dissipée.

Les mêmes données théoriques méritent une sérieuse attention de la part des malteurs et des brasseurs, car l'échauffement brusque au delà de 58° constitue le périsperme humide des *grains germés* en une sorte d'empois compact, qui, desséché, devient dur, *corné*, indissoluble dans les trempes ultérieures : c'est là une des causes les plus graves des altérations et des pertes que peut occasionner une dessiccation mal dirigée sur les tourailles.

Les *effets de dislocation* des particules amylacées par les températures de 150 à 220°, d'autant plus énergiques qu'ils ont lieu en présence de l'eau ou de la vapeur, ont indiqué les moyens d'accomplir et de régler la transformation des fécules en produits solubles sans changer leur forme pulvérulente, notions importantes pour les fabricants d'*amidon grillé*, de *leïocomme* et de *dextrine*.

En observant *la contraction par divers agents chimiques, et surtout par un simple refroidissement, des particules amylacées distendues préalablement dans l'eau bouillante*, on a pu démontrer l'insolubilité directe de ces particules.

L'élimination d'une portion d'entre elles, en laissant puiser, par les spongioles d'une jacinthe, l'eau qui distend ces particules, soit dans un empois consistant, soit dans une *solution* passée au travers de nos filtres en papier, donne une élégante démonstration du même phénomène.

L'énorme gonflement des grains d'amidon dans les solutions de soude et de potasse caustique a permis d'obtenir, par double décomposition, les divers amylates de chaux, baryte, protoxyde de plomb, etc.

dans lesquels, chose remarquable, la substance amylacée conserve toutes ses propriétés, même sa belle coloration violette par l'iode, dès qu'on la dégage de ces combinaisons.

La même observation, rapprochée d'une autre, l'inertie de l'ammoniaque sur l'amidon, offrit un *moyen d'essai des sels ammoniacaux*, car ceux-ci préservent le principe immédiat de toute action tant qu'ils sont en excès; mais, dès que la soude ou la potasse a saturé leur acide, l'un de ces alcalis caustiques, mis en excès, attaque et fait gonfler la substance amylacée (voyez p. 196).

Cette réaction prouve que dans une solution, et tout restant liquide, la *potasse comme la soude décomposent entièrement* les sels ammoniacaux.

Les solutions caustiques, étendues près de leur limite d'action sur la fécule, attaquent les plus jeunes de ses grains et indiquent les *différences d'agrégation dues à l'âge des grains d'amidon.*

La *théorie de la formation de l'empois* est devenue fort simple dès qu'il a été démontré que, sous l'influence de l'eau et de la température de 90 à 100°, toutes les couches concentriques solides, emboîtées, qui constituent chaque grain d'amidon, se gonflent en retenant l'eau interposée comme une sorte d'éponge très-dilatable.

A 140° en vases clos, on convertit l'empois en *mucilage convenable pour certains apprêts.* En soumettant à une étude attentive les *influences de l'iode sur l'amidon*, une foule de faits curieux se sont dévoilés (voyez pages 105 à 125); il a été facile d'en déduire plusieurs applications utiles et les faits suivants:

1° La perméabilité des grains d'amidon; 2° leur décoloration par couches de la périphérie au centre; 3° les indices certains des états d'agrégation par les nuances bleue, violette, rouge vineuse et rose pâle; 4° les effets de décoloration par l'écartement des particules de 60 à 100° et de coloration nouvelle par la contraction que le froid opère; 5° l'opacité remarquable de cet iodure; 6° la précipitation du réseau bleu par l'ichthyocolle, les acides, les sels, l'abaissement de la température; 7° l'application de cette

propriété pour *comparer la pureté des eaux potables, filtrées ou alunées;* 8° la même propriété et l'inertie de l'acide acétique, utilisées pour l'essai des vinaigres (voyez page 198); 9° la formation d'un iodure incolore tant que l'iode n'est pas en excès sensible; 10° la composition de l'iodure d'amidon hydraté sans désagrégation; 11° la résistance de cet iodure à la température, aux acides; 12° sa liquéfaction à l'état d'hydrate par la température; 13° l'inertie de l'iode sur l'amidon sec et la décoloration de l'iodure par l'alcool anhydre; 14° l'exfoliation des grains d'amidon bleuis; 15° l'effet de teinture pouvant définir la nature des composés colorés d'iode et d'amidon.

La *réaction remarquable du chlore* convenablement modérée, *détruisant par une combustion dans le liquide les parties moins agrégées,* a montré dans chaque couche concentrique une pellicule douée du maximum de cohésion ne se colorant plus en bleu par l'iode, mais prenant cette belle coloration dès que l'acide sulfurique commence à la désagréger.

En soumettant la fécule des pommes de terre à des lavages par l'alcool anhydre, on en extrait directement les matières grasses et l'huile essentielle, *cause de l'odeur spéciale de cette fécule* qui, lavée ainsi jusqu'à épuisement, se rapproche beaucoup des fécules exotiques exemptes de goût désagréable.

La réaction des acides minéraux et de l'acide tartrique fait découvrir leur présence dans l'acide acétique qui, à l'état pur, est sensiblement inerte sur la fécule, pendant la durée de l'essai.

Une combinaison de l'acide azotique avec l'amidon donne la *xyloïdine*, composé inflammable de + 200 à 250°. (Pelouze.)

L'état naturel, l'extraction de la *diastase* et sa réaction singulière sur l'amidon expliquent les transports de la substance amylacée d'un tissu à un autre dans les plantes, la *production* naturelle et artificielle, en rapports variables, et suivant des circonstances déterminées, *de la dextrine et de la glucose, et leurs caractères distinctifs.*

Les effets de l'alcool ou du tanin sur les solutions amylacées

ont reproduit, par des variations de température, des *phénomènes d'opacité et de transparence analogues aux colorations et décolorations alternatives de l'iodure d'amidon.*

L'inertie de l'ammoniaque, de l'acide acétique, de l'alcool, de l'éther et de l'eau à froid a procuré le *moyen* d'épurer l'amidon de presque tous les corps étrangers adhérents à sa superficie ou entre ses couches concentriques, et d'*obtenir alors sa dissolution diaphane* et sans résidu appréciable par l'acide sulfurique étendu.

Contrairement aux idées jusqu'alors reçues, *la composition élémentaire des parties internes et externes de l'amidon a été reconnue identique* après de nombreuses vérifications.

Les analyses comparées, le pouvoir de rotation, le *poids équivalent obtenu à l'aide de l'acétate de plomb ammoniacal,* le poids spécifique et plusieurs termes d'hydratation ont démontré, *entre l'amidon et la dextrine, identité de composition moléculaire;* d'un autre côté, la structure, l'action de l'eau et de l'iode établirent des différences dépendantes des groupes de particules et telles qu'il en résulte, à la fois, une *isomérie caractérisée entre ces deux substances* et des fonctions ou des applications toutes spéciales : pour l'une, de rester inaltérée en réserve dans les plantes comme dans les magasins des manufacturiers, d'être appliquée en raison de ses propriétés spongieuses, de son insolubilité, etc. et, pour l'autre, de traverser en dissolution complète les tissus végétaux, et d'être appliquée à divers usages économiques fondés sur sa grande solubilité.

Il est résulté d'une autre série de recherches que l'amidon, la dextrine, l'inuline normale et l'inuline fondue constituent quatre substances isomériques, et présentent, entre la première et la deuxième, une transformation analogue à celle qui se passe entre la troisième et la quatrième.

J'ai déduit d'un grand nombre d'observations les notions suivantes : aucun organe rudimentaire ou très-jeune des plantes ne contient d'amidon; ni l'épiderme, ni les vaisseaux, ni les méats intercellulaires n'en recèlent. Ce principe immédiat se rencontre

dans des cellules au milieu des tissus, où il peut rester en réserve comme un des matériaux des développements ultérieurs de l'édifice végétal.

L'amidon contenu dans les grains de pollen est identique avec l'amidon des autres tissus végétaux.

La valeur des produits des pommes de terre cultivées peut être estimée d'après la quantité de substance sèche des tubéreuses représentée dans la récolte d'un hectare.

Les pommes de terre gelées contiennent autant de fécule qu'avant leur congélation ; la diminution de leurs produits tient à la dislocation de leur tissu, qui isole les cellules. Soumises à la rape avant le dégel ou lavées, pressées et séchées immédiatement après, elles n'occasionnent aucune perte.

Les propriétés physiques de l'amidon s'appliquent aux essais des sels ammoniacaux, des vinaigres et de l'acide acétique.

La réaction de 0,0025 d'acide azotique à l'intérieur des grains de fécule désagrége à 100° la substance au point de la convertir économiquement en dextrine sans changer sa forme pulvérulente.

Cette dextrine, utilement appliquée dans les apprêts, encollages des tissus, gommage des couleurs, etc. offre à la chirurgie un des meilleurs moyens de maintenir les fractures en réservant toute facilité pour la levée totale ou partielle des appareils.

La préparation des bières blanches, l'amélioration des vins, sous le rapport de leur conservation, ont plus particulièrement étendu la consommation des glucoses obtenues au moyen de la saccharification de la fécule des pommes de terre.

CELLULOSE.

Le but du troisième mémoire était indiqué par la considération d'une transformation isomérique que j'avais admise *a priori*, entre l'amidon accumulé dans certains tissus et les développements des nouvelles cellules aux dépens de cette réserve. (Voyez p. 212.) Ce but fut atteint par la découverte de la composition

vraie et des propriétés de la matière des cellules : de la *cellulose*, en un mot. Ces notions nouvelles amenèrent plusieurs applications chimiques, physiologiques et même industrielles que nous allons résumer.

Les nombreuses variétés chimiques de tissus végétaux considérés à tort comme principes immédiats appelés ligneux, lignine, méduline, fungine, lichénine, etc. disparaissent et font place à un principe immédiat, unique, que l'épuration ramène au même type contenant 0,444 de carbone et se représentant par la formule $C^{24}\,H^{20}\,O^{10}$; isomérique par conséquent avec l'amidon, la dextrine, l'inuline normale et modifiée, renfermant 1 équivalent d'eau de moins que le sucre de cannes, et 2 de moins que la glucose.

Une réaction curieuse de l'acide sulfurique, en présence de l'iode désagrégeant la cellulose, lui fait reprendre l'un des caractères remarquables de la matière amylacée, en développant une belle coloration violette. C'est un retour vers un état que l'action désagrégeante de la diastase avait détruit d'abord, et qu'ensuite les phénomènes de la végétation avaient, au contraire, porté à un plus haut degré de cohésion.

La réaction plus avancée de l'acide sulfurique transforme la cellulose en dextrine, puis en glucose : *l'acide sulfarique,* seul *avec le concours de l'iode, peut donc servir de réactif pour la cellulose pure. La transformation superficielle de la cellulose en xyloïdine* permet d'obtenir des enveloppes imperméables et très-combustibles.

Le résultat le plus important de ce travail fut *de ramener à l'unité de composition chimique la substance organique constituant la trame de toutes les cellules végétales* primitives ou transformés en vaisseaux, fibres, etc.

Les mêmes réactions caractéristiques et la même composition élémentaire ont établi *l'identité de la cellulose* dans les tissus des feuilles, des radicelles, des périspermes des fruits de graminées, palmiers, et des poils qui recouvrent les graines du cotonnier,

des peupliers, etc. et dans les fibres des bois durs et tendres, des tiges des conifères, dans les membranes des vaisseaux des trachées, comme encore dans les cellules des conferves, champignons, characées, et généralement de toutes les cryptogames analysées.

La même composition élémentaire et les autres propriétés se sont offertes dans *la cellulose empruntée aux tissus végétaux et pétrie par les guêpes* pour consolider leurs *nids*, comme aussi dans toutes les *parties les plus résistantes des membranes et fibres végétales qui ont résisté à l'action digestive des animaux*, après avoir laissé assimiler plusieurs matières organiques grasses ou azotées qui les accompagnaient.

En comparant ces portions si résistantes avec les membranes de *cellulose désagrégeables par l'eau bouillante*, on comprend que les premières soient dépourvues de toutes propriétés alimentaires, et que les autres puissent, comme l'amidon hydraté, comme l'inuline, parfois enfermée dans la trame de cellulose, et comme les sucres, servir à l'entretien de la vie animale.

La résistance de la cellulose fortement agrégée qui constitue les fibres textiles du chanvre, du lin, du bananier, de l'agave, du *Phormium tenax*, de l'*Urtica nivæa*, du coton, etc. explique leurs applications à la filature, au tissage et à la fabrication du papier. L'épaisseur très-forte de la cellulose dans le chanvre et le lin, très-faible dans les tubes constituant les poils du coton, permet de bien comprendre la différence de solidité entre les fils et tissus de chanvre et de lin, et ceux qui sont formés de coton.

L'action du chlore qui attaque par couches superficielles la cellulose et transforme ces parties en eau, plus acide carbonique, facilite évidemment ainsi l'élimination de tous les corps adhérents, et diminue l'épaisseur et la solidité de la cellulose: cette action doit donc être ménagée, en étendant les solutions et abaissant leur température.

La présence d'une matière grasse dans les poils des graines du cotonnier explique la durée remarquable des toiles de coton écru, et

particulièrement des toiles à voiles, exposées à toutes les intempéries des saisons.

Les matières grasses et azotées du maïs et de plusieurs périspermes alimentaires concourent à développer leurs propriétés nutritives.

La composition immédiate et élémentaire de la levure et du Monas Dunalii a présenté, outre la cellulose, les proportions notables de substances azotées et grasses propres aux végétaux placés au bas de l'échelle des êtres organisés.

L'ensemble des analyses des plantes cryptogames ou herbacées a donné plus de carbone que la cellulose, et *un excès d'hydrogène* relativement à la quantité qui, avec l'oxygène, formerait de l'eau, ce que l'on doit attribuer surtout aux matières azotées ou grasses contenues dans leurs tissus.

Des différences nettes et tranchées entre les parties résistantes des membranes animales et végétales ont été mises à profit pour distinguer, dans les fils et tissus, les parties de chacune de ces deux origines, établissant une *ligne profonde de démarcation entre les deux règnes,* sans détruire *l'extrême analogie de composition entre les animaux et les corps renfermés dans les cellules des plantes, partout où une grande activité vitale se manifeste ou peut se développer.*

L'explication, page 40, de la planche I^re^, indique *les principales formes et épaisseurs des parois formées de cellulose.*

TISSUS LIGNEUX.

Le quatrième mémoire traite des concrétions et incrustations ligneuses; voici les conclusions capitales qui découlent de ce travail : 1° toutes les parties dures, vraiement ligneuses (*bois, noyaux, pierres des poires, des écorces, etc.*) sont formées de plusieurs matières organiques interposées dans l'épaisseur des couches de cellulose; elles ne constituent donc point un ligneux homogène, comme on l'avait admis; 2° ces parties ligneuses, de diverses natures, offrent toutes, dans leur composition, *un excès d'hydrogène*, ce qui généralise ce fait relativement à toutes les plantes, ligneuses

ou non, et complète l'explication sur *l'emploi de l'hydrogène fixé par la végétation.*

Parmi les applications importantes, on se rapellera que *la valeur calorifique, à poids égal, diffère dans les variétés de bois,* dans le cœur et l'aubier d'une même tige ; qu'elle est d'autant plus grande que les matières organiques incrustantes dominent davantage relativement à la cellulose ;

Que les bois sont d'autant plus durs, lourds et fragiles que la matière incrustante abonde, tandis qu'ils sont plus *liants ou fibreux si la cellulose domine* dans les fibres fortement épaissies; qu'enfin ils sont blanc, légers et *peu résistants lorsque la cellulose, peu incrustée, forme des fibres à minces parois ;*

Que *la production de l'acide acétique par distillation*, ou carbonisation en vases clos, *est d'autant plus grande, à poids égal, que les bois sont plus chargés de matières incrustantes.*

Les analyses immédiates et élémentaires des végétaux ont conduit à trouver que la *tourbe* légère a une composition bien plus complexe qu'on ne l'avait supposé. *Elle renferme sept substances organiques qui paraissent dérivées d'autant de principes immédiats des plantes.*

La principale *cause de l'altération spontanee des bois réside dans la putréfaction des matières azotées,* putréfaction qui entraîne la pourriture des autres substances organiques. Les solutions suivantes employées avec succès *pour prévenir cette première putréfaction* sont aussi au nombre de celles qui conservent les matières animales :

Le sublimé corrosif (bichlorure de mercure) qui conserve si bien les pièces anatomiques, même les cadavres entiers d'animaux, les échantillons de plantes dans les herbiers, les bois des serres, ordinairement si altérables par les circonstances de température et d'humidité dominantes dans ces lieux[1].

[1] Les bois de sapin, refendus et accouplés, employés dans la construction d'une très-grande serre ayant vingt-trois mètres de haut, chez le duc de Devonshire, ont été imprégnés, suivant la méthode de Kyan, par une immersion durant huit à quinze jours, suivant leur volume, dans une solution contenant 0,02 de sublimé; au bout de dix ans ces bois n'avaient encore éprouvé aucune altération sensible.

La créosote brute, mise en usage dans les mêmes vues par M. Moll. Elle préserva les bois et de la pourriture et des attaques des insectes, dans des expériences décisives faites par les ordres de l'amirauté de Londres.

Le sel marin, qui préserve de toute altération, depuis des siècles, les boiseries des mines d'Hallein, arch. de Saltzbourg (Autriche), exploitées avant l'ère chrétienne. Des effets analogues, observés par M. Carny depuis l'exploitation des mines de sel de Dieuze, ont prouvé que le chêne et le sapin, imbibés de solution saturée de sel, conservent leur dureté et leur résistance depuis vingt ans.

Les huiles fixes (notamment l'huile de lin rendue siccative par la litharge) et *le sulfate de fer* ont fourni des exemples de conservation remarquables dans les expériences de pénétration à l'aide d'une pression énergique. M. Bréant, auteur de ce procédé, que l'on applique en Angleterre, a remarqué que le sulfate de fer désagrégeait ultérieurement les fibres du bois, tout en empêchant la pourriture, et que, pour éviter cette désagrégation, il convenait de faire succéder une injection d'huile à l'injection de sulfate.

Chacun connaît la propriété des *résines* dissoutes dans les *huiles essentielles*, qui défendent les parties très-résineuses des bois des conifères.

L'acide pyroligneux, mélange si complexe d'acide acétique, de créosote, d'acétate de fer et des divers produits du goudron, employé avec succès par le docteur Boucherie pour préserver, notamment, les bois des cercles, que l'humidité des caves altère ordinairement si vite. La pénétration obtenue dans cette application, au moyen de l'aspiration par les feuilles des arbres, envahit rapidement les principaux conduits séveux et les tissus voisins; malheureusement elle s'étend peu ou point au delà, en sorte que, dans les bois volumineux et durs, l'aubier seul est injecté.

L'infiltration par simple déplacement, dans les tiges des arbres abattus, m'a semblé mieux réussir, surtout relativement aux pins, dont tout le tissu présente une structure tubulaire; toutefois, les procédés d'injection des bois laissent à désirer, soit sous le

rapport de l'économie, soit sous celui d'une pénétration complète.

Le tanin, qui défend contre la pourriture les filets exposés aux alternatives d'humidité et de sécheresse, *les goudrons, les sels alumineux, etc.* peuvent aussi retarder beaucoup les altérations spontanées des bois. Toutes ces substances antiseptiques sont également des agents de la conservation pour les débris animaux; on peut donc admettre que la cause première de la putréfaction des produis organisés, animaux ou végétaux, tient en effet aux altérations des substances quaternaires peu agrégées.

Une autre cause, ignorée jusqu'ici, des altérations des bois durs, précisément dans les cas où elles sont très-rapides, ressort évidemment de la composition immédiate de ces bois, composition qui peut expliquer certaines différences de durée des bois, dignes de tout l'intérêt des physiologistes, des économistes et des agriculteurs.

Voici quelques faits sur ce sujet, très-simples aujourd'hui, mais qu'il eût été impossible de comprendre lorsqu'on supposait que les bois des différents arbres étaient formés, pour plus des 0,9 de leur poids, d'un *ligneux homogène.*

Dans les mines de houille, et surtout au milieu des galeries, où la température s'élève sans qu'il y ait assez d'humidité pour que les bois soient mouillés, le chêne noir, comme le chêne blanc, résiste à peine trois ou quatre ans; ces deux espèces de bois sont cariés jusques au cœur au bout de ce temps, tandis que l'acacia en tiges de dimensions égales, par conséquent moins âgées, dure de douze à quinze ans presque sans éprouver d'altérations.

Si l'on compare attentivement ces essences entre elles, d'après les notions que nous avons établies, on trouve que le chêne renferme à peine la moitié de la quantité de cellulose que contient l'acacia, à poids égal. On sait d'ailleurs que le chêne est plus riche en tanin que la plupart des autres arbres; qu'enfin le tanin s'y trouve, à l'état normal, en secrétions isolées.

Ces données suffisent à la discussion des faits ci-dessus et de quelques autres non moins importants.

La cellulose, lorsqu'elle est pure, fortement agrégée, et qu'elle constitue des parois épaisses dans les tissus végétaux, offre une grande résistance à divers réactifs, aux agents atmosphériques, à la digestion des animaux, etc. La cellulose qui constitue les fibres ligneuses de l'acacia présente ces caractères, car elle est douée d'une forte cohésion, et renferme beaucoup moins de substances organiques interposées que la plupart des bois durs ; dans le chêne, au contraire, la cellulose et injectée d'une grande quantité de matière incrustante. Les parties divisées par cette abondante injection forment une trame spongieuse, remplie de corps hétérogènes, offrant prise aux altérations sur une très-grande surface ; les altérations y deviennent effectivement très-actives, surtout lorsque l'atmosphère ambiante est à la température qui favorise les fermentations et les végétations cryptogamiques. Dans ces circonstances, les différences de durée du chêne et de l'acacia sont très-grandes; elles sont bien moindres et peuvent devenir nulles lorsque l'excès d'humidité ou l'eau liquide baigne les bois : alors le chêne n'offre plus à l'action de l'oxygène de l'air les mêmes surfaces ; d'ailleurs, le tanin est dissous, et, réagissant sur les principes azotés, il constitue une combinaison peu altérable.

La grande résistance du bois d'acacia aux influences atmosphériques est un fait certain, encore trop peu connu ou apprécié ; on peut s'en assurer cependant par les expériences, anciennes déjà, qui ont constaté sa durée comparativement très-grande dans les chevilles ou gournables des navires, boisages des mines, échalas des vignes et pépinières, raies et jantes des roues de voitures, bobines des filatures à l'eau chaude (lin), planchettes à étiquettes dans les jardins, encoignures des caisses d'orangers et autres plantes, etc. et la cohésion de ses fibres est également prouvée par l'usage avantageux que l'on fait de ce bois lentement desséché, dans la confection des alluchons des machines ou dents encastrées des roues d'engrenage.

CONCRÉTIONS MINÉRALES DES PLANTES.

Le cinquième mémoire, qui eut pour objet d'étudier *les substances minérales dans les végétaux*, a fait voir que ces substances *ne sont pas déposées au hasard ni simplement en vertu des lois physiques de l'évaporation; qu'elles sont, au contraire, conduites vers des organismes disposés d'avance pour les recevoir;* que, sous l'influence de la végétation les mêmes composés prennent des formes variables suivant les espèces des plantes, et toujours déterminées par l'action des corps organiques; que l'oxalate de chaux, si généralement répandu dans les végétaux, surtout dans leurs feuilles, se montre en effet tantôt en raphides très-longues et minces, tantôt en prismes gros et courts, presque toujours sécrété dans des cellules spéciales et parfois symétriquement disposées sous le tissu épidermique, souvent autour des vaisseaux dans les nervures.

Aucune famille ne renferme en aussi grande abondance que les cactées, des concrétions cristallines d'oxalate de chaux : là encore *les cristaux sont enveloppés dans de légères membranes* que l'on parvient à découvrir en dissolvant la matière minérale.

Un grand nombre d'urticées renferment, dans des cellules spéciales de leurs feuilles, des concrétions volumineuses de carbonate de chaux enveloppées dans un tissu construit autour d'un pédicelle de cellulose, organisme remarquable qui se développe avant l'apparition des concrétions calcaires.

Une particularité digne d'intérêt montre dans les *Chara vulgaris* et *Chara hispida, la substance calcaire maintenue à l'extérieur des cellules par l'organisme sécréteur.*

Une sécrétion liquide est aussi disposée périphériquement et contenue dans des enveloppes glanduleuses sur toutes les feuilles, branches et tiges de la glaciale (Mesembrianthemum cristallinum). Les oxalates de potasses ou de soude formant cette sécrétion donnent après l'incinération du carbonate alcalin : telle est, en particulier, l'origine de l'alcali dans la soude de Ténériffe.

Toutes *les substances oléiformes dans les plantes sont,* de même, *contenues dans des appareils sécréteurs* de chaque cellule ainsi qu'on peut le voir, soit directement, soit en attaquant les légers tissus qui recèlent l'huile. (Voyez la description, pages 40 et 232, de la deuxième série des planches.)

Un grand nombre d'observations au microscope, d'expériences et d'analyses ont démontré que *la silice est plus particulièrement injectée dans les membranes épidermiques, et surtout dans la cuticule* des plantes; qu'enfin cette dernière membrane, *toujours injectée de substances azotées,* offre une grande résistance aux agents chimiques.

Les aptitudes spéciales des plantes, pour puiser, dans le sol ou les eaux, certaines matières minérales de préférence aux autres, sont démontrées dans un tableau synoptique, résumant toutes les analyses et montrant l'utilité de l'alternance des cultures.

Une conséquence notable de la culture des plantes puisant successivement à différentes profondeurs du sol est de ramener à la superficie les engrais et amendements dissolubles infiltrés avec les eaux pluviales.

FEUILLES DÉCRÉPITANTES, PANACHÉES ET AUTOMNALES.

Dans le sixième mémoire, l'étude des feuilles décrépitantes montre que *l'occlusion partielle ou totale des stomates* est une des causes principales du phénomène, et que *la panachure des feuilles est accompagnée de l'oblitération des stomates et d'une accumulation d'eau dans les tissus,* conséquences naturelles *d'une diminution d'énergie vitale* dans ces feuilles; des altérations analogues, et surtout le rétrécissement des ouvertures des stomates coïncident avec l'affaiblissement des fonctions respiratoires et exhalantes des feuilles automnales, qui se colorent souvent par des infiltrations dans les tissus épidermiques.

L'examen microscopique et chimique a permis d'observer et de représenter à l'aide de figures la formation et le développement

des appareils respiratoires des plantes en présence des corps azotés qui prennent part à toutes les formations végétales.

PECTINE ET ACIDE PECTIQUE, *PANDANUS*, CORALLINÉES, TÉGUMENTS DES INSECTES, ACÉTATES ET PROTOXYDE DE PLOMB EN CRISTAUX, COMPLÉMENT DE DIVERSES ANALYSES DE RACINES, BOURGEONS, FRUITS, SÉVES, TOURBES, TERRES CULTIVÉES.

Une des applications importantes des données réunies dans le septième mémoire fut d'indiquer *l'emploi des bases calcaires et alcalines à former, avec la pectine et l'acide pectique, des composés interposés dans les parois et les méats intercellulaires*, et de montrer que ces deux substances organiques s'extraient aisément à froid des épidermes, écorces, tiges, feuilles et racines tuberculeuses des plantes.

La disposition en séries des cristaux cubiques d'oxalate de chaux logés dans une gaîne à compartiments donne une idée de la structure des raphides, et se montre fréquemment dans les tissus des tiges du *Pandanus*.

L'examen chimique des corallinées, la présence d'une *sécrétion amylacée dans la coralline officinale* concourent, avec la détermination organographique de M. Decaisne, à faire admettre les corallinées parmi les végétaux.

Une nouvelle étude et *l'analyse élémentaire des téguments des insectes et des crustacés* distingua nettement ces membranes de la cellulose, de la membrane épidermique et même de la cuticule des plantes.

En augmentant la stabilité de l'acétate de plomb tribasique par un composé ammoniacal, on a indiqué le moyen *de combiner l'oxyde de plomb avec les principes indifférents des végétaux*. La préparation d'une *litharge cristalline par voie humide* et d'un *hydrate tribasique de protoxyde de plomb en octaèdres réguliers*, est déduite de ces recherches.

Les proportions considérables de substance azotée et de matière grasse dans les choux-fleurs ont vérifié leur analyse élémen-

taire en expliquant leur propriété nutritive; des résultats analogues ont fait comprendre les *utiles applications économiques et les moyens de conservation des fruits du maïs.*

Des moyens simples d'analyse immédiate permettent d'extraire avec toutes ses propriétés physiques le *gluten pur du froment.*

En trouvant dans les séves et sur les parois des conduits séveux les matières propres aux développements des jeunes organismes, on ajoute une démonstration nouvelle de *l'influence de ces matières azotées puisées dans le sol, sur la nutrition végétale, avant l'apparition des organes foliacés.*

Les fruits de Cactus opuntia *renferment de la glucose,* tandis que *le lait de la noix de coco, le suc des melons, les amandes* de l'Arachis hypogea *et les tubercules des batates contiennent du sucre de canne.*

La plupart de ces recherches et les observations récentes sur la pectine et l'acide pectique rectifient sur plusieurs points la *composition chimique de la betterave à sucre* (voir p. 152).

Les *décrépitations des feuilles* du *Magnolia grandiflora* offrent un caractère dépendant d'une structure spéciale.

La *détermination des substances azotées et minérales propres à la nutrition des plantes dans les terres en culture* ouvre une voie nouvelle à *l'appréciation de l'état de fumure et d'amendement des terres,* lors de la reprise des baux, et permet d'espérer qu'on parviendrait, de cette manière, à moraliser et rendre plus profitables aux deux parties les conditions des fermages.

LOIS GÉNÉRALES

OBSERVÉES DANS L'ORGANISATION, LA COMPOSITION CHIMIQUE ET LES DÉVELOPPEMENTS DES VÉGÉTAUX.

L'observation des faits isolés acquiert une importance plus grande lorsqu'il est permis d'en déduire certaines lois générales qui étendent nos connaissances au delà du cercle de nos travaux, ou qui, du moins, peuvent servir de guides pour de nouvelles recherches.

Voici l'énoncé des principales lois naturelles, énoncé qui me semble suffisamment justifié par les faits et les vérifications contenus dans les sept mémoires précédents.

I. SPONGIOLES.

Les spongioles des radicelles de toutes les plantes phanérogames *se distinguent des autres parties des tissus en contiguïté, par l'abondance des substances azotées, molles, contractiles, absorbantes, qui remplissent leurs cellules.*

Les proportions considérables de ces substances sont en rapport avec l'énergie vitale, l'activité de développement des extrémités radicellaires et les importantes fonctions qu'elles accomplissent pour la nutrition végétale; leur altérabilité même produit l'effet utile d'arrêter l'absorption des liquides trop visqueux, astringents, alcalins, acides ou salés qui, portés dans la circulation, feraient périr la plante : peut-être démontrera-t-on plus tard que *ces corps organiques azotés ont aussi une influence directe sur les absorptions spéciales* exercées dans un même sol par certaines familles ou certaines espèces de végétaux.

II. JEUNES ORGANES DES VÉGÉTAUX.

Tous les très-jeunes organes foliacés, florifères ou fructifères, plus directement alimentés par la sève ascendante lorsque les stomates et les parties vertes ne sont pas encore développés, *contiennent en abondance des corps azotés, et généralement, dans ces parties aériennes encore la quantité des substances organiques à composition quaternaire est en raison directe des facultés de développement et en raison inverse de l'âge de chacun de ces organismes végétaux.*

III. DISTRIBUTION DES CORPS AZOTÉS DANS LES ORGANISMES DES PLANTES.

Les corps azotés, agents principaux de la vie active des plantes, *se retrouvent, dans toutes les cavités celluleuses ou tubulaires,* libres ou adhérents aux parois. *Le développement de ces corps précède souvent la formation de leurs enveloppes celluleuses,* comme cela se peut voir dans le liquide lactescent de la noix de coco, et au milieu des fluides, dans les lacunes de divers tissus où l'organisation se prépare. La réciprocité n'a jamais lieu.

IV. SÉCRÉTION ET COMPOSITION ÉLÉMENTAIRE DE LA SUBSTANCE AMYLACÉE.

La substance amylacée apparaît dans les tissus où s'amassent les matériaux propres aux développements ultérieurs de l'édifice végétal; on ne l'a jamais observée dans les tissus rudimentaires (spongioles, rudiments des bourgeons, ovules non fécondés, etc.), ni dans les vaisseaux, les méats, l'épiderme.

Sa densité = 1520; son poids équivalent = 1930; anhydre, sa formule = $C^{24}\ H^{18}\ O^{9}$; à l'état d'amylate d'eau ou d'amidon parfaitement desséché = $H^{2}\ O$, $C^{24}\ H^{18}\ O^{9}$; elle forme des hydrates définis avec 2, 4 et 10 équivalents d'eau; bien agrégée, elle est insoluble à froid.

V. AMIDON, FORMATION ET STRUCTURE.

Les grains d'amidon offrent des configurations très-variées dans les divers végétaux, mais *ressemblantes dans une même plante. Leur formation a lieu par intussuception de la substance* dont le passage laisse la trace appelée *hile,* ou plutôt celle d'un entonnoir pénétrant autour et près du centre ou de l'axe de chaque sphéroïde, ellipsoïde, etc. *Chaque couche interne est ainsi plus récente et moins agrégée que la couche enveloppante,* et, à plus forte raison, que les couches plus rapprochées encore de la superficie. *Cette formation s'effectue sans que les grains soient attachés ou adhérents aux parois des cellules.*

VI. DIASTASE; TRANSFORMATIONS DE LA SUBSTANCE AMYLACÉE.

Au moment où l'approvisionnement de la substance amylacée, défendue des agents extérieurs par sa structure et sa cohésion, *doit servir à développer de nouveaux tissus, son hydratation et sa dissolution ont lieu à la faveur* d'une matière active qui apparaît alors (*diastase*), douée d'une énergie énorme, bien que neutre ou inerte relativement aux autres corps de la nature. C'est ainsi que, plusieurs fois transformé en dextrine et en glucose solubles, cet approvisionnement passe successivement d'un tissu dans un autre, tantôt pour s'accumuler de nouveau, tantôt pour s'engager dans une plus forte agrégation sous formes membraneuses stables, constituant alors la trame des cellules.

VII. PECTINE ET ACIDE PECTIQUE.

L'acide pectique et la pectine préexistent simultanément, combinés avec la chaux, la soude et la potasse dans un grand nombre de végétaux; on peut les en extraire à l'état de pureté en opérant à froid.

VIII. CELLULOSE : COMPOSITION, STRUCTURE, RÔLE DANS LA VÉGÉTATION.

La cellulose, isomérique avec l'amidon, la dextrine et l'inuline, constitue la substance même des parois des cellules vésiculeuses, polyédriques ou allongées en fibres, tubes, vaisseaux ou trachées; à peu près pure, elle forme les parois cellulaires des spongioles, des périspermes, des fibres textiles, etc. Dans les parois rapidement épaissies, on remarque de nombreux canalicules; *la cellulose injectée de matière azotée et de silice, forme l'épiderme ou la cuticule épidermique* des tiges et des feuilles; parfois, comme *dans les couches épidermiques épaisses des cactées, les couches superposées de cellulose alternent avec les pectates et pectinates calcaires et alcalins.* Ces composés souvent remplissent les méats entre les cellules ou les fibres; *la cellulose se rencontre injectée d'inuline chez les lichens, Fucus, etc.* Plus ou moins imprégnée d'incrustations organiques, elle forme les différents bois.

IX. CARACTÈRES DISTINCTIFS ENTRE LES VÉGÉTAUX ET LES ANIMAUX.

Presque pure ou abondamment injectée, *la cellulose caractérise les êtres végétaux,* en constituant la trame qui relie toute leur structure. On ne l'a jamais rencontrée parmi les membranes animales, qui toutes renferment des proportions d'azote plus considérables même que la cuticule épidermique des végétaux.

X. FIBRES ET CONCRÉTIONS LIGNEUSES.

Les fibres ligneuses sont caractérisées par des matières organiques incrustantes injectées dans la trame de cellulose, au nombre de trois ou quatre, et dont les proportions variables, graduellement accrues, *rendent les bois durs, pesants, fragiles, susceptibles de poli; plus riches en carbone*, dont ils renferment depuis 47 jusqu'à 53 cen-

tièmes; *plus abondants en hydrogène, dont ils contiennent tous un excès* depuis 0,3 jusqu'à 0,7 p. o/o.

Rapidement formées dans les noyaux des fruits, dans les concrétions dures des poires, des écorces, etc. ces fibres ligneuses courtes, irrégulières, polyédriques ou arrondies, correspondent par leur composition élémentaire aux incrustations des bois durs; elles sont traversées dans leur épaisseur, jusqu'à la cellule mince primitive, par un grand nombre de canalicules convergeant vers leur cavité centrale.

XI. CAUSES DES ALTÉRATIONS SPONTANÉES DES DIFFÉRENTS BOIS.

Sous les influences réunies de l'humidité et de la température de l'air à certains degrés, les matières azotées contenues dans les fibres ligneuses s'altèrent rapidement; leur putréfaction occasionne la pourriture du bois. Les effets de ces réactions sont très-variables, mais dépendent généralement de la contexture et de la composition des tiges ligneuses. Les bois blancs légers, dont les fibres à parois minces offrent plus de surface et contiennent plus de matières azotées sont les plus altérables; l'aubier des bois durs se rapproche des précédents.

Le cœur des mêmes bois durs résiste bien plus, en raison de l'épaisseur de la cohésion de ses fibres et des moindres proportions de matières organiques azotées.

Les bois des conifères résistent en raison des huiles essentielles et des résines qu'ils contiennent, bien que leur structure tubulaire puisse propager les altérations spontanées.

Les tiges d'acacia réunissent plusieurs conditions de structure et de composition qui expliquent leur résistance remarquable en des lieux où, dans un temps moitié moins long, les bois ci-dessus sont désagrégés par la pourriture : ce sont, 1° l'épaississement de leurs fibres par la cellulose fortement agrégée; 2° des proportions deux à trois fois moindres des matières incrustantes interposées qui, dans les bois très-durs, accélèrent la pourriture

en divisant trop la cellulose. Employé dans les boisages des mines, gournables des navires, encoignures des caisses d'orangers, échalas des vignes et raies des roues de voitures, le bois d'acacia peut avoir une durée double de celle du cœur de chêne; si l'on ajoute que ce bois, en raison même de la proportion et la tenacité de sa cellulose et du faible volume de son aubier, s'emploie avantageusement pour confectionner les alluchons et dentures des machines, qu'enfin sa croissance est rapide, on fera bien comprendre l'intérêt que doit offrir la culture de l'acacia.

XII. COMPOSITION IMMÉDIATE DES ORGANISMES REPRODUCTEURS DES VÉGÉTAUX.

Les organismes plus particulièrement destinés à la reproduction des plantes, les *fruits, graines, spores* et *sporules, contiennent, réunis,* en proportions souvent plus fortes que dans les autres tissus, *les produits indispensables aux développements ultérieurs;* ce sont : outre la cellulose, une ou plusieurs de ses congénères désagrégeables ou solubles (amidon, dextrine, sucre, glucose); 2° des substances neutres azotées sous formes concrètes et solubles; 3° des matières grasses; 4° des sels de chaux, potasse ou soude; 5° de la silice; 6° de l'eau.

XIII. SECRÉTIONS MINÉRALES DANS LES PLANTES.

Les substances minérales, loin d'être distribuées au hasard dans les plantes, y sont triées puis réparties dans des organismes spéciaux disposés pour les recevoir.

Tels sont : *la silice,* plus particulièrement portée vers la périphérie, injectée dans les membranes épidermiques et surtout dans l'épaisseur de la cuticule des feuilles, tiges, et des poils exposés à l'air atmosphérique; *l'oxalate de chaux,* dont la base puisée dans le sol s'unit à un acide végétal. Ce sel, universellement répandu dans les plantes, y affecte les diverses formes polyé-

driques, des raphides en longues aiguilles prismatiques et des cubes, rhomboëdres prismes courts; conformations déterminées par les corps organiques qui enveloppent et réunissent les particules cristallines dans des cellules appropriées. Les agglomérations de ces cristaux sont très-nombreuses et muriformes dans la plupart des feuilles autour des vaisseaux des nervures.

Le carbonate de chaux formant dans les feuilles des plantes de la grande famille des urticées ces jolies concrétions mamelonnées contenues dans un tissu léger qui se rattache autour d'un pédicelle élégamment suspendu à l'épiderme, au milieu d'une cellule agrandie d'avance, le même sel calcaire vient incruster, à l'aide d'un tissu spécial qui le fixe, les parois externes des cellules allongées et des tubes de plusieurs espèces des characées, tandis que d'autres plantes de la même famille sont dépourvues du tissu sécréteur et de la concrétion minérale, quoique vivant dans les mêmes eaux.

L'oxalate de soude et de potasse en solution alcaline incolore, contenue dans les glandes vésiculeuses qui entourent et décorent toutes les parties aériennes de la glaciale (*Mesembrianthemum cristallinum*); tandis qu'à l'intérieur des mêmes feuilles et tiges de cette plante se trouvent des matières vertes dans un suc acide.

Ainsi donc, dans les végétaux, les substances minérales, comme les matières grasses, comme les huiles essentielles et divers principes immédiats, sont sécrétées sous l'influence des corps à composition quaternaire, et rangées dans des organismes spéciaux.

XIV. FORMATION, DÉVELOPPEMENT, OBLITÉRATION DES STOMATES; FEUILLES DÉCRÉPITANTES; PANACHURES DES FEUILLES; FEUILLES AUTOMNALES.

Étudiés sur les parties d'abord enveloppées, où l'air commence à prendre accès et détermine leur formation, *les stomates se développent, comme tous les appareils des végétaux, sous l'influence de corps à composition quaternaire.* Une pellicule, injectée de matière azotée et continue avec la cuticule épidermique, pénètre dans

l'ouverture évasée de chaque stomate, dont elle tapisse les parois jusque dans la cavité pneumatique.

Lorsque, sous certaines influences, *les fonctions des feuilles se ralentissent, leurs stomates, s'oblitérant par degrés*, interceptent le libre passage des gaz et des vapeurs : il en résulte que *plusieurs feuilles consistantes font entendre de petites explosions lorsqu'on les expose à la flamme.* Dans beaucoup de cas, *cette diminution de perméabilité, retardant l'exhalation aqueuse, fait infiltrer dans les tissus et les couches épidermiques, des liquides colorés qui produisent des panachures*; enfin, *une cause analogue opère les modifications qui caractérisent l'état de souffrance des feuilles automnales.*

XV. COMPOSITION ÉLÉMENTAIRE GÉNÉRALE DES PLANTES À L'ÉTAT NORMAL.

La somme des éléments de toute plante prise dans son ensemble peut être représentée par du carbone, de l'eau, plus un excès d'hydrogène. Les substances azotées neutres et grasses concourent surtout à donner cet excès d'hydrogène dans les cryptogames et les plantes herbacées; ces substances, moins abondantes, et les concrétions ligneuses donnent le même résultat dans les végétaux *ligneux*.

XVI. COMPOSITION IMMÉDIATE DES TOURBES.

Les tourbes, engendrées par la décomposition incomplète de divers végétaux, contiennent sept produits qui correspondent à l'altération de chacun des principes immédiats du ligneux et des parties herbacées.

XVII. CORPS DOUÉS DE VIE DANS LES PLANTES.

Enfin, une loi sans exception me semble apparaître dans les faits nombreux que j'ai observés, et conduire à envisager sous un nouveau jour la vie végétale. Si je ne m'abuse, tout ce que dans

les tissus végétaux la vue directe ou amplifiée nous permet de discerner sous les formes de cellules et de vaisseaux, ne représente autre chose que les enveloppes protectrices, les réservoirs et les conduits, à l'aide desquels les corps animés qui les sécrètent et les façonnent, se logent, puisent et charrient leurs aliments, déposent et isolent les matières excrétées.

Conduit à cette opinion par mes premières études sur les organismes végétaux, j'y fus ramené sans cesse, en cherchant des faits nouveaux capables de dévoiler la vérité.

Au moment d'exprimer cette pensée, je me suis bien souvent tenu dans des termes de doute qui la laissaient entrevoir; peut-être aurais-je quelque temps encore gardé la même réserve, s'il ne m'eût semblé que M. de Mirbel, par une autre voie, surprenant au milieu d'un fluide le travail de l'organisation qui *précède* la formation des cellules, arrivait à des conclusions concordantes avec celles de mes propres travaux.

A cet imposant appui vinrent se joindre les résultats confirmatifs des investigations que nous avons entreprises de concert, et dont nous soumettrons prochainement les détails à l'Académie.

Je n'hésite donc plus aujourd'hui; mais, dans l'espérance qu'on voudra bien suspendre une critique prématurée, je m'empresse d'ajouter que ces déductions nouvelles de la chimie appliquée à la physiologie végétale, s'accordent aussi avec les faits introduits dans cette science par nos illustres devanciers et contemporains. Lorsque je développerai ces applications, j'espère pouvoir établir, en outre, comment elles expliquent plusieurs observations, qu'il était bien difficile de comprendre avec le seul secours des faits organographiques précédemment admis.

Afin de compléter aujourd'hui l'énoncé du fait général, je rappellerai que les corps doués des fonctions accomplies dans les tissus des plantes sont formés des éléments qui constituent, en proportions peu variables, les organismes animaux, qu'ainsi l'on est conduit à reconnaître une immense unité de composition élémentaire dans tous les corps vivants de la nature.

DESCRIPTION DES PLANCHES.

DEUXIÈME SÉRIE[1].

PLANCHE II.

CONCRÉTIONS DU *FICUS ELASTICA*.

La 1re figure à gauche de la planche montre, par une coupe dans un plan perpendiculaire au limbe de la feuille du *Ficus elastica*, une concrétion calcaire à l'état normal : on distingue les mamelons qui sont en saillie sur toute la périphérie de cette concrétion; la membrane qui enveloppe et limite ces protubérances est visible en plusieurs endroits.

Le pédicelle qui supporte la concrétion est soudé ou contigu au tissu épidermique.

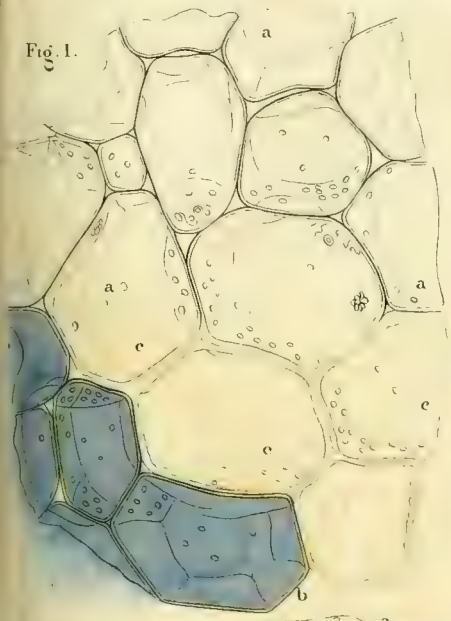
L'agrandissement considérable de la cellule préparée pour cette concrétion est manifeste, car elle traverse deux rangées de cellules sous-épidermiques, se prolongeant encore dans le parenchyme, sur une longueur presque égale à deux des cellules remplies de granules verts.

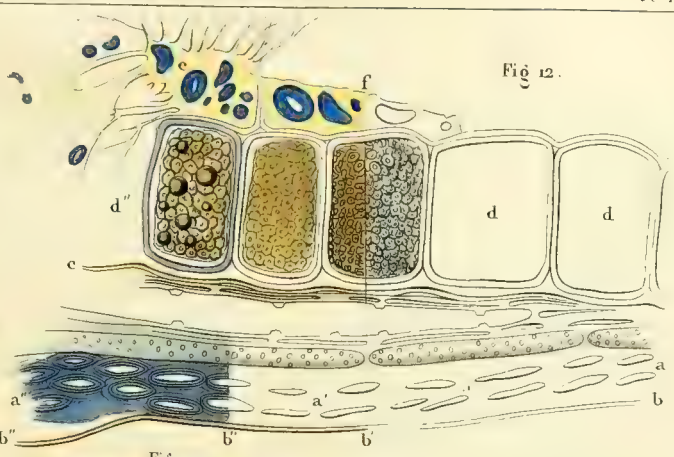
Quelques corps azotés se voient autour et près du pédicelle; on distingue enfin la cuticule épidermique et ses épaisissements en coins, qui correspondent à tous les intervalles entre les cellules de l'épiderme.

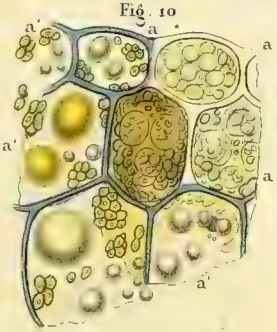
La 2e figure, au milieu de la planche, représente le tissu léger qui contenait, dans ses petites cellules, toutes les parties calcaires : celles-ci, ayant été dissoutes par un acide faible, ne cachent plus la partie renflée du pédicelle, qui était engagée dans la concrétion.

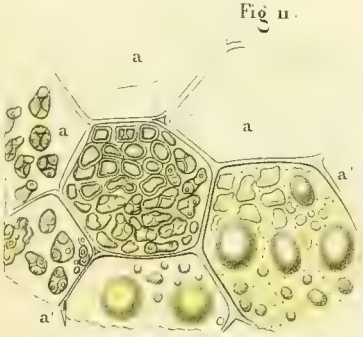
La 3e figure, à droite de la planche, indique le phénomène curieux

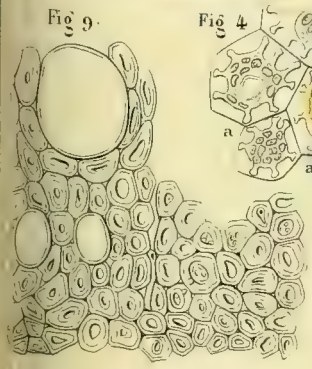
[1] Voir la 1re série, page 372 du T. VIII, et planches I, II, etc. 2e série, page 208.

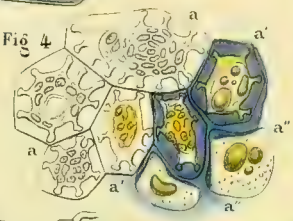


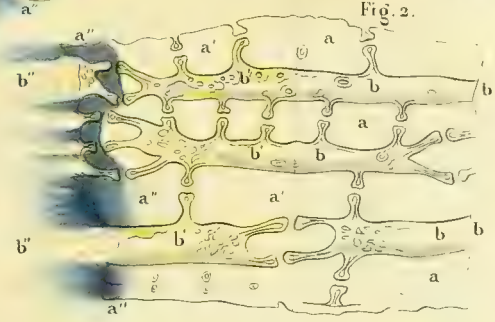


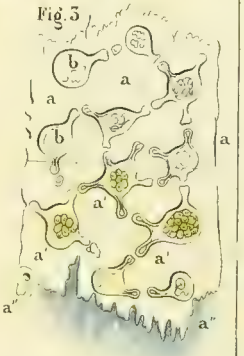


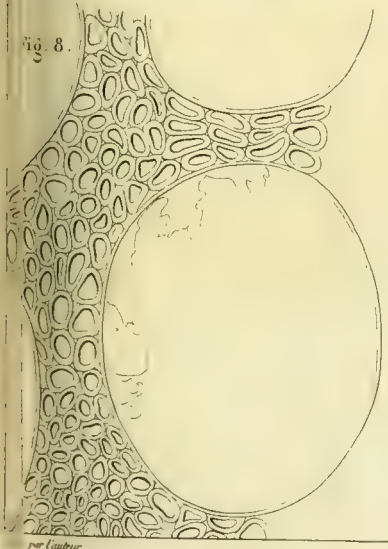


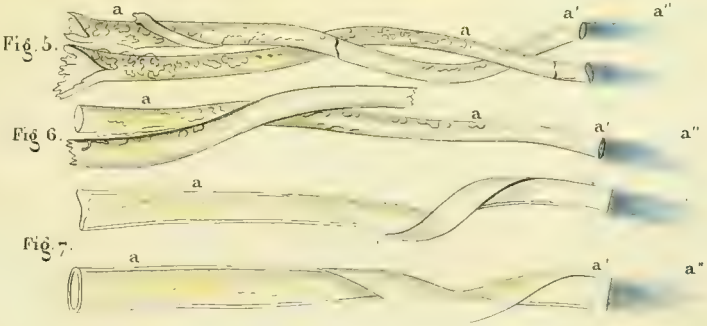








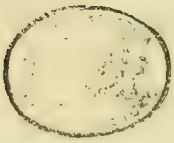


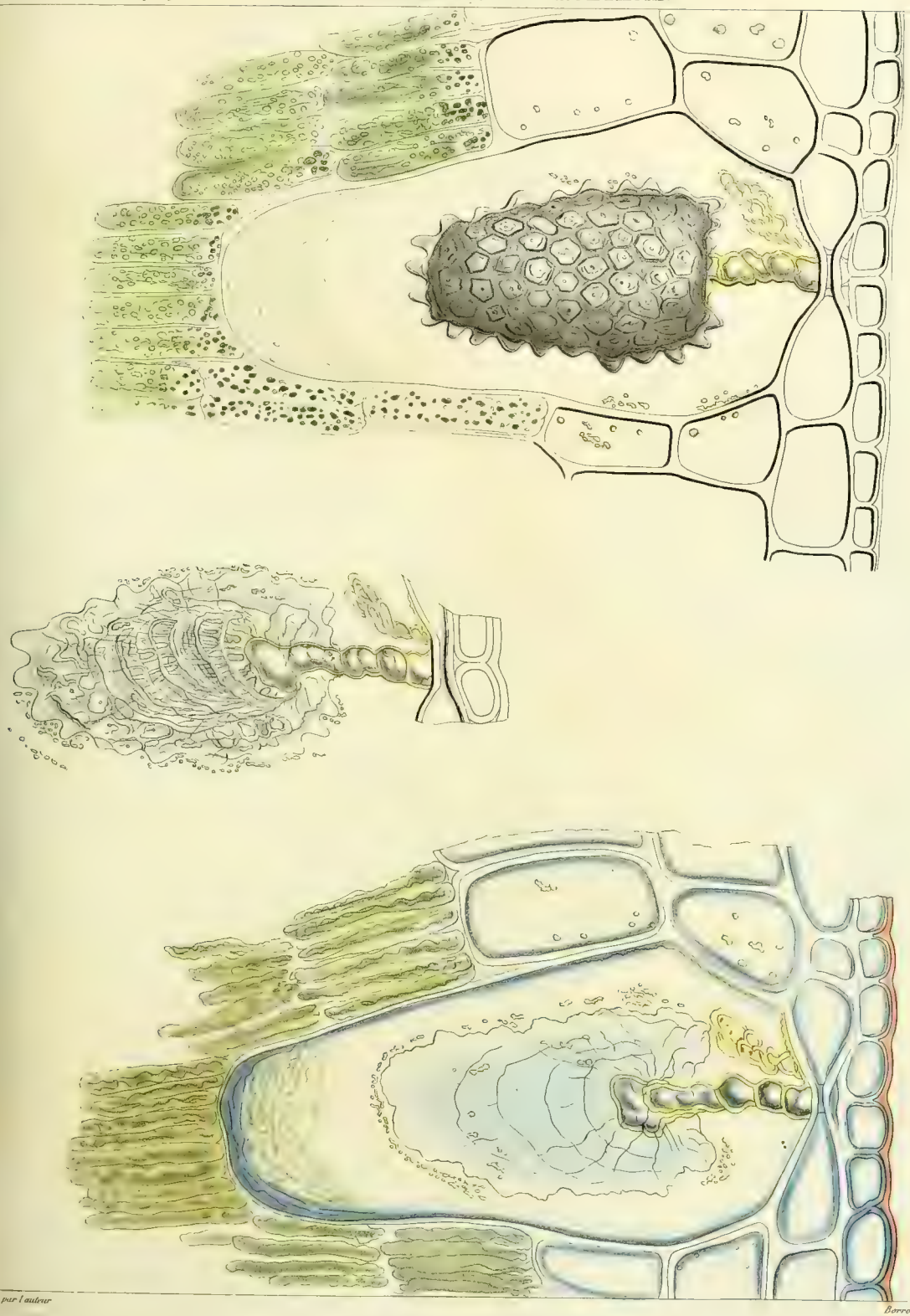


par l'auteur

Berronier sc.

Cellulose, bois, Secrétions huileuses.





Dessiné par l'auteur

Borromée sc

Concrétions du Ficus elastica.

Fig. 1.

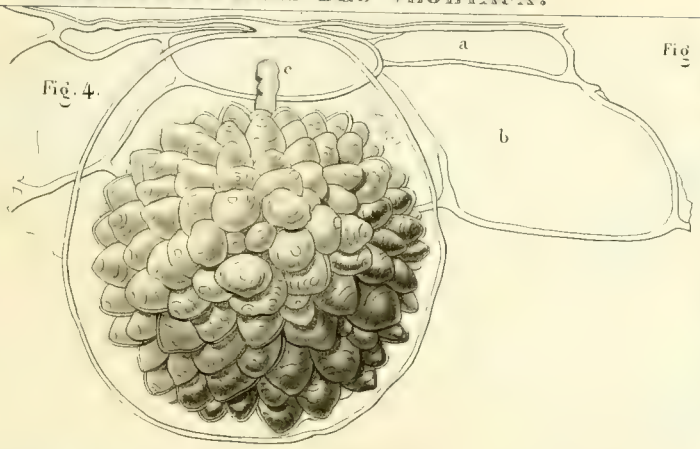


Fig. 4.

Fig. 5

Fig. 5 bis

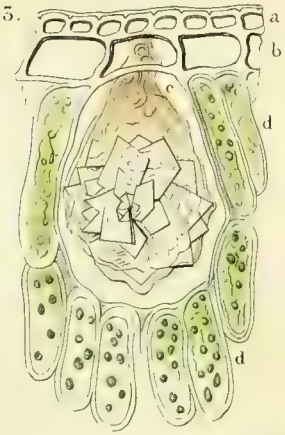


Fig. 3.

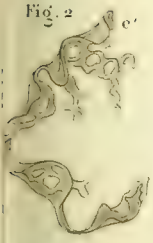


Fig. 2

Fig. 4 bis

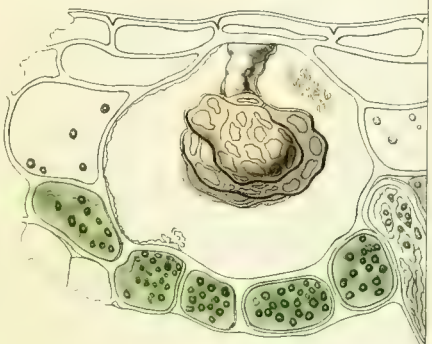


Fig. 6.

Fig. 10.

Fig. 4 ter

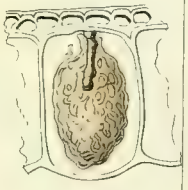


Fig. 7.

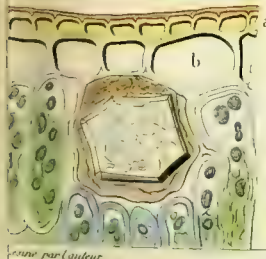


Fig. 9.

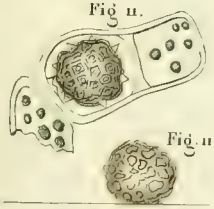


Fig. 8 bis

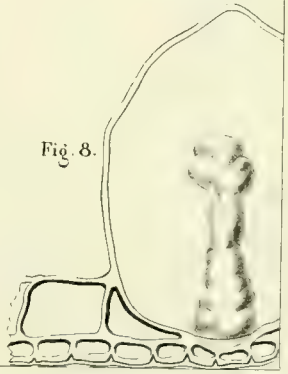
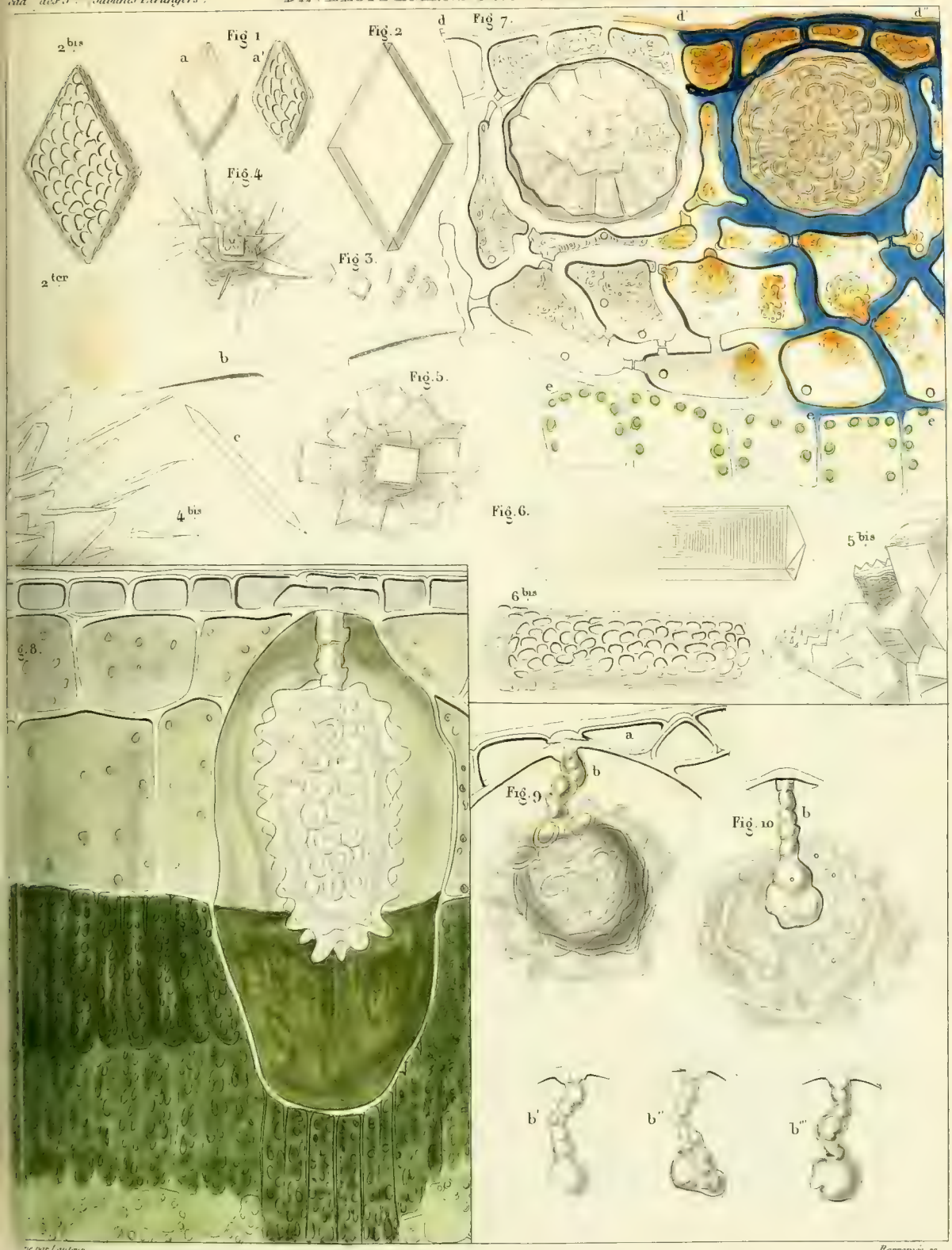


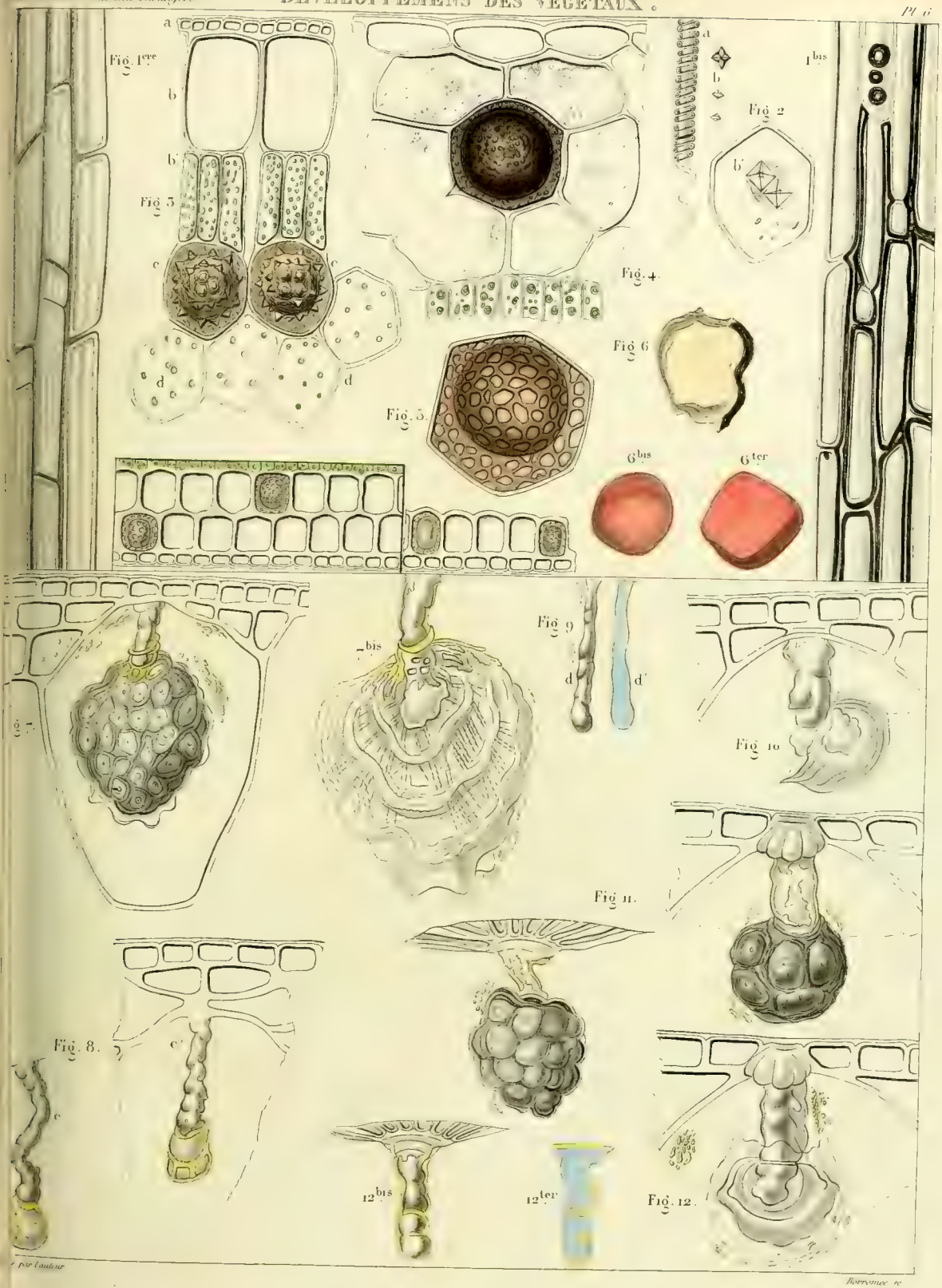
Fig. 8.

Concrétions: Juglans regia, Parietaria off., Urtica nivœa Morus nigra, Ficus reclinata, Citrus limonia.

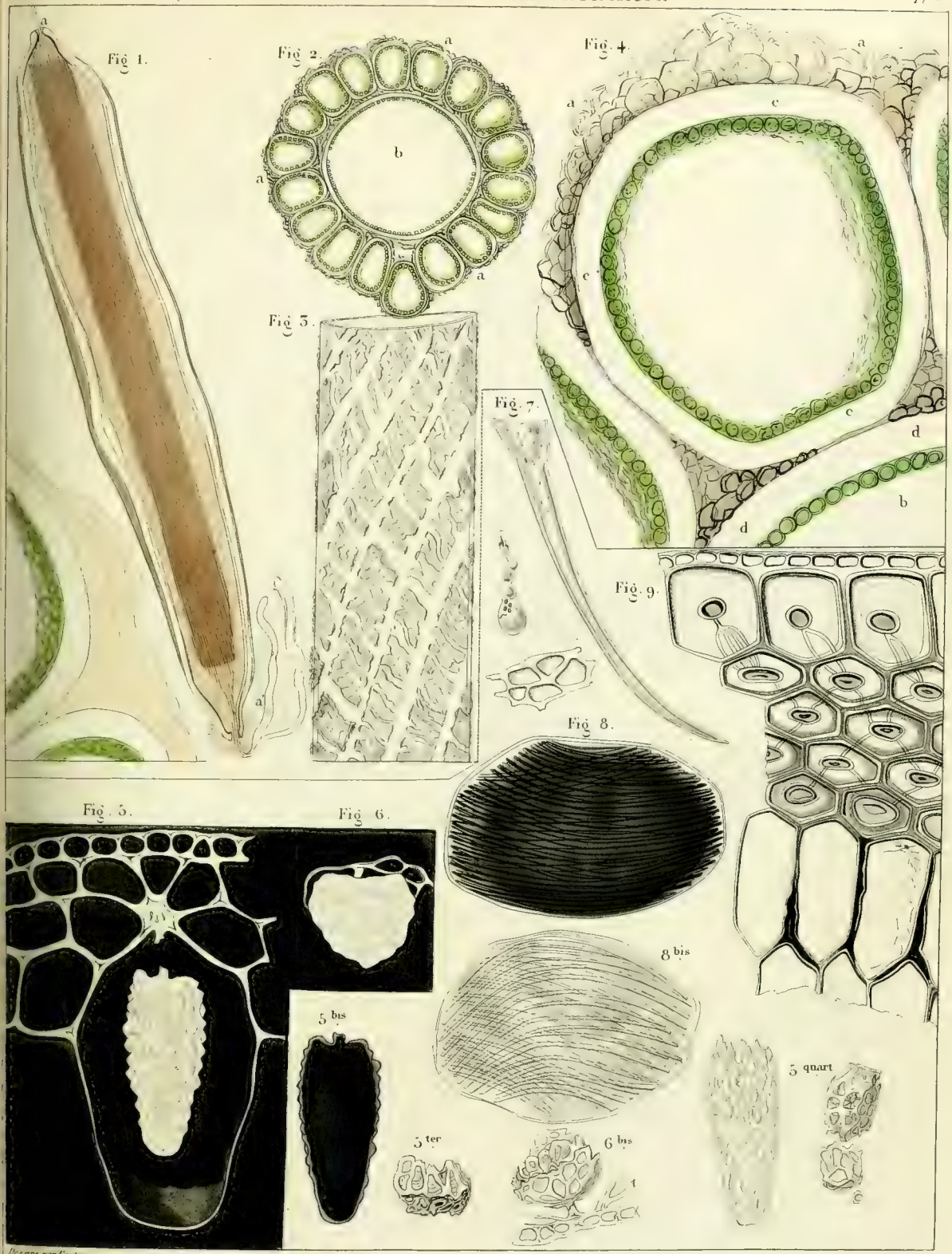
Concrétions des feuilles Conocephalus nucleiflorus. Broussonetia papy., Humulus lup., Arum Col. Ficus montana, F. ferruginea, F. carica, F. laurifolia.



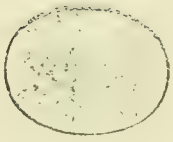
Cristaux et Concrétions dans les tiges et feuilles.

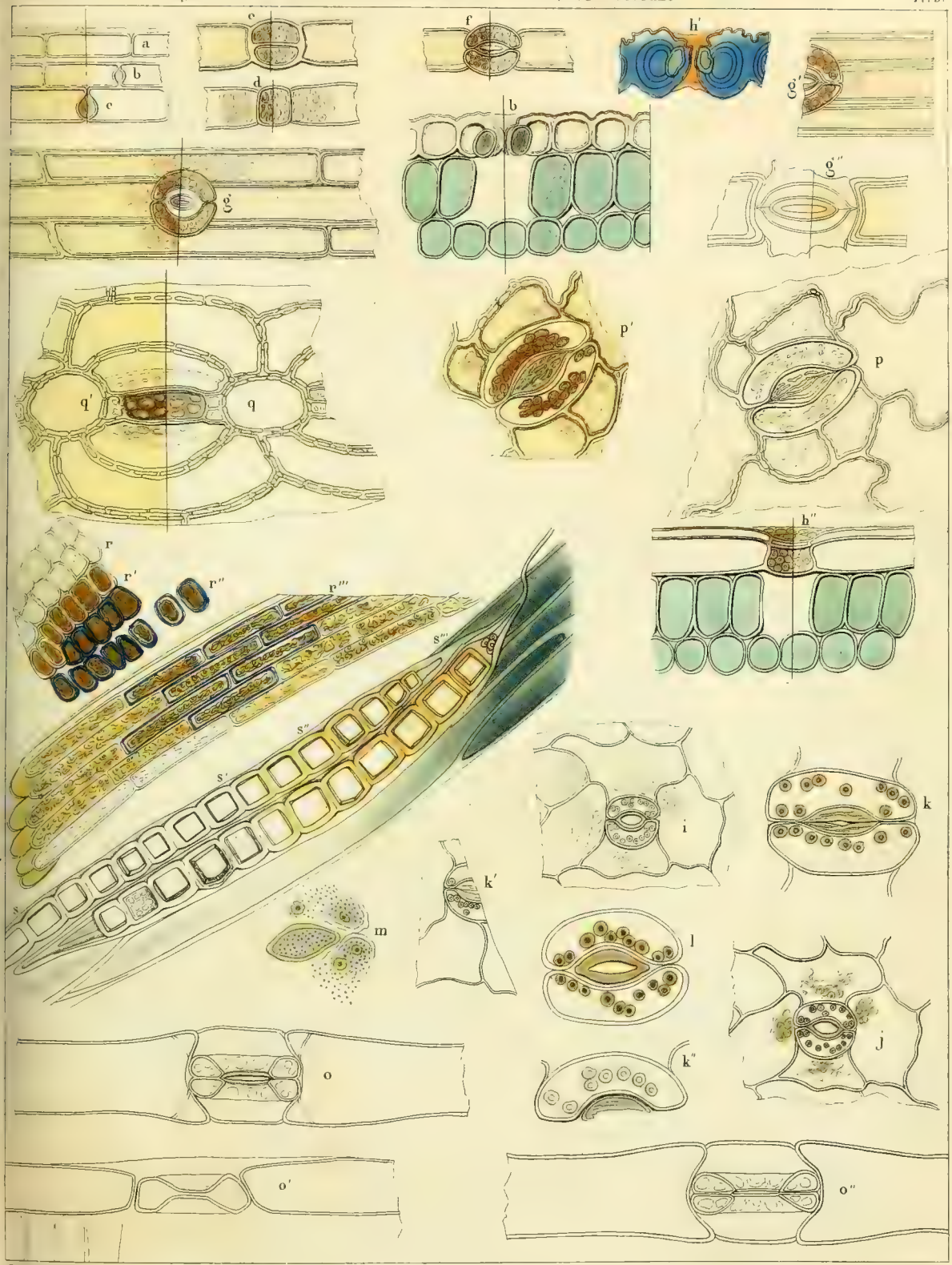


Incrustations, Cristaux, Sécretions, huileuses et Concrétions dans les feuilles.



Cristaux, Concrétions, Incrustations dans les feuilles et les tiges.





Formation et développement des Stomates, tissu des radicelles, cristaux du Pandanus.

qui se passe sous le microscope lorsque après avoir dissous, par un acide faible, la concrétion calcaire, on fait intervenir, 1° une solution aqueuse, alcoolisée d'iode, et 2° l'acide sulfurique concentré. Celui-ci désagrége la cellulose, et, à l'instant où cette désagrégation arrive au terme représentant les groupes de particules amilacées, l'effet de teinture en bleu violet se manifeste sous l'influence de l'iode; le même réactif, dans ces circonstances, colorant en jaune orangé les corpuscules azotés, on voit ceux-ci se dessiner nettement autour des membranes bleuies et du pédicelle qui maintenaient la concrétion.

A la partie supérieure de la feuille on voit la coupe de la cuticule trancher, par sa coloration orangée, sur les nuances violettes de la cellulose sous-jacente.

PLANCHE III.

CONCRÉTIONS MINÉRALES DES *JUGLANS REGIA*, *PARIETARIA OFFICINALIS*, *URTICA NIVÆA*, *MORUS NIGRA*, *FICUS RECLINATA*, *CITRUS*, *LIMONIA*.

La figure 1re représente une agglomération de cristaux rhomboëdriques d'oxalate de chaux, dans une cellule agrandie d'une feuille de *Juglans regia*.

En *a* on voit l'épiderme recouvert de sa cuticule; en *b*, la rangée de cellules sous-jacentes; en *c*, les membranes enveloppant les cristaux qui forment la concrétion.

La figure 2 indique les débris du tissu organique qui enveloppait les cristaux, et qui ont résisté à l'acide azotique employé pour dissoudre la concrétion minérale.

La figure 3 montre une autre concrétion observée dans la même feuille et offrant beaucoup d'analogie avec la première : *a* désigne l'épiderme et sa cuticule; *b*, la rangée de cellules sous-jacentes; *c*, les cellules du parenchyme vert dans lequel la cellule spéciale a été agrandie, pour contenir les cristaux d'oxalate calcaire enveloppés dans le tissu organique.

La figure 4 représente une des volumineuses concrétions mamelonnées des feuilles de pariétaire. Cette concrétion, composée de carbonate de chaux, est sécrétée dans un tissu léger, maintenu par un pédicelle *c*,

adhérent à l'épiderme. La cellule spéciale développée sous l'épiderme *a* offre des dimensions considérables comparativement avec les cellules *b* de la même rangée, mais évidemment en rapport avec le volume de la concrétion.

La figure 4 *bis*, tracée suivant une échelle de moitié moindre, indique la disposition de la cellule au milieu de laquelle est implanté le pédicelle, soutien de la concrétion.

La figure 4 *ter* montre la concrétion cassée en deux, laissant discerner sa structure interne, c'est-à-dire la disposition en couches concentriques du carbonate de chaux dans chacune des vacuoles du tissu spécial.

Fig. 5. Concrétion de carbonate calcaire observée dans une feuille d'*Urtica nivea*.

Fig. 5 *bis*. La même concrétion, vue après la réaction d'un acide faible qui, ayant fait disparaître toute la substance minérale, laisse voir le tissu spécial et son pédicelle.

Fig. 6. Concrétion calcaire observée dans une feuille du *Morus nigra*, portée par un fort pédicelle au milieu d'une très-grande cellule.

Fig. 7. Concrétion de la face supérieure d'une feuille de *Ficus reclinata*, vue après la dissolution du carbonate de chaux.

Fig. 8 et 8 *bis*. Gros pédicelles, disposés sur l'épiderme de la face inférieure de la même feuille pour recevoir des concrétions de carbonate de chaux.

Fig. 9. Cristal rhomboëdrique tel qu'on en voit un grand nombre dans les coupes des feuilles de *Citrus*. Il est contenu dans un tissu léger, enveloppé lui-même par une cellule agrandie.

Fig. 10. Coupe d'une feuille de *Limonia*, sur laquelle la solution d'iode a coloré directement la cuticule de l'épiderme *a* en jaune orangé, laissant incolore la rangée de cellules sous-jacentes *b*; un gros cristal polyédrique irrégulier se montre dans une grande cellule, enveloppé par un léger tissu que l'iode a teint en jaune fauve. Le même réactif a teint en bleu quelques cellules et des enveloppes de granules vertes, formées par une trame de cellulose peu agrégée.

Fig. 11. Concrétion muriforme d'oxalate de chaux, telle qu'on en rencontre en grand nombre autour des vaisseaux des nervures des feuilles.

Fig. 11 *bis*. La même concrétion, laissant son tissu spécial, après la réaction de l'acide azotique *a*, *o*, *i*.

PLANCHE IV.

CONCRÉTIONS DES FEUILLES DES *CONOCEPHALUS NAUCLEIFLORUS*, *BROUSSONETIA PAPYRIFERA*, *HUMULUS LUPULUS*, *ARUM COLOCASIA*, *FICUS MONTANA*, *F. FERRUGINEA*, *F. CARICA* ET *F. LAURIFOLIA*.

Fig. 1. Concrétion couchée, irrégulière, mamelonnée des feuilles du *Conocephalus naucleiflorus* : *a*, épiderme; *b*, rangée de cellules, dont faisait partie la cellule agrandie pour contenir la concrétion.

Fig. 1 *bis*. La même concrétion, graduellement attaquée par l'acide chlorhydrique étendu de 100 parties d'eau. On voit la substance minérale, réduite de volume dans toutes ses dimensions, laissant déborder autour d'elle le tissu spécial en partie vidé.

Fig. 2 et 2 *bis*. Trois degrés de développement des poils d'une feuille de *Broussonetia papyrifera* : dans le premier, en *c*, on remarque un pédicelle latéralement implanté sur la paroi interne du poil, et déjà entouré des premiers rudiments du tissu destiné à loger les particules calcaires; dans le deuxième, en *c'*, on voit le même tissu considérablement développé et soutenu par un plus gros pédicelle; dans la base agrandie du même poil, en *c''*, fig. 2 *bis*, toutes les dimensions des mêmes parties se sont accrues, et la concrétion de carbonate de chaux, introduite dans toutes les loges du tissu léger, fait voir la dernière rangée des petites cellules remplies et offrant l'apparence de mamelons arrondis.

Fig. 3. Concrétion pédicellée de carbonate de chaux dans un poil d'une feuille de Houblon (*Humulus lupulus*).

Fig. 4. Cellule d'*Arum colocasia*, remplie de raphides enveloppées d'un tissu azoté colorable en orangé fauve par l'iode.

Fig. 5. Raphides isolées d'*Arum colocasia*.

Fig. 5 *bis*. Les mêmes, en partie désagrégées par l'acide azotique étendu de 10 parties d'eau.

Fig. 6. Concrétion calcaire, pédicellée, sous un poil d'une feuille de *Ficus montana*.

Fig. 7. Coupe d'une feuille de *Ficus ferruginea*, où se trouve une cellule de grande dimension, disposée pour recevoir une concrétion calcaire. Déjà, dans la dépression de l'épiderme *a*, au point *b* de jonction avec la deuxième rangée de cellules et la cellule agrandie, on

remarque l'insertion du pédicelle *c*, destiné à suspendre la concrétion ; on voit de plus, en *c'*, les premiers développements du tissu spécial qui doit, plus tard, contenir le carbonate de chaux. Sur la gauche de cette figure, en *c''*, *c'''* et *c''''*, on a dessiné des pédicelles observés dans la même feuille, et dont le bout est enveloppé d'un tissu propre aux concrétions, plus développé qu'en *c'*, mais non encore rempli de carbonate calcaire. Autour de tous ces tissus on remarque des corps granuleux azotés.

Fig. 8 et 9. Deux des concrétions complétement incrustées d'une feuille plus âgée du même figuier.

Fig. 10. Concrétion de la figure 9, vue au moment où, sous le microscope, l'acide chlorhydrique très-faible commence à dissoudre le carbonate et dégager le tissu organique.

Fig. 11. La même, entièrement privée de l'incrustation calcaire, laissant apercevoir la partie du pédicelle engagée dans le tissu propre de la concrétion.

Fig. 12. Concrétion globuleuse, adhérente, par son pédicelle, à la face inférieure d'une feuille de *Ficus carica*.

Fig. 12 *bis*. La même concrétion privée de tout son carbonate de chaux par l'acide chlorhydrique faible, qui a dégagé le tissu spécial et laissé voir, par transparence, le bout renflé du pédicelle.

Fig. 12 *ter*. La même encore, subissant les réactions combinées de l'iode et de l'acide sulfurique qui manifestent, par une coloration bleu-violet la présence de la cellulose presque pure, et par une coloration jaune-orangé, les granules azotés et la cuticule épidermique.

Fig. 13. Concrétion calcaire, à l'état normal, d'une feuille de *Ficus laurifolia*.

Fig. 14. La même, privée, par un acide affaibli, du carbonate de chaux, laissant discerner le pédicelle entier, par transparence, au travers du tissu spécial.

PLANCHE V.

CRISTAUX ET CONCRÉTIONS MINÉRALES DES AURANTIACÉES, DES JUGLANDÉES, DE PLUSIEURS *CACTUS*, DU *MESEMBRIANTHEMUM CRISTALLINUM*, DU *FICUS ELASTICA* ET DU *FICUS BENGHALENSIS*.

Fig. 1 *a* et fig. 2. Cristaux rhomboëdriques d'oxalate de chaux, tels

qu'on en trouve dans les feuilles des aurantiacées et des juglandées, et de beaucoup d'autres plantes où ils se rencontrent généralement plus petits.

Fig. 1 *a'* et fig. 2 *bis*. Les mêmes cristaux, attaqués par l'acide azotique à 0,1, montrant encore des fragments arrondis d'oxalate enveloppés d'un tissu spécial.

Fig. 2 *ter*. Tissu spécial isolé par suite de la dissolution complète de l'oxalate de chaux du cristal (fig. 2); ce très-léger tissu est jauni et contracté par l'iode.

Fig. 3. Cristaux d'oxalate de chaux observés dans les racines et feuilles des betteraves et représentés, les trois premiers, à l'état normal, les trois suivants, attaqués par l'acide azotique et laissant voir leur tissu organique.

Fig. 4. Concrétion de cristaux aigus irradiés, comme on en trouve un grand nombre dans les *Cactus opuntia*, *Ficus indica*, *tuna*, *brasiliensis*, *ferox*, *microdasys*, *etc.*

Fig. 4 *bis*. Partie d'une semblable concrétion vue sous un très-fort grossissement. Tous ces cristaux sont formés d'oxalate calcaire.

Fig. 5. Concrétion de cristaux prismatiques, tels qu'on les rencontre dans les *Cereus peruvianus*, *cetaceus*, *nycticalius; Cactus obtusus*, *triangularis*, *etc.*

Fig. 5 *bis*. Partie d'une concrétion semblable, observée sous un très-fort grossissement, également composée d'oxalate de chaux.

Fig. 6. Prisme isolé des *Cactus* désignés ci-dessus (fig. 5).

Fig. 6 *bis*. Le même, attaqué par l'acide azotique et laissant voir la substance organique entre les fragments cristallins arrondis [1].

Fig. 7. De *d* en *d'*, une des concrétions normales ayant la forme de sphéroïdes, observées sous la première rangée des cellules épidermiques du *Cactus glaucescens*, où elles constituent une couche presque continue; de *d'* en *d''*, on remarque les effets des réactions combinées de l'iode et de l'acide sulfurique, qui (après la dissolution de l'oxalate par l'acide azotique) colorent en fauve jaunâtre le tissu propre de la concrétion; en jaune orangé foncé, la cuticule épidermique et les corps azotées contenus dans toutes les cellules épidermiques et même dans leurs pertuis ou canalicules; en bleu violet,

[1] Les cristaux à lames aiguës et les prismes se rencontrent simultanément dans les *Rhipsalis*.

toute l'épaisseur des parois des cellules situées sous la cuticule dans la profondeur des couches épidermiques superposées.

Fig. 8. Vue par réflexion (comme corps opaque) d'une coupe de feuille de *Ficus elastica*, montrant la concrétion calcaire pédicellée dans la cellule agrandie au milieu des tissus et parenchyme de cette feuille.

Fig. 9. Concrétion de carbonate de chaux commençant à se dissoudre dans un acide affaibli, observée en cet état dans une feuille de *Ficus benghalensis*. Le tissu spécial se montre alors débordant la concrétion et conservant les formes mamelonnées : *a*, cellules de l'épiderme sous la cuticule ; *b*, grande cellule contenant la concrétion.

Fig. 10. Une des concrétions des feuilles du *Ficus benghalensis* montrant son pédicelle entier au travers des membranes du tissu léger devenues transparentes par suite de la dissolution du carbonate de chaux : *b*, pédicelle terminé par un triple renflement ; *b'*, *b''* et *b'''*, trois variétés de forme observées dans les pédicelles débarrassés des concrétions et du tissu qui enveloppaient leur partie inférieure toujours renflée.

PLANCHE VI.

INCRUSTATIONS, CRISTAUX, SÉCRÉTIONS HUILEUSES ET CONCRÉTIONS DANS LES FEUILLES.

Fig. 1. Tissus autour des vaisseaux des nervures de diverses feuilles, les cellules allongées s'y montrent agglutinées par des pectates calcaires et alcalins contenant des traces de carbonate, de sorte que les acides qui désagrégent (l'acide sulfurique à deux équivalents d'eau par exemple) et pénètrent dans les méats intercellulaires, attaquent ces substances interposées et donnent naissance à un dégagement gazéiforme qui se manifeste, comme on le voit, fig. 1 *bis*, en gonflant les intervalles, y produisant les effets de réfraction des gaz dans les liquides, et sortant parfois par des pertuis vers l'extrémité des cellules dans lesquelles les gaz forment des bulles, comme la figure l'indique.

Fig. 2. Cellule d'une feuille d'*Oxalis acetosa* où se rencontrent en *b'* deux cristaux octaédriques d'oxalate de chaux enveloppés dans un tissu léger. En *b*, on a figuré des cristaux semblables plus petits, dont on

remarquera quatre assemblés en croix; *a*, trachée coupée en deux.

Fig. 3. Coupe d'une feuille de *Begonia undulata* : *a*, épiderme recouvert de sa cuticule; *b*, grandes cellules; *b'*, cellules longues, abondantes en granules verts; *c*, rangées de cellules spéciales contenant de volumineuses concrétions de cristaux d'oxalate calcaire agglomérés en sphéroïdes et enveloppés dans un tissu organique; *d*, cellules sous-jacentes plus rapprochées de la face inférieure de la feuille.

Fig. 4. Coupe d'une feuille de *Piper colubrinum*: on y remarque une sécrétion globuliforme de substance huileuse contenue dans un tissu organique épais.

Fig. 5. Sécrétion semblable plus récemment formée, plus translucide, laissant voir un tissu membraneux qui l'enveloppe.

Fig. 6. La première sécrétion extraite du tissu déchiré; fig. 6 *bis* et 6 *ter*, sécrétions attaquées et teintes en rouge par la réaction de l'acide sulfurique.

On voit au-dessous de la fig. 5 deux rangées de cellules sous l'épiderme de la face inférieure de la même feuille, qui contiennent des sécrétions huileuses analogues aux précédentes, mais d'un moindre volume.

Fig. 7. Coupe prise dans une feuille de *Ficus Neumani*, montrant une concrétion calcaire dans une grande cellule sous l'épiderme.

Fig. 7 *bis*. La même concrétion, vue plus amplifiée, après la réaction d'un acide qui, ayant dissous le carbonate de chaux, laisse voir le pédicelle entier ainsi que le tissu vide.

Fig. 8. Pédicelles *c*, *c'*, observés plus jeunes dans une feuille du même *Ficus*. On voit que le tissu propre aux concrétions commence à entourer le bout renflé de ces appendices.

Fig. 9. *d*, pédicelle plus récemment formé encore et entièrement nu; *d'*, le même commençant à se désagréger et bleuir sous les influences combinées de l'acide sulfurique et de l'iode.

Fig. 10. Portion d'une coupe de feuille de *Ficus nymphæïfolia*, montrant un pédicelle à bout bifurqué, perdant par un effet d'endosmose son tissu léger et récemment formé, au moment où l'eau en excès est introduite sur le porte-objet du microscope.

Fig. 11. Deux concrétions du même figuier montrant des variétés d'insertion du pédicelle sur l'épiderme et sous la cuticule épidermique.

Fig. 12. Vue de la concrétion (immédiatement au-dessus) à l'instant

où le suc acide de la feuille elle-même attaque le carbonate calcaire, gonfle le tissu léger qui se détache vers la base du pédicelle.

Fig. 12 *bis*. Pédicelle extrait de la concrétion (fig. 11).

Fig. 12 *ter*. Le même, soumis à la réaction de l'iode, puis de l'acide sulfurique, qui désagrégent et bleuissent sa substance, caractérisant ainsi la cellulose dont il est formé.

PLANCHE VII.

CRISTAUX ET INCRUSTATIONS DES FEUILLES, CELLULES ET TIGES; SQUELETTES CALCAIRES ET SILICEUX APRÈS L'INCINÉRATION.

Fig. 1. Biforine, ou cellule spéciale isolée, comme on en rencontre beaucoup dans le parenchyme des feuilles des aroïdées, souvent engagées dans les parois des lacunes des pétioles et lançant, dans ces sortes de conduits, de nombreux cristaux aiguillés (raphides). La biforine est en partie remplie de granules azotés; elle contient un faisceau de nombreuses aiguilles cristallines enfermées dans une sorte de sac, s'ouvrant de temps à autre, en même temps que l'embouchure de la biforine; alors les aiguilles d'oxalate de chaux sont poussées isolément ou par petites gerbes, des granules azotés les accompagnent; et si, comme le montre le dessin, un acide introduit alors attaque et dissout l'oxalate, les matières organiques subsistent, et, surtout après la dessiccation, on les voit contournées et vides de particules cristallines.

Fig. 2. Section, par un plan perpendiculaire à l'axe, d'une tige de *Chara hispida*. On voit les cellules corticales *a*, ainsi que le gros tube central *b*, tapissés à l'intérieur de granules verts, riches en substance organique azotée, tandis que les parois extérieures sont incrustées de carbonate de chaux.

Fig. 3. Indiquant, sur le gros tube dépouillé des cellules enveloppantes, la disposition en hélices des incrustations, suivant les mêmes directions que les longues cellules corticales. Les incrustations sont d'autant plus abondantes que les parties de la plante sont plus âgées.

Fig. 4. Vue d'une partie de la même section très-amplifiée : *a*, incrustations calcaires autour des cellules; *b*, intérieur du gros tube; *c*, épaisseur des parois des cellules corticales, à l'intérieur desquelles

sont adhérents des granules verts; *d*, épaisseur des parois du gros tube. Vers l'angle opposé de la même planche, on voit, sous un égal grossissement, deux portions de cellules dont les incrustations, extraites par un acide très-faible, ont laissé leur tissu sécréteur encore adhérent.

Fig. 5. Squelette résidu de l'incinération d'une coupe de feuille de *Ficus elastica* : l'épiderme et sa cuticule abondants en silice, les tissus sous-jacents, transformés en carbonates de chaux, potasse et soude ; la concrétion calcaire.

Fig. 6. Concrétion également incinérée du *Ficus carica;* ces deux objets vus par réflexion.

Fig. 5 *bis*. Concrétion de la figure 5 vue par transmission et rendue opaque par l'air et les gaz interposés durant la calcination.

Fig. 5 *ter* et 5 *quater*. Fragments de concrétions calcinées du *Ficus elastica*, vues, par transparence, après la dissolution du carbonate de chaux qui a laissé un réseau siliceux très-léger, reproduisant toutefois les linéaments du tissu organique.

Fig. 7. Poil d'une feuille de *Ficus carica* vu après incinération et lavage par un acide qui ont laissé un squelette siliceux assez épais, comme cela se remarque pour toute la membrane périphérique des feuilles.

Fig. 8. Cellule remplie de raphides calcinés, dont l'oxalate est transformé en carbonate.

Fig. 8 *bis*. La même, après dissolution du carbonate, qui laisse un léger réseau de silice.

Fig. 9. Fragment de coupe d'*Equisetum* incinéré, dont les couches épidermiques sont abondantes en silice, et les cellules internes en carbonates produits par la combustion des pectates et pectinates.

PLANCHE VIII.

FORMATION, DÉVELOPPEMENT ET OBLITÉRATION DES STOMATES, TISSU DES RADICELLES, CRISTAUX DU *PANDANUS*.

Fig. *a*—*h*''. Développements des stomates sur une feuille de jacinthe.

a. Cellules épidermiques d'une tranche parallèle à la face inférieure observées dans la portion de la feuille engagée dans le bulbe, blanche et encore dépourvue de stomates.

b. Cellules semblables observées dans la partie blanche, à peine verdâtre hors du bulbe. On voit que les bouts de deux des cellules, repoussés par des corpuscules azotés, laissent entre eux un espace arrondi. En *c*, on remarque un espace semblable agrandi, et l'effet de l'iode, indiqué jusqu'à une ligne de démarcation arbitrairement tirée au milieu de cet espace, indique, par la coloration orangée, la nature des corpuscules azotés.

d. Cette figure montre les progrès de la formation du stomate sur une partie un peu plus verte de la feuille; une cellule courte est alors interposée entre les cellules longues; elle contient un grand nombre de corpuscules azotés.

e. Figure dessinée d'après l'observation faite sur une partie plus élevée et plus verte de la même feuille; on y remarque l'accroissement de la cellule interposée; sa division en deux capacités remplies des corpuscules à composition quaternaire.

f. Un peu plus haut encore, les deux capacités ont acquis des parois propres, et constituent ainsi deux utricules cylindroïdes adhérentes à leurs extrémités, écartées au milieu, laissant ainsi entre elles une ouverture elliptique doublée par une sorte de margelle.

g. Sur une partie plus verte de la même feuille bien développée, les deux utricules arquées du stomate laissent entre elles une plus grande ouverture, que l'on voit aussi sur les deux autres coupes en *g'* et *g''*, et qui paraît se rétrécir en entonnoir par plusieurs retraites: c'est ce dont on juge mieux en examinant à côté, à droite, une figure *h* (on a par erreur, mis la lettre *b*, mais le sens ci-après indiqué de la coupe ne permet pas de s'y tromper). Cette figure représente la coupe par un plan perpendiculaire à la superficie de la feuille et à la ligne qui joindrait les deux soudures des utricules courbées. On y remarque, 1° les deux rétrécissements successifs de l'ouverture; 2° la cuticule formant doublure et pénétrant dans toute la profondeur de la cavité du stomate jusqu'à la chambre à air; 3° la cuticule donnant l'apparence de margelle dans les coupes parallèlles à la face.

h'. Même coupe du stomate, sur laquelle l'addition de l'iode et de l'acide sulfurique caractérisent, 1° par une coloration orangée, la cuticule et la doublure qu'elle forme en pénétrant dans l'ouverture du stomate; 2° la cellulose des cellules épidermiques, par un gonfle-

ment considérable qui les exfolie et les fait teindre en violet intense.

h''. Coupe perpendiculaire à la précédente et à la face de la feuille, montrant dans le sens de leur longueur les cellules épidermiques soudées au stomate, et la chambre pneumatique au-dessous, entourée de cellules vertes.

i. Coupe parallèle à la face d'une feuille jeune bien développée et verte de dahlia, montrant les cellules épidermiques et un stomate dont l'ouverture est doublée par la cuticule.

j. Même coupe, sur laquelle l'iode a coloré en jaune-orangé les corpuscules azotés des stomates, ainsi que les substances organiques analogues dans les cellules épidermiques.

k. Stomate observé sur une feuille de dahlia prenant la teinte rougeâtre des feuilles automnales; l'addition de l'iode a teint en jaune-orangé les corpuscules azotés et la membrane qui oblitère en grande partie l'ouverture.

k'. Stomate de la même feuille sur le bord d'une coupe ; *k''* moitié de stomate vue également sur le bord d'une coupe.

l. Stomate sur une coupe parallèle au limbe, et dont la doublure interne se sépare sous l'influence de l'acide sulfurique.

m. Le même, observé lorsque la réaction de l'acide a presque tout désagrégé, sauf la margelle interne, qui résiste toujours en effet davantage.

o. Coupe parallèle au limbe d'une feuille nouvellement développée de *Phalaris arundinacea picta*, montrant les dispositions du stomate.

o'. Coupe perpendiculaire au limbe, en passant près de la ligne des soudures des utricules du stomate de la même feuille.

o''. Stomate d'une feuille plus âgée, presque complétement oblitéré par le rapprochement des deux utricules.

p. Stomate oblitéré d'une feuille décrépitante d'*Aucuba japonica*.

p'. Le même, sous l'influence de l'iode, montrant les parties les plus azotées teintes en jaune-orangé, ainsi que les bourrelets que forme la cuticule épidermique de chaque côté de la ligne de jonction des cellules.

q. Épiderme d'une feuille de *Podocarpus macrophyllus:* une moitié de cette coupe indique les effets de l'iode sur la cuticule et les membranes qui oblitèrent le stomate.

r. Cellules normales des spongioles de jacinthe.

r'. Cellules contiguës dont l'abondante substance azotée se contracte et jaunit par l'iode.

r''. Deux rangées des cellules disloquées par la réaction de l'acide sulfurique et dont les parois, formées de cellulose, bleuissent en se gonflant, tandis que la substance interne reste jaune et contractée.

r'''. Cellules plus longues observées dans la même radicelle au-dessus de la spongiole subissant les mêmes réactions de l'iode et de l'acide sulfurique.

s. Cristaux cubiques d'oxalate de chaux renfermés dans des gaînes à loges au milieu du tissu du *Pandanus ; s'*, *s''*, action de l'iode ; *s''*, *s'''*, réaction de l'iode en présence de l'acide sulfurique.

RÉPERTOIRE

DES

PRINCIPAUX SUJETS

DES SEPT MÉMOIRES SUR LES DÉVELOPPEMENTS DES VÉGÉTAUX,

ET DES DEUX SÉRIES DE PLANCHES CONTENUES DANS LES TOMES VIII ET IX.

PREMIER MÉMOIRE. — PREMIÈRE PARTIE (tome VIII).

COMPOSITION DES RADICELLES ET ACTION DU TANIN, DE LA SOUDE, ETC.

Graminées, 0,001 de tanin arrête tous les développements, brunit les fibrilles radicellaires; Ébénier, Sycomore, Sureau.

Papavéracées, Crucifères.

Urticées, Synanthérées, Malvacées, Géraniées, Linées, Polygonées, Convolvulacées, Cucurbitacées, Solanées, Asparaginées.

Spongioles, fibrilles radicellaires, rapprochement entre l'aliment par engrais azoté, l'action du tanin et la composition chimique des spongioles.

Circonstances naturelles qui abritent les radicelles de l'action des solutions délétères et de leurs propres produits, extraits des racines par macération.

Corps azotés des spongioles résistant à l'eau; effets et composition semblables dans les racines au-dessus du sol et aériennes : Palmiers, Piperacées, Vites, Orchidées, Aroïdées.

Dispositions des substances azotées dans les spongioles.

Réaction du protonitrate de mercure sur les radicelles.

Élimination de la substance azotée, laissant les cellules vides et les spongioles inertes.

Liquide extrait de l'organisme vasculaire des plantes; conclusion sur l'action du tanin, de l'azotate de mercure, et les produis de la calcination des spongioles.

Distribution des substances azotées; distinction entre elles et les tissus végétaux; ses relations avec la nutrition des plantes.

DEUXIÈME PARTIE.

RÔLE DES SUBSTANCES ORGANIQUES AZOTÉES, COMPOSITION DES JEUNES ORGANES DES VÉGÉTAUX.

Bourgeons à feuilles : organes de la floraison et de la fructification.

Composition chimique des organismes végétaux : étamines, stigmates, ovules, enveloppes du blé.

Orge, Maïs, Riz; solution à froid, extraite des périspermes.

Avoine, Seigle : radicelles, gemmules.

Légumineuses (*Phaseolus vulgaris* et *Phaseolus caracolla*).

Faînes, Baguenaudier, Cascaloté, faux Ébénier, Solanées, Pomme de terre : étamines, stigmates, ovaires.

Tabac (*Nicot. Tabacum*), Malvacées, Cucurbitacées.

Nyctaginées, Crucifères.

Synanthérées.

Chenopodées, Liliacées, Amaryllidées, Renonculacées.

Thymélées, Asparaginées, Polygonées, Papavéracées.

Iridées, Boraginées, Géraniacées, Orantiacées.

Magnoliacées, Urticées, Tiliacées, Acérinées.

Jasminées, Bytnériacées, Térébenthacées.

Ribesiées, Rosacées.

Ampélidées, Cupulifères.

Composition azotée en rapport avec la jeunesse des organes.

Tissu très-jeune gélatiniforme du Concombre, séve de Sureau.

SÉVES.

Chênes, Mûrier noir, Figuier, Tilleul (matière azotée).

Érable, Peuplier, Noyer, *Aylanthus glandulosa*, Pêcher, Prunier.

Vigne. Substance azotée, indépendante des cellules.

Germination avec perte de substance azotée.

Proportions et nature des engrais dépendants de la composition des plantes et des débris des récoltes précédentes; principes théoriques sur la conservation des bois.

Tableau des analyses élémentaires des organismes végétaux, indiquant l'azote et les corps azotés.

CONCLUSIONS.

Tanin, corps azotés, leur rôle, dosage des engrais, principe azoté.

Causes des altérations des bois, théorie sur les agents de leur conservation, distinction entre les cellules et les corps azotés.

(Planches des mémoires 3 à 7 du volume IX, pages 40 et 254.)

DEUXIÈME MÉMOIRE.

AMIDON, DEXTRINE, GLUCOSE, DIASTASE, INULINE, ETC.

Amidon; historique.

Résumé des propriétés chimiques de l'amidon.

Dimensions, formes, structure.

Tableau des dimensions des diverses fécules amilacées.

Formes des fécules des pommes de terre, de Colombo.
Formes *idem* des *Canna gigantea* et *Canna discolor*.
Formes *idem* du *Chara*, Lis.
Formes *idem* de l'*Oxalis crenata*, *Echinocactus erinaceus*.
Formes *idem* du Sagouier.
Formes *idem* des Fèves.
Formes *idem* des Pois, Blés durs, tendres.
Formes *idem* des Batates,
Formes *idem* de l'*Orchis* (Salep), Jacinthe.
Formes *idem* du Maïs, Sorgho.
Formes *idem* du *Cactus Peruvianus*, *Naïas major*.
Formes *idem* du *Cactus pereskia grandiflora*, *Aponogetum distachyum*, *Gincko biloba*.
Formes des fécules du *Cactus brasiliensis*, *Panicum italicum*, *pollen Globba nutans*.
Formes *idem* du *Cactus flagelliformis*, *pollen Ruppia maritima*, *Cactus opuntia tuna*, *Cactus opontia tuna currassavica*.
Panicum miliaceum, *Cactus mamillaria discolor*.
Aylanthus glandulosa, *Cactus serpentinus*, Panais.
Pollen Naïas major, *Cactus monstruosus*, graine de Betterave, graine *de Chenopodium quinoa*.

ANATOMIE DE L'AMIDON.

Rupture des fécules.
Gonflement de l'intérieur des fragments par la soude.
Amidon désagrégé réuni en sphérules. Composition du pollen du *Chara*.
Évasement du *hile*; couches concentriques.
Dissolution de la couche externe; exfoliation des grains d'amidon.

EXAMEN CHIMIQUE DE L'AMIDON.

Tableau des différents termes d'hydratation; fécule verte, sèche, anhydre.
Effets de la température : solubilité graduée, 1^er^ mode de transformation en dextrine.
Liquéfaction en vase clos à 200°.
Action simultanée de l'eau et de la température.
Rupture et dissolubilité à froid.
Contraction par le froid; contraction par le rapprochement dans le vide.
Séparation de l'amidon dissous en infiltrant le liquide dans les radicelles; divers effets et mesure du gonflement par les solutions alcalines caustiques.
Cohésions différentes des amidons de différents âges, démontrées par des solutions alcalines.
Théorie de la formation de l'empois.
Empois en mucilage à 140°.

ACTION DE L'IODE.

Pénétration de l'iode dans les grains d'amidon.

Décoloration par couches; nuances bleues, violettes, rouges, indiquant les degrés d'agrégation.

Action de la lumière sur l'iodure d'amidon.

Action de la température; phénomènes de décoloration et de coloration.

Opacité de l'iodure d'amidon, séparation par l'ichthyocolle.

Contraction et précipitation par les acides, sels, le refroidissement à 0.

Iodure d'amidon, invisible directement.

Composition de l'iodure d'amidon.

Résistance des grains d'amidon, saturés d'iode, desséchés, aux effets de la température.

Résistance de l'iodure à l'acide sulfurique; liquéfaction de l'iodure hydraté.

Inertie de l'iode sur l'amidon sec, et décomposition de l'iodure par l'alcool anhydre.

Couleur de l'iodure affaiblie par transparence.

Exfoliation à froid de l'amidon teint par l'iode.

Définition du composé *bleu* d'iode et d'amidon.

Action remarquable du chlore sur l'amidon.

Dissolution de la portion moins agrégée dans chaque grain d'amidon.

Contractilité de l'hydrate d'amidon par la baryte, l'oxyde de plomb et l'hydrate de chaux.

Extraction directe de l'huile essentielle et de la matière grasse de la fécule des pommes de terre.

Épuration *complète* de la fécule.

RÉACTION DES ACIDES SUR L'AMIDON.

XYLOYDINE.

Ses applications.

RÉACTION DE LA DIASTASE SUR L'AMIDON.

État naturel de la diastase.

Extraction de la diastase.

Dissolution et saccharification vérifiées par l'iode.

Glucose et dextrine, caractères distinctifs.

Disparitions et réapparitions de la matière amylacée troublée par l'alcool.

Effets du tanin, effets changés par variations de température.

Caractères particuliers de l'amidon naissant et dans quelques légumineuses; dissolution diaphane de l'amidon épuré.

Analyse comparée de la portion résistante de l'amidon.

Extraction de la dextrine pure.

Pouvoir de rotation et analyse de la dextrine; composition élémentaire de l'amidon de diverses plantes.

Analyses comparées des parties résistantes et des parties dissolubles de l'amidon.

Analyses de la dextrine obtenues par divers agents.

Équivalent de la dextrine, déduit des combinaisons avec le protoxyde de plomb et la baryte.
Amylate bibasique de protoxyde de plomb.
Vérifications des analyses des amylate et dextrinate de plomb.
Poids spécifique de l'amidon.
Poids spécifique de la dextrine.
Termes d'hydratation de la dextrine.
Définition de la nature chimique de l'amidon et de la dextrine.
Inuline, propriétés nouvelles; composition et transformation isomérique.
Isomérie entre l'amidon, la dextrine, l'inuline normale et l'inuline fondue.

POINT DE VUE PHYSIOLOGIQUE.

Organes dépourvus d'amidon; tissus qui en renferment.
Développements des fécules amylacées; apparences de tégument.
Conformation polyédrique des grains d'amidon
Rapport entre les cellules et le *hile* des grains de fécule.
Amidon du pollen des plantes.
Globba nutans.
Naïas major et *Ruppia maritima.*
Dissolution spontanée et passage de la substance amylacée au travers des tissus végétaux.
Applications des données précédentes; formes et dimensions; termes d'hydratation.
Produits comparés des différentes pommes de terre en fécule.
État et proportions de la fécule dans les pommes de terre gelées; causes des coloration, saveur et odeur spéciale des pommes de terre dégelées.
Moyens d'utiliser les tubercules gelés.
Essais des sels ammoniacaux, eaux potables, vinaigres et acide acétique, par l'amidon.
Principales applications des fécules, dextrine et glucose.
Préparation manufacturière de la dextrine.
Emploi de la dextrine dans la chirurgie; usages économiques de la glucose.
Explication des 8 planches, 1re série.
8 planches de la 1re série.

TROISIÈME MÉMOIRE (tome IX).

CELLULOSE.

Composition déduite, *a priori*, d'une transformation isomérique de l'amidon en cellules, dans les pousses des tubercules, graines, rhizomes, etc.
Historique; composition chimique du tissu végétal; composition générale des plantes; erreurs sur la fungine, lignine, médulline, lichénine.
Extractions et analyses du tissu végétal naissant.
Réactifs de la cellulose.

Cellulose des feuilles.
Tissu intérieur de l'*Agave Americana*.
Composition des trachées.
Cellulose des radicelles de Maïs et des tissus qui résistent à la digestion.
Tissu du périsperme des Blés, Maïs.
Tissu du périsperme du Phytelephas.
Tissu du périsperme du Dattier ; coton des graines de Peuplier.
Membranes végétales extraites d'un nid de guêpes.
Cellulose du cœur de chêne, du bois des conifères.
Cellulose du tissu des Cryptogames, Conferves, Champignons, Characées.
Caractères distinctifs entre les cellules végétales et les membranes des animaux.
Nature amylacée de quelques tissus végétaux.
Analyse immédiate du tissu du Lichen (cellulose, inuline, amidon).
Transformation du tissu végétal en dextrine et xyloïdine.
Composition du *Chara* et des corps doués de mouvements spontanés.
Subtances grasses dans les tissus végétaux.
Compositions des matières grasses, des champignons, du liége.
Composition de la levure de bière et du *Monas Dunalii*.
Tableau des analyses et excès d'hydrogène des végétaux.
Comparaison des parties résistantes des membranes animales et végétales.
Tableau synoptique de cette comparaison.

CONCLUSIONS.

Explications des figures.

QUATRIÈME MÉMOIRE.

TISSUS LIGNEUX.

Excès d'hydrogène dans tous les bois. Tableau : composition et équivalents en combustible de différents bois et tissus ligneux.

État naturel, structure et extraction des concrétions ligneuses rapidement ou lentement formées, des écorces, fruits.

Tableaux de la composition élémentaire des concrétions des poires et de l'écorce d'*Aylanthus glandulosa*.

Extractions et analyses de la matière organique incrustante.

Composition immédiate des incrustations ligneuses.

Cinq principes immédiats : cellulose, lignose, lignone, lignin, ligniréose, constituent le ligneux.

Application des données précédentes à la composition immédiate et élémentaire du Hêtre.

Composition immédiate et élémentaire de la tourbe.

Tourbe : tableau des analyses élémentaires.

Production comparée de l'acide acétique par distillation des tissus végétaux.

CINQUIÈME MÉMOIRE.

CONCRÉTIONS ET INCRUSTATIONS MINÉRALES.

Plantes dont les feuilles contiennent des concrétions calcaires pédicellées.

Urtica nivæa, Parietaria officinalis, lusitanica, arborea; Forskalea tenacissima, Morus nigra, alba, multicaulis; Broussonetia papyrifera; Celtis australis.

Celtis mississipiens, Tournefortii, occidentalis, crenata; Humulus lupulus, Cannabis sativa, Conocephalus naucleiflorus.

Examen organographique et chimique des concrétions pédicellées : *Ficus ferruginea, Benghalensis, nymphæifolia, carica, laurifolia, reclinata, Neumani rigida; Ficus scandens, religiosa, montana.*

Ficus glaucescens, A, B.

Nature du *tissu* des concrétions calcaires.

Loi générale de la présence des sels calcaires dans les plantes.

Chara vulgaris, translucens.

Incrustations du *Chara hispida.*

OXALATE DE CHAUX dans les feuilles.

Idem Begonia undulata, Citrus Limonia.

Idem Maclura aurantiaca, Juglans regia, nigra, cinerea, Orme, Planera crenata, Saurocea, etc. etc.

CRISTAUX DES CACTÉES : *Cactus opuntia* (*Ficus indica*), *tuna, ferox.*

Microdasys, braziliensis, glaucescens.

Echinocactus sulcatus, Cactus cylindricus.

Cereus cetaceus, nictycalus, grandiflorus.

Cactus peruvianus, obtusus.

Triangularis, ripsalis, cassytha, funalis, salicornioïdes; formation et composition des RAPHIDES.

Arum colocasia, Seguinum.

SÉCRÉTIONS LIQUIDES, *MESEMBRIANTHEMUM CRISTALLINUM*, SOUDE DE TÉNÉRIFFE.

MATIÈRES HUILEUSES DANS LES FEUILLES, *Piper colubrinum.*

ÉTAT DE LA SILICE DANS LES PLANTES.

Silice dans différents Figuiers, *Arum colocasia, Equisetum hyemale.*

Silice dans les Characées; proportions des MATIÈRES INORGANIQUES DANS LES PLANTES; AMENDEMENTS.

TABLEAU DES MATIÈRES MINÉRALES PUISÉES DANS LES EAUX, LE SOL, LES ENGRAIS, LES AMENDEMENTS, PAR DIFFÉRENTS VÉGÉTAUX.

Matières minérales et organiques ramenées à la superficie du sol.

COMPOSITION DE L'ÉPIDERME ET DE LA CUTICULE ÉPIDERMIQUE.

Feuilles du *Convolvulus Cneorum.*

Analyses de l'épiderme et de la cuticule.

Réactions de l'iode et de l'acide sulfurique sur différents épidermes.

Tableau des analyses d'épidermes, de cuticule et des tissus sous-jacents

SIXIÈME MÉMOIRE.

FEUILLES DÉCRÉPITANTES

Feuilles; *Aucuba japonica*, *Laurus nobilis*.

Buxus semper virens, *Rhamnus alaternus*, *Ilex albomarginata*.

Evonymus Japonicus, *Hedera helix*, *Magnolia grandiflora*.

PANACHURES DES FEUILLES.

Agave americana et *Orontium variegatum*. Proportions d'eau dans les parties vertes, blanches.

Acorus graminifolius.

Aristotelia macqui, *Symphoricarpus parviflorus*, *Veronica maritima*, *Caladium bicolor*, *hæmatostygma*, *Arundo donax variegata*.

Dracæna terminalis, *Rubus leuchostachys*, *Phalaris arundinacea picta*, *Colutea arborescens*.

Arundo donax variegata. Proportions d'eau des parties vertes et blanches.

FEUILLES AUTOMNALES.

Modifications qu'elles éprouvent.

Celtis australis, *Vitis vinifera*, *Pyrus communis*, *sativa*; Ormes; STRUCTURE DES STOMATES.

Phalaris arundinacea picta, *Pinus pinea*.

Podocarpus macrophyllus, Dahlia.

FORMATION ET DÉVELOPPEMENT DES STOMATES.

Jacinthe.

Réactions de l'iode et de l'acide sulfurique sur la cuticule épidermique, le tissu des stomates et les cellules sous-jacentes.

SEPTIÈME MÉMOIRE.

COMPOSÉS À BASES MINÉRALES DANS LES PAROIS DES CELLULES ET LES MÉATS INTERCELLULAIRES.

Feuilles, tiges, pétales.

Cereus peruvianus.

Pectine et acide pectique, extraits à froid des tissus de *Cactus* et de Betteraves, Composition chimique des Betteraves.

Cristaux des *Pandanus*.

NATURE VÉGÉTALE DES CORALLINÉES, CONCRÉTIONS MINÉRALES ET SÉCRÉTION AMYLACÉE DANS LEUR ORGANISME.

Corallina officinalis, Halymeda opuntia.

Composition chimique des Corallinées.

Propriétés distinctives entre les membranes épidermiques et cellulaires des végétaux et les tissus tégumentaires des Insectes et des Crustacés.

Téguments d'Insectes et de Crustacés ; analysés comparativement avec l'épiderme et la cuticule des végétaux.

Acétates et protoxyde de plomb ; propriétés nouvelles et applications à l'analyse organique.

Protoxyde de plomb hydraté et anhydre cristallisé par voie humide.

Complément de l'analyse élémentaire et immédiate des Choux-fleurs.

Gluten pur : extraction, composition élémentaire.

Supplément aux analyses des séves sous le rapport de l'azote.

Sève du *Virgilia* obtenue par écoulement.

Sève du *Virgilia* obtenue par déplacement.

Lait de la noix de Coco, sucre des fruits du *Cactus opuntia.*

Composition immédiate des fruits du Maïs.

Applications économiques des fruits du Maïs.

Analyses des amandes d'*Arachys-hypogea* et des Batates, nature de leur sucre.

Composition des fruits du melon, nature de leur sucre; addition aux expériences sur les feuilles décrépitantes.

Supplément aux analyses des tourbes.

Terres végétales : substances organiques et inorganiques puisées par les plantes dans le sol.

Terres de Marville, de la Limagne, de Russie, des boulbènes.

Estimation de l'état de fumure à l'expiration des baux.

Analyse des parties solubles des terres.

Matières inorganiques puisées dans le sol et fixées dans les tissus végétaux.

Analyses comparées des *parties solubles* et des *matières fixées dans les plantes.*

Applications.

Lois générales de la composition des plantes.

Description des planches.

Répertoire des faits principaux.

Planches [1] de la 2e série.

[1] Ces planches de la 2e série, gravées avant l'impression des mémoires, ont été, par inadvertance, brochées avec le volume VIII, page 208; elles devront être reportées dans le tome IXe, savoir : la première, page 40, et les sept suivantes, page 254.

ANALYSE MATHÉMATIQUE.

SUR

LES PROBABILITÉS

DES ERREURS DE SITUATION D'UN POINT;

PAR A. BRAVAIS.

La détermination du lieu occupé par un point dans l'espace dépend d'un certain nombre d'éléments au moins égal à trois; il en est de même lorsque le point est assujetti à se trouver sur un plan donné, et, dans ce cas, le nombre des éléments déterminants doit être au moins égal à deux. L'observation de ces éléments consiste essentiellement en des mesures d'angles ou de longueurs, et quelquefois de durées. Les erreurs inévitables de ces diverses mesures devant réagir sur la situation du point, j'ai recherché l'influence qu'exerce sur ces *erreurs possibles de situation* la possibilité des erreurs élémentaires, concurremment avec les coefficients de la méthode employée : toutefois, je me suis restreint au cas où les éléments sont déterminés par un grand nombre d'observations.

Si nous nommons a, b, c,.. les éléments observés; x, y, z, les coordonnées du point, nous avons en général

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(a, b, c...) \\ y &= \psi(a, b, c...) \\ z &= \chi(a, b, c...). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Les fonctions φ, ψ, χ sont la traduction analytique des rela-

tions existantes entre le lieu géométrique du point et les éléments observés; elles dérivent de la nature de la méthode. L'exactitude de la détermination du point dépend, en grande partie, du degré de précision avec lequel les éléments a, b, c.. ont été observés; elle dépend aussi de la valeur absolue de ces éléments et de la forme des fonctions φ, ψ et χ; car, si l'on différentie ces équations en nommant δa, δb, δc.. les erreurs commises sur chaque élément, δx, δy, δz, les erreurs qui en résultent pour les coordonnées, on aura, en négligeant les quantités de second ordre ou carrés des erreurs,

$$\left.\begin{aligned}
\delta x &= \frac{d\varphi}{da}\,\delta a + \frac{d\varphi}{db}\,\delta b + \frac{d\varphi}{dc}\,\delta c\ldots = \mathrm{A}\delta a + \mathrm{B}\delta b + \mathrm{C}\delta c\ldots \\
\delta y &= \frac{d\psi}{da}\,\delta a + \frac{d\psi}{db}\,\delta b + \frac{d\psi}{dc}\,\delta c\ldots = \mathrm{A}'\delta a + \mathrm{B}'\delta b + \mathrm{C}'\delta c\ldots \\
\delta z &= \frac{d\chi}{da}\,\delta a + \frac{d\chi}{db}\,\delta b + \frac{d\chi}{dc}\,\delta c\ldots = \mathrm{A}''\delta a + \mathrm{B}''\delta b + \mathrm{C}''\delta c\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Plus les coefficients différentiels A, B, C.. A', B', C'.. A'', B'', C''.. seront petits, plus, à erreurs élémentaires égales, l'erreur de position du point (x, y, z) sera atténuée.

Pour rendre aussi petites que possible les erreurs élémentaires δa, δb, δc.. la première règle est de se débarrasser des causes constantes d'erreurs. Ces causes constantes, dues à un vice de la méthode, et qui dérivent le plus souvent de notre connaissance incomplète des vraies lois de la physique, sont, du reste, de nature à pouvoir être, plus tard, éliminées par la découverte ultérieure de ces lois, si l'on n'a point omis de noter les circonstances physiques de l'observation elle-même.

Quant aux causes variables d'erreurs, on a coutume d'y remédier, en multipliant les observations; ainsi, dans la géodésie, l'emploi du cercle répétiteur détruit la plupart des causes constantes d'erreurs, et amoindrit l'effet des causes variables par le fait même de la répétition des angles observés.

Dans le cas qui forme l'objet spécial de ce mémoire, et où les éléments sont censés déterminés par un grand nombre d'observations, Laplace a démontré, par une savante analyse, que la probabilité de l'erreur $\pm t$ sur un élément était sensiblement proportionnelle à l'exponentielle e^{-ht}, h étant un *paramètre* ou *module*, variable d'un élément à l'autre, et dont la valeur absolue, plus ou moins grande, dépend du plus ou du moins de précision de l'observation. Remarquant de plus que l'erreur du résultat était une fonction linéaire des erreurs élémentaires (équations 2), il a traité d'une manière complète le cas de ces équations linéaires considérées isolément. Mais, dans la question géométrique, une nouvelle difficulté se présente, et l'on peut avoir à considérer des équations aux carrés des erreurs, telles que $(\delta s)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2$, destinées à donner l'erreur totale de la situation du point, et, de plus, une interprétation géométrique des résultats généraux devient nécessaire.

Je commencerai par donner quelques détails relativement aux lois de probabilités des erreurs, lois dont l'ignorance rend souvent illusoire l'application du calcul des probabilités à ce genre d'appréciations.

La probabilité que l'erreur d'un élément ou d'un résultat a d'être comprise entre les quantités t et $t+dt$ est généralement un nombre inconnu $\varpi(t)dt$, la fonction $\varpi(t)$ pouvant être, en thèse générale, soit continue, soit discontinue. La quantité t peut être positive ou négative; elle peut même avoir une valeur finie quelconque, en assujettissant, au besoin, la fonction $\varpi(t)$ à être nulle entre les limites des valeurs de t reconnues pour être impossibles. Si, avec cette restriction préliminaire, nous intégrons de $t=-\infty$ à $t=+\infty$ l'expression $\varpi(t)dt$, la somme de toutes les probabilités partielles équivaudra à la certitude, et nous aurons la relation générale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varpi(t)dt = 1. \qquad (3)$$

Laplace a imaginé, par analogie avec les jeux de hasard, de considérer le produit de l'erreur par sa probabilité, comme formant l'*espérance mathématique* correspondante à cette erreur; c'est ce produit que nous appellerons la *crainte mathématique de l'erreur*. Si l'on conçoit, soumis à une répétition indéfinie, l'événement dont l'erreur variable offre le résultat, en nommant n_0 le nombre des cas qui amènent l'erreur t_0, n_1, le nombre de cas qui amènent l'erreur t_1, etc., le nombre total des coups étant $n_0+n_1+\ldots=\Sigma n_0$, la somme des erreurs commises prises avec leurs signes propres sera $n_0t_0+n_1t_1+\ldots=\Sigma n_0t_0$; l'erreur moyenne, ou l'erreur du résultat moyen, sera exprimée par $\frac{\Sigma n_0t_0}{\Sigma n_0}$. Or, de même que, dans tout jeu *égal*, la somme des diverses espérances ou craintes du joueur doit être égale à zéro, de même, dans toute méthode *légitime* d'observation, c'est-à-dire qui ne renferme aucune cause constante d'erreur, il est naturel d'admettre que la somme des erreurs doive tendre à se compenser par la répétition : néanmoins, cette règle simple laisse à désirer une démonstration rigoureuse, car l'analogie du cas actuel avec celui des jeux de hasard est loin d'être complète.

Quoi qu'il en soit, nous arrivons ainsi à cette seconde relation générale :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varpi(t)tdt=0. \tag{4}$$

Si $u=\varpi(t)$ représente l'ordonnée d'une courbe plane dont t est l'abscisse, $\int_{-\infty}^{\infty}\varpi(t)dt$ représentera l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses, et la quantité $\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\varpi(t)tdt}{\int_{-\infty}^{\infty}\varpi(t)dt}=t_1$ sera l'abscisse du centre de gravité de cette aire. La condition $t_1=0$ exprime que l'axe des u partage en deux parties égales l'aire comprise entre la courbe et l'axe des t. Si cette condition n'avait pas lieu, la valeur finie de t_1 indiquerait l'erreur de la méthode due

aux causes constantes et certaines d'erreurs dont les effets se développent par la répétition des événements, de même que, dans le cas d'un jeu *inégal*, une équation analogue donne l'avantage ou le désavantage résultant pour le joueur de l'inégalité du jeu.

La condition $t_1 = 0$ sert à vérifier la légitimité de la méthode, mais ne nous dit rien sur sa précision. Pour cela, il faut isoler les erreurs positives des erreurs négatives, et les considérer d'une manière absolue indépendamment de leurs signes. On trouve ainsi que $\int_0^{\infty} \varpi(t) t dt$ mesure la crainte mathématique des erreurs positives, et $\int_0^{-\infty} \varpi(t) t dt$ celle des erreurs négatives, ces deux craintes devant être égales entre elles d'après l'équation (4). Ces deux expressions sont équivalentes à l'*espérance mathématique du gain* et à l'*espérance mathématique de la perte* offertes par les jeux de hasard : quantités qui, par leur égalité, attestent l'*égalité du jeu*, et dont les valeurs absolues indiquent la *grosseur du jeu*, dans le sens consacré par la locution vulgaire « jouer gros jeu. »

Ainsi, en n'ayant égard qu'à la valeur absolue de t, l'expression $\int_{-\infty}^{\infty} \varpi(t) \sqrt{t^2}\, dt$ pourra nous servir à mesurer la précision de la valeur assignée à l'élément. Toutefois, et comme nous l'avons déjà dit, une démonstration rigoureuse serait ici nécessaire, et, par exemple, il est difficile de voir pourquoi l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \varpi(t) t^2 dt'$ qui donne la *crainte mathématique du carré de l'erreur*, ne pourrait pas, aussi bien que la précédente, servir à mesurer la *précision de l'observation*.

Revenons maintenant au cas où l'élément est déterminé par un grand nombre d'observations, et où la probabilité de l'erreur t est de la forme $He^{-ht^2} dt$; l'équation (1) nous donne alors $\int_{-\infty}^{\infty} He^{-ht^2} dt = 1$, qui entraîne avec soi $H = \sqrt{\frac{h}{\pi}}$; ainsi l'élément différentiel de la probabilité a pour valeur $\sqrt{\frac{h}{\pi}} e^{-ht^2} dt$. Nous représenterons dorénavant par m, n, p.. les erreurs infiniment

petites δa, δb, δc..; h_m, h_n, h_p.. seront les *modules* des erreurs possibles m, n, p.., de telle sorte que la probabilité, pour que m soit compris entre $m = m$, et $m = m + dm$, sera $\sqrt{\frac{h_m}{\pi}} e^{-h_m m^2} dm$, et ainsi des autres. Nous placerons l'origine des coordonnées x et y au point donné par l'observation, et, pour fixer les idées, nous supposerons d'abord les axes rectangulaires : nous pourrons ainsi représenter par x, y, z, les erreurs δx, δy, δz des coordonnées du point. Enfin, nous examinerons successivement les trois cas où le point cherché est assujetti à être sur une droite donnée, sur un plan donné ou dans l'espace : nos résultats pourraient, sans doute, être étendus au delà du cas de trois variables x, y et z; mais alors l'interprétation géométrique, principal but de ce mémoire, cesse d'avoir lieu.

Voici maintenant la liste des principales intégrales définies que nous aurons à employer :

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \int_0^\pi \frac{d\theta}{P\cos.^2\theta + Q\sin.^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{PQ}}$$

$$\int_0^\infty e^{-z^2} z dz = \tfrac{1}{2} \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{P\cos.^2\theta - 2R\cos.\theta\sin.\theta + Q\sin.^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{PQ - R^2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-z^2} z^2 dz = \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p + 2rz + qz^2)} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{q}} e^{-\frac{(pq - r^2)}{q}}$$

$$\int_0^\infty e^{-z^2} z^3 dz = \tfrac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{1/2} dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

CAS DU POINT ASSUJETTI À SE TROUVER SUR UNE DROITE DONNÉE.

Considérons la droite donnée comme axe des x : le problème revient à déterminer la probabilité de l'erreur $\delta x = x$, l'origine étant placée au point lui-même.

La première des équations (2) nous donne

$$x = Am + Bn + Cp\ldots : \qquad (5)$$

m, n, p... sont évidemment les *variables indépendantes* de la ques-

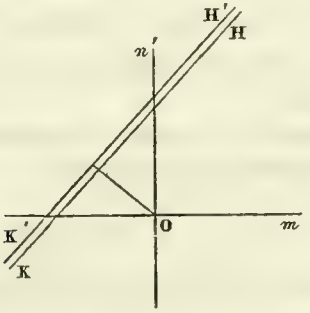
tion; nous considérerons, au contraire, x, et, plus tard, x et y, ou x, y, z, comme des *variables dépendantes*.

Laplace a démontré que, dans le cas de l'équation (5), la probabilité pour que la variable indépendante x soit comprise entre x et $x + dx$ était de la forme $\sqrt{\frac{h_x}{\pi}}\, e^{-h_x x^2} dx$, h_x étant un certain coefficient donné par l'équation

$$\frac{1}{h_x} = \frac{A^2}{h_m} + \frac{B^2}{h_n} + \frac{C^2}{h_p} + \ldots \qquad (6)$$

Ainsi h_x peut, à son tour, être considéré comme étant le *module* de l'erreur x, et la probabilité de cette erreur présente une forme exponentielle semblable à celle des erreurs m, n, p...

Toutefois, il ne sera pas inutile d'appliquer des considérations géométriques à la démonstration de ce résultat. Dans ce but, considérons d'abord le cas le plus simple, $x = Am + Bn$, et imaginons deux axes; l'un, axe des variables m; l'autre, des variables n : $x = Am + Bn$ sera l'équation d'une droite aux coordonnées m et n. La probabilité de la valeur $m = m$ étant égale à $\sqrt{\frac{h_m}{\pi}}\, e^{-h_m m^2} dm$, et celle de $n = n$ étant $\sqrt{\frac{h_n}{\pi}}\, e^{-h_n n^2} dn$, celle de la simultanéité sera $\sqrt{\frac{h_m h_n}{\pi}}\, e^{-(h_m m^2 + h_n n^2)} dm dn$, et exprimera la probabilité pour que le *point vrai* tombe dans l'élément différentiel de surface $dmdn$.



Soit KH la droite $Am + Bn = x$, et K'H' la parallèle très-voi-

sine $Am + Bn = x + dx$, si nous intégrons l'expression ci-dessus dans toute l'étendue de l'espace indéfini KHK'H', nous aurons la probabilité pour que x soit compris entre $x = x$ et $x = x + dx$.

Une des manières les plus simples d'effectuer commodément l'intégration consiste à remplacer les coordonnées m et n d'un point quelconque du plan par le système des coordonnées m et x, ce qui revient à remplacer n par $\frac{x - Am}{B}$, et dn par $\frac{dx}{B}$: nous trouvons ainsi $\frac{1}{B}\frac{\sqrt{h_m . h_n}}{\pi} e^{-\left\{ m^2\left(h_m + \frac{A^2}{B^2}h_n\right) - 2\frac{Ah_n x}{B}m + h_n\frac{x^2}{B^2}\right\}} dm\, dx$. Il ne reste plus qu'à intégrer cette expression de $m = -\infty$ à $m = +\infty$ en laissant x constant, et l'on trouve

$$\frac{1}{B}\frac{\sqrt{h_m . h_n}\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{h_m + \frac{A^2}{B^2}h_n}} e^{-\frac{h_m . h_n \frac{x^2}{B^2}}{h_m + \frac{A^2}{B^2}h_n}} dx,$$

d'après la forme générale de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p + 2rz + qz^2)}\, dz$.

Posons maintenant $\frac{h_m . h_n}{B^2 h_m + A^2 h_n} = h_x$, et notre intégrale se réduit à $\sqrt{\frac{h_x}{\pi}} e^{-h_x x^2} dx$, ce qui nous donne la règle citée ci-dessus.

Si de $x = Am + Bn$ nous déduisons $\frac{1}{h_x} = \frac{A^2}{h_m} + \frac{B^2}{h_n}$, de $x' = x + Cp$ nous déduirons $\frac{1}{h_{x'}} = \frac{1}{h_x} + \frac{C^2}{h_p}$: de $x'' = x' + Dq$ nous déduirons $\frac{1}{h_{x'}} = \frac{1}{h_{x'}} + \frac{D^2}{h_q}$, et de la sorte la formule $\frac{1}{h_x} = \frac{A^2}{h_m} + \frac{B^2}{h_n} + \frac{C^2}{h_p} \ldots$ devient tout à fait générale, quel que soit le nombre des variables indépendantes.

La détermination de la crainte mathématique de l'erreur n'offre aucune difficulté, et l'on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{h_x}{\pi}}\, e^{-h_x x^2} x dx = \frac{1}{\sqrt{\pi h_x}}. \qquad (7)$$

La *crainte mathématique du carré de l'erreur* serait

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{h_x}{\pi}}\, e^{-h_x x^2} x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{1}{h_x}, \qquad (8)$$

et ainsi elle diffère sensiblement du carré de la crainte mathématique de l'erreur simple.

CAS D'UN POINT ASSUJETTI À SE TROUVER DANS UN PLAN DONNÉ.

Nous prendrons ce plan pour plan des coordonnées x, y; le point, tel que les observations l'ont déterminé, servira d'origine; x, y seront les coordonnées du *point vrai*, tel que l'auraient donné des observations exemptes d'erreur. Ainsi nous aurons

$$\left.\begin{aligned} x &= Am + Bn + Cp \ldots \\ y &= A'm + B'n + C'p \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Nous continuerons à représenter par h_x le module de l'erreur x, lorsque la variable x est considérée indépendamment de y, et eu égard à la première des équations (9) : h_y sera le module analogue de y, et sa valeur sera donnée par $\frac{1}{h_y} = \frac{A'^2}{h_m} + \frac{B'^2}{h_n} + \frac{C'^2}{h_p} \ldots$ (6 *bis*)

Nous représenterons souvent par $\Sigma \frac{A^2}{h_m} = \alpha_0$, $\Sigma \frac{A'^2}{h_m} = \alpha_1$, les seconds membres des équations (6) et (6 *bis*), et de la sorte

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{h_x} &= \Sigma \frac{A^2}{h_m} = \alpha_0 \\ \frac{1}{h_y} &= \Sigma \frac{A'^2}{h_m} = \alpha_1. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

La coexistence des mêmes variables m, n, p.. dans les équations simultanées en x et y, amène une corrélation telle, que les modules h_x, h_y, cessent de représenter la possibilité des valeurs simultanées de (x, y) sous le vrai point de vue de la question.

Concevons qu'on assigne aux variables m, n, p... des valeurs définies particulières $m = m$, $n = n$, $p = p$.. La probabilité pour que m tombe entre m et $m + dm$ étant $\sqrt{\frac{h_m}{\pi}}\, e^{-h_m m^2}$, celle relative

à n étant $\sqrt{\frac{h_n}{\pi}}e^{-h_n n^2}dn$, etc., la probabilité de la simultanéité de ces événements sera

$$\sqrt{\frac{h_m}{\pi}\cdot\frac{h_n}{\pi}\cdot\frac{h_p}{\pi}}\,e^{-(h_m m^2+h_n n^2+h_p p^2\ldots)}dm\,dn\,dp\ldots, \qquad (11)$$

expression qu'il ne s'agit plus que d'intégrer entre les limites convenables, ce qui constitue, à proprement parler, la difficulté du problème.

Pour cela, nous ajouterons aux équations (9) le système des équations linéaires suivantes:

$$\begin{aligned} z &= A'' m + B'' n + C'' p \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v &= A^{(i)} m + B^{(i)} n + C^{(i)} p + \ldots \\ w &= A^{(l)} m + B^{(l)} n + C^{(l)} p + \ldots, \end{aligned}$$

équations dans lesquelles A', B', $C'\ldots$, $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}\ldots$, $A^{(l)}$, $B^{(l)}$, $C^{(l)}$, sont des coefficients entièrement arbitraires, et où $z\ldots$, v, w, expriment de nouvelles variables auxiliaires, dont le nombre est choisi de manière à ce que le nombre total des variables dépendantes égale celui des variables indépendantes.

Si nous déduisons de ces équations les valeurs de m, n, $p\ldots$, en fonction de x, y, $z\ldots$, nous aurons

$$\begin{aligned} m &= \alpha x + \beta y + \ldots + \theta v + \lambda w \\ n &= \alpha' x + \beta' y + \ldots + \theta' v + \lambda' w \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et nous pourrons représenter ce double système d'équations sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x &= \Sigma A m \\ y &= \Sigma A' m \\ &\ldots\ldots \\ w &= \Sigma A^{(l)} m \end{aligned}\right\} \qquad (12) \qquad \left.\begin{aligned} m &= \Sigma \alpha x \\ n &= \Sigma \alpha' x \\ p &= \Sigma \alpha'' x \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

La substitution de ces valeurs de $m, n, p..$ dans l'expression (11), et la transformation de l'élément différentiel $dm\,dn\,dp..$ en un autre élément de la forme $dx\,dy\,dz...$, élimine ces variables indépendantes, et les remplace par le système des variables dépendantes $x, y, z.. w$.

La transformation de l'élément différentiel $dm\,dn\,dp..$ est soumise à une règle générale, que je crois nécessaire de donner ici. Concevons que les variables $x, y, z..$ soient liées aux variables $m, n, p..$ par les relations

$$\begin{aligned} x &= \varphi_0(m, n, p..) \\ y &= \varphi_1(m, n, p..) \\ z &= \varphi_2(m, n, p..) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

L'expression $dm\,dn\,dp..$ indique qu'on a différentié, par rapport à l'une des variables, m par exemple, en supposant les autres constantes, puis par rapport à n, en supposant les autres variables constantes, et ainsi de suite. L'expression $dx\,dy\,dz..$ a un sens analogue. Différentions donc, en supposant $n, p..$ constants, l'équation $x = \varphi_0(m, n, p..)$; il viendra $dx = \frac{d\varphi_0}{dm}\,dm$. Au lieu de faire varier m et x, faisons varier m, n et y, de manière à ce que x ne varie pas : on aura alors

$$\frac{d\varphi_0}{dm}\,dm + \frac{d\varphi_0}{dn}\,dn = 0, \qquad dy = \frac{d\varphi_1}{dm}\,dm + \frac{d\varphi_1}{dn}\,dn = \frac{\frac{d\varphi_0}{dm}\frac{d\varphi_1}{dn} - \frac{d\varphi_0}{dn}\frac{d\varphi_1}{dm}}{\frac{d\varphi_0}{dm}}\,dn,$$

et par suite

$$dx\,dy = \left(\frac{d\varphi_0}{dm}\frac{d\varphi_1}{dn} - \frac{d\varphi_0}{dn}\frac{d\varphi_1}{dm}\right) dm\,dn.$$

En faisant maintenant varier m, n, p et z, de manière à ce que x et y ne varient pas, on trouverait dz en fonction de dp, par la résolution des équations linéaires du premier degré à trois variables, et l'on aurait

$$dx\,dy\,dz = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\varphi_0}{dm}\dfrac{d\varphi_1}{dn}\dfrac{d\varphi_2}{dp} - \dfrac{d\varphi_0}{dm}\dfrac{d\varphi_1}{dp}\dfrac{d\varphi_2}{dn} + \dfrac{d\varphi_0}{dp}\dfrac{d\varphi_1}{dm}\dfrac{d\varphi_2}{dn} - \dfrac{d\varphi_0}{dn}\dfrac{d\varphi_1}{dm}\dfrac{d\varphi_2}{dp} \\ \qquad + \dfrac{d\varphi_0}{dn}\dfrac{d\varphi_1}{dp}\dfrac{d\varphi_2}{dm} - \dfrac{d\varphi_0}{dp}\dfrac{d\varphi_1}{dn}\dfrac{d\varphi_2}{dm} \end{array} \right\} dm\,dn\,dp :$$

si donc, dans le cas général, avec les lettres m, n, p, q, on construit l'expression symbolique $m^0n^1p^2q^3 - m^0n^1q^2p^3 + m^0q^1n^2p^3 - \ldots$ (qui offre, comme on sait, le dénominateur commun des inconnues dans un système d'équations du premier degré, dont les lettres m, n, p... indiquent les coefficients), et si l'on remplace ensuite m par $\frac{d\varphi}{dm}$, n par $\frac{d\varphi}{dn}$, etc., le terme ainsi obtenu indiquera le facteur par lequel l'élément différentiel $dm\,dn\,dp..$ doit être multiplié pour remplacer l'élément $dx\,dy\,dz..$

Laplace (*Mém. de l'Acad. des sciences*, 1772) nomme *résultante* une expression analogue à celle que nous venons de considérer, et la représente par l'expression symbolique $(m^0n^1p^2q^3..)$; ainsi on aura en général, en adoptant cette notation,

$$dx\,dy\,dz.. = \left\{ \left(\frac{d\varphi_0}{dm}\frac{d\varphi_1}{dn}\frac{d\varphi_2}{dp} \right) \right\} dm\,dn\,dp.. \qquad (14)$$

Dans le cas actuel, il faudrait nous servir des équations (13) pour exprimer $dm\,dn\,dp..$ en fonction de x, y, z..., et l'on trouverait ainsi $dm\,dn\,dp... = (\alpha\beta'\gamma''...)\,dx\,dy\,dz..$; il faudrait ensuite changer α, β, γ.. en A, B, C.., au moyen des formules générales des équations du premier degré à plusieurs variables. Mais l'on peut observer que, si l'on avait à transformer $dx\,dy\,dz..$ en $dm\,dn\,dp..$, on aurait eu $dx\,dy\,dz.. = (AB'C''..)\,dm\,dn\,dp..$; donc aussi

$$dm\,dn\,dp.. = \frac{dx\,dy\,dz...}{(AB'C''...)}, \qquad (15)$$

d'où nous déduisons ce résultat remarquable $(\alpha\beta'\gamma...)(AB'C...) = 1$. Pour la démonstration directe de cette propriété et pour les transformations des diverses *résultantes*, que l'on peut former avec les

coefficients α, β, γ.. ou A, B, C.., nous renvoyons à la note qui termine ce mémoire.

L'élément différentiel de la probabilité devient donc

$$\frac{1}{(AB'C''..)}\sqrt{\frac{h_m}{\pi}\frac{h_n}{\pi}\frac{h_p}{\pi}..}\;e^{-\{h_m\Sigma^2\alpha x+h_n\Sigma^2\alpha' x+...\}}\,dx\,dy..\,dw. \qquad (16)$$

Les variables m, n, p.. étant susceptibles de valeurs quelconques de $-\infty$ à $+\infty$, il en est de même des variables w, v, etc. Si nous intégrons l'expression (16) de $w=-\infty$ à $w=\infty$, l'expression obtenue sera la probabilité infiniment petite correspondante aux valeurs $x=x$, $y=y$..., $v=v$. Cette expression doit être entièrement débarrassée des coefficients arbitraires $A^{(l)}$, $B^{(l)}$, $C^{(l)}$.. de l'équation en w; car la variation de ces coefficients amènerait une variation dans la probabilité différentielle, ce qui ne peut être.

Bornons-nous au cas de quatre variables, et soit

$$\begin{aligned} m&=\alpha x+\beta y+\gamma z+\lambda w=\Sigma_1\alpha x+\lambda w\\ n&=\Sigma_1\alpha' x+\lambda' w\\ p&=\Sigma_1\alpha'' x+\lambda'' w\\ q&=\Sigma_1\alpha''' x+\lambda''' w. \end{aligned}$$

L'exposant de e prend la forme

$$\begin{aligned} &(h_m\Sigma_1^2\alpha x+h_n\Sigma_1^2\alpha' x..)+2(\lambda h_m\Sigma_1\alpha x+...)w+(\lambda^2 h_m+..)w^2\\ &\quad=\Sigma(h_m\Sigma_1^2\alpha x)+2w\Sigma(\lambda h_m\Sigma_1\alpha x)+w^2\Sigma(\lambda^2 h_m), \end{aligned}$$

et après l'intégration, notre expression différentielle devient

$$\frac{1}{(AB'C''D''')}\sqrt{\frac{h_m}{\pi}\frac{h_n}{\pi}\frac{h_p}{\pi}\frac{h_q}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{\Sigma\lambda^2 h_m}}\;e^{-\frac{\Sigma(h_m\Sigma_1^2\alpha x)\,\Sigma(\lambda^2 h_m)-\Sigma^2(\lambda h_m\Sigma_1\alpha x)}{\Sigma(\lambda^2 h_m)}}\,dx\,dy\,dz. \qquad (17)$$

Or, on sait, par la théorie des équations du premier degré (voyez la note terminale), que l'on a

$$\lambda=\frac{(BC'D'')}{(AB'C''D''')},\quad \lambda'=\frac{(AC'D'')}{(AB'C''D''')},\quad \lambda''=\frac{(AB'D'')}{(AB'C''D''')},\quad \lambda'''=\frac{(AB'C'')}{(AB'C''D''')}...;$$

la substitution de ces valeurs dans l'expression (17) introduit, dans le coefficient de e, le facteur $(AB'C'D''')$, qui se trouve éliminé par le facteur préexistant $\frac{1}{(AB'C''D''')}$; elle introduit, dans le dénominateur de l'exposant de e, le facteur $\left\{\frac{1}{(AB'C''D''')}\right\}^2$, et comme le numérateur se compose de termes de la forme.....

$$h_m(\alpha\lambda' - \alpha'\lambda)^2 x^2 \ldots,$$

et tels que l'on ait $\alpha\lambda' - \alpha'\lambda = \frac{(C'D'')}{(AB'C''D''')} \ldots$, le même facteur s'introduit aussi dans le numérateur, et, après son élimination, les coefficients A''', B''', C''', D''' de l'équation en w disparaissent complétement.

Nous intégrerons maintenant de $v = -\infty$ à $v = +\infty$; mais heureusement il est inutile de suivre notre expression différentielle dans ses transformations successives : il suffit de remarquer que l'exposant de e, lequel, avant l'intégration par rapport à w, renfermait les carrés et les rectangles des variables x, y, z.. w, ne renferme plus, après l'intégration, que ceux des variables $x, y, z \ldots v$. De la forme $e^{-(P+2Rw+Qw^2)}$, nous passons à la forme pareille $e^{-(P'+2R'v+Q'v^2)}$..., où Q, Q'... sont des coefficients fixes, R, R' des fonctions linéaires des variables restantes, P, P'.. des fonctions de second ordre des mêmes variables.

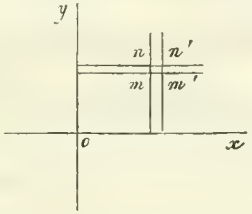
Ainsi, en épuisant toutes les variables, à l'exception de x et de y, nous arrivons, quel que soit leur nombre, à une expression de la forme

$$\frac{K}{\pi} e^{-(ax^2+2cxy+by^2)} dx\, dy, \qquad (18)$$

qui nous représente la probabilité différentielle des valeurs $x = x$, $y = y$, indépendamment des équations auxiliaires en z.. v, w et de leurs coefficients.

Le problème se trouve ainsi ramené à déterminer, *a posteriori*,

la valeur des quatre coefficients K, a, b, e. Nous aurons alors la probabilité pour que le point cherché tombe dans l'élément différentiel $mm'nn'$ (voyez la figure ci-jointe) intercepté entre les droites $x=x$, $x=x+dx$, $y=y$, $y=y+dy$.



Nous représenterons désormais par ϖ la probabilité pour que le point tombe dans une portion finie quelconque de la surface du plan, et de la sorte $\frac{d^2\varpi}{dx\,dy}dx\,dy$ sera la probabilité correspondante à l'élément $mm'nn'$. Si l'on employait les coordonnées polaires r, θ, $\frac{d^2\varpi}{dr\,d\theta}dr\,d\theta$ serait la probabilité relative à l'élément différentiel polaire, $\frac{d\varpi}{dr}dr$ serait celle relative à un anneau circulaire infiniment petit, $\frac{d\varpi}{d\theta}d\theta$ celle relative à un secteur indéfini et infiniment petit, et ainsi de suite.

Nous pouvons donc écrire $$\frac{d^2\varpi}{dx\,dy}=\frac{K}{\pi}e^{-(ax^2+2exy+by^2)}. \qquad (19)$$

Cette formule, intégrée de $y=-\infty$ à $y=\infty$, nous donne

$$\frac{d\varpi}{dx}=\frac{K}{\sqrt{\pi}}b^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{(ab-e^2)}{b}x^2}. \qquad (20)$$

C'est la probabilité pour que x tombe entre $x=x$, et $x=x+dx$; ce résultat doit être entièrement indépendant de l'équation en y, et doit être le même que si l'équation $x=Am+Bn+Cp..$ existait seule. Or, nous savons que, dans ce cas, la probabilité de x se présente sous la forme $\frac{\sqrt{h_x}}{\sqrt{\pi}}e^{-h_x x^2}dx$. On aura donc pour première équation de condition $\frac{1}{h_x}=\frac{b}{ab-e^2}=\frac{b}{K^2}$.

Intégrons maintenant l'équation (19) par rapport à x, de $x=-\infty$ à $x=\infty$; nous obtiendrons de même

$$\frac{d\varpi}{dy}=\frac{K}{\sqrt{\pi}}a^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{(ab-e^2)}{a}y^2}, \tag{21}$$

d'où résultent les équations de condition $\frac{1}{h_y}=\frac{a}{ab-e^2}=\frac{a}{K^2}$.

Si nous remplaçons maintenant $\frac{1}{h_x}$ et $\frac{1}{h_y}$ par leurs valeurs

$$\Sigma\frac{A^2}{h_m}=\alpha_0, \qquad \Sigma\frac{A'^2}{h_m}=\alpha_1,$$

nous aurons les trois équations
$$\left.\begin{aligned} a&=K^2\alpha_1,\\ b&=K^2\alpha_0,\\ K^2&=ab-e^2. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Ces équations ne suffisant pas pour déterminer entièrement les quatre coefficients inconnus, le changement de nos axes coordonnés en d'autres axes également rectangulaires nous fournira la dernière équation de condition.

Soient donc

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos.\mu-y'\sin.\mu\\ y&=x'\sin.\mu+y'\cos.\mu \end{aligned}\right\} \tag{23} \qquad \left.\begin{aligned} x'&=x\cos.\mu+y\sin.\mu\\ y'&=-x\sin.\mu+y\cos.\mu \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

les équations relatives à ce changement, μ étant l'angle de l'axe des x' avec celui des x.

L'exposant $ax^2+2exy+by^2$ se changera en $a'x'^2+2e'x'y'+b'y'^2$, et l'on aura

$$\left.\begin{aligned} a'&=a\cos.^2\mu+2e\cos.\mu\sin.\mu+b\sin.^2\mu\\ b'&=a\sin.^2\mu-2e\cos.\mu\sin.\mu+b\cos.^2\mu\\ e'&=(b-a)\cos.\mu\sin.\mu+e(\cos.^2\mu-\sin.^2\mu). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Enfin le terme $dx\,dy$ se changera évidemment en $dx'\,dy'$. Soient de plus K', α'_0, α'_1, ce que deviennent les quantités K, α_0, α_1, après ce changement. En ayant égard aux équations $a=K^2\alpha_1$,

$b = K^2\alpha_0$, $a' = K'^2\alpha'_1$, $b' = K'^2\alpha'_0$, et divisant l'une par l'autre les deux premières des équations (22), nous trouverons

$$\frac{\alpha_1 \cos.^2\mu + 2eK^{-2} \cos.\mu \sin.\mu + \alpha_0 \sin.^2\mu}{\alpha_1 \sin.^2\mu - 2eK^{-2} \cos.\mu \sin.\mu + \alpha_0 \cos.^2\mu} = \frac{\alpha'_1}{\alpha'_0}.$$

Mais si nous formons directement les valeurs de α'_0 et de α'_1, au moyen des équations

$$x' = \Sigma\,(A\cos.\mu + A'\sin.\mu)m$$
$$y' = \Sigma\,(-A\sin.\mu + A'\cos.\mu)m,$$

nous obtiendrons

$$\alpha'_0 = \frac{1}{h_{y'}} = \cos.^2\mu\,\Sigma\frac{A^2}{h_m} + 2\cos.\mu\sin.\mu\,\Sigma\frac{AA'}{h_m} + \sin.^2\mu\,\Sigma\frac{A'^2}{h_m}$$
$$\alpha'_1 = \frac{1}{h_{x'}} = \sin.^2\mu\,\Sigma\frac{A^2}{h_m} - 2\cos.\mu\sin.\mu\,\Sigma\frac{AA'}{h_m} + \cos.^2\mu\,\Sigma\frac{A'^2}{h_m},$$

d'où

$$\frac{\alpha'_1}{\alpha'_0} = \frac{\alpha_1\cos.^2\mu - 2\Sigma\frac{AA'}{h_m}\cos.\mu\sin.\mu + \alpha_0\sin.^2\mu}{\alpha_1\sin.^2\mu + 2\Sigma\frac{AA'}{h_m}\cos.\mu\sin.\mu + \alpha_0\cos.^2\mu}.$$

De ces deux équations qui doivent avoir lieu, quel que soit μ, l'on déduit $eK^{-2} = -\Sigma\frac{AA'}{h_m}$, et si l'on pose $\Sigma\frac{AA'}{h_m} = \beta_0$, l'on trouvera,

$$e = -K^2\beta_0. \qquad (26)$$

Donc

$$ab - e^2 = (\alpha_0\alpha_1 - \beta_0^2)\,K^4, \qquad \frac{1}{K^2} = \alpha_0\alpha_1 - \beta_0^2.$$

La quantité

$$\alpha_0\alpha_1 - \beta_0^2 = \left(\frac{A^2}{h_m} + \frac{B^2}{h_n} + \frac{C^2}{h_p} + ..\right)\left(\frac{A'^2}{h_m} + \frac{B'^2}{h_n} + \frac{C'^2}{h_p} + ..\right) - \left(\frac{AA'}{h_m} + \frac{BB'}{h_n} + \frac{CC'}{h_p} ..\right)^2$$

étant développée se présente sous la forme

$$\frac{(AB' - A'B)^2}{h_m\,h_n} + \frac{(AC' - CA')^2}{h_m\,h_p} + \text{etc.:}$$

nous aurons donc

$$\frac{1}{K^2} = \Sigma \frac{(AB' - A'B)^2}{h_m h_n}, \tag{27}$$

et cette expression, substituée dans les équations (22) et (26), nous donne les valeurs cherchées de a, b, c.

Ainsi l'équation (19) se change en

$$\frac{d^2\varpi}{dx\,dy} = \frac{1}{\pi}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{(AB' - A'B)^2}{h_m h_n}\right)e^{-\Sigma^{-1}\left(\frac{(AB' - A'B)^2}{h_m h_n}\right)}\left\{x^2\Sigma\frac{A'^2}{h_m} - 2xy\Sigma\frac{AA'}{h_m} + y^2\Sigma\frac{A^2}{h_m}\right\}, \tag{28}$$

ou plus simplement

$$\frac{d^2\varpi}{dx\,dy} = \frac{K}{\pi}e^{-K^2(\alpha_1 x^2 - 2\beta_0 xy + \alpha_0 y^2)}. \tag{29}$$

Pour mettre en évidence les résultats qui peuvent se déduire de l'équation (29), nous concevrons qu'on assujettisse les variables x et y à la condition suivante :

$$\alpha_1 x^2 - 2\beta_0 xy + \alpha_0 y^2 = \text{const.} \tag{30}$$

Cette équation nous représente une ellipse dont le centre est à l'origine des coordonnées, dont les axes principaux sont généralement différents des axes coordonnés, et, par la variation de la constante du second membre, elle fournit une série indéfinie d'ellipses semblables, dont l'aire augmente proportionnellement à la constante.

Reprenons l'équation générale de ces ellipses, ou

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = D,$$

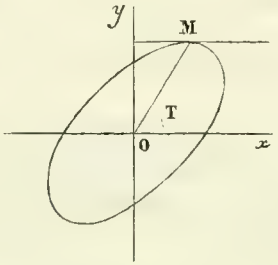
et proposons-nous d'en obtenir la surface. Pour cela, cherchons la valeur maximum de y, et faisons $dy = 0$ dans l'équation

$$(ax + ey)\,dx + (by + ex)\,dy = 0,$$

d'où

$$ax + ey = 0, \qquad x = -\frac{e}{a}y, \qquad y^2 = \frac{a\mathrm{D}}{ab - e^2}.$$

Le rayon vecteur, correspondant à ces valeurs de x et de y, sera le demi-diamètre conjugué de l'axe des x, et si T représente l'angle de ces deux diamètres, $\frac{y}{\sin.T} = \frac{1}{\sin.T}\sqrt{\frac{aD}{ab-e^2}}$ sera la grandeur OM de ce rayon vecteur (voyez figure ci-dessous).



L'autre demi-diamètre s'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation de l'ellipse et a pour valeur $\sqrt{\frac{D}{a}}$. Le produit de ces deux demi-diamètres, multiplié par π sin. T, donne, comme on sait, l'aire de l'ellipse, que nous représenterons par s : on aura ainsi

$$s = \pi \frac{D}{\sqrt{ab-e^2}} \qquad D = \frac{s\sqrt{ab-e^2}}{\pi}. \tag{31}$$

Ainsi l'on peut, dans les formules (18) et (29), remplacer l'exposant de e par cette valeur de D, et l'on trouve, en observant que $\sqrt{ab-e^2} = K$,

$$\frac{d^2\varpi}{dx\,dy} = \frac{K}{\pi} e^{-\frac{K}{\pi}s}, \tag{32}$$

ce qui montre clairement que la probabilité différentielle reste la même tout le long de l'arc d'une des ellipses données par l'équation (30), et qu'elle varie en passant d'une ellipse à l'autre, en raison inverse de l'exponentielle de la surface.

Si nous intégrons dans toute l'étendue de l'espace annulaire compris entre deux ellipses infiniment voisines, s restera cons-

tant, et l'intégrale $fdxdy$ se changera en ds, qui est l'accroissement de l'aire de l'ellipse; on aura ainsi

$$\frac{d\varpi}{ds} = \frac{K}{\pi} e^{-\frac{K}{\pi}s}, \tag{33}$$

expression qui, intégrée de $s = 0$ à $s = s_1$, donne

$$\varpi = (1 - e^{-\frac{K}{\pi}s_1}). \tag{34}$$

Donc $e^{-\frac{K}{\pi}s_1}$ représente la probabilité pour que le point vrai tombe en dehors de l'ellipse dont la surface est s_1. Nous nommerons dorénavant *ellipse fondamentale* celle dont la surface est égale à l'unité de surface.

La probabilité pour que le point vrai tombe en dehors de cette ellipse, probabilité que l'on peut nommer *probabilité extérieure*, aura pour valeur $e^{-\frac{K}{\pi}}$; et, par suite, « la probabilité extérieure de l'une quelconque de nos ellipses sera égale à la probabilité extérieure de l'ellipse fondamentale élevée à une puissance égale à l'aire de l'ellipse considérée. »

Remplaçons maintenant les coordonnées x et y par un système de coordonnées polaires R et θ, R étant le rayon vecteur, à partir de l'origine, et θ l'angle variable qu'il forme avec l'ancien axe des x : soit, de plus, r la portion du rayon vecteur interceptée entre l'ellipse fondamentale et l'origine.

La comparaison des équations (29) et (32) nous donnant

$$K^2(\alpha_1 x^2 - 2\beta_0 xy + \alpha_0 y^2) = \frac{K}{\pi} s, \tag{35}$$

si nous y faisons $s = 1$, $x = r\cos.\theta$, $y = r\sin.\theta$, cette dernière se changera en $\frac{1}{r^2} = K\pi(\alpha_1\cos.^2\theta - 2\beta_0\cos.\theta\sin.\theta + \alpha_0\sin.^2\theta)$, (36)

et nous aurons de plus $R^2 = r^2 s$. (37)

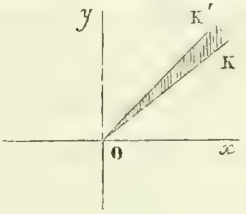
Ces équations nous donnent r en fonction de θ, et R en fonction de θ et s.

L'élément différentiel $dx\,dy$, transformé en coordonnées polaires, se change en $RdR d\theta$; or l'équation (37), différentiée en y supposant θ constant, donne $RdR = \frac{1}{2} r^2 ds$; d'où $dx\,dy = \frac{1}{2} r^2 d\theta\, ds$, et notre formule (32) devient

$$\frac{d^2\varpi}{d\theta\, ds} d\theta\, ds = \frac{K}{\pi} e^{-\frac{K}{\pi}s} ds . \tfrac{1}{2} r^2 d\theta, \qquad (38)$$

équation dans laquelle r est une fonction de θ donnée par l'équation (36).

Si nous intégrons cette expression de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$, à cause de $\int \frac{1}{2} r^2 d\theta =$ surf. ellipse fondamentale $= 1$, nous retombons sur $\frac{K}{\pi} e^{-\frac{K}{\pi}s} ds$, second membre de l'équation (33).



Mais si nous laissons θ et r constants, et si nous intégrons de $s = 0$ à $s = \infty$, c'est-à-dire dans toute l'étendue du secteur indéfini KOK', dont l'angle au centre est $d\theta$, l'équation (38) se changera en

$$\frac{d\varpi}{d\theta} d\theta = \tfrac{1}{2} r^2 d\theta; \qquad (39)$$

et, puisque $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ exprime l'aire du secteur interceptée par l'ellipse fondamentale, cette aire peut servir de mesure à la probabilité qu'a le point vrai d'être situé dans ce secteur indéfini. La même loi subsiste évidemment pour des secteurs à angles finis, et l'on voit ainsi que « la probabilité *intérieure*, relative à un « secteur quelconque, est égale à l'aire interceptée par ce sec- « teur dans l'ellipse fondamentale. »

On peut remarquer, comme corollaire, que toute droite menée

par l'origine partage la totalité de l'espace plan en deux moitiés d'*égale probabilité*, mais qu'il n'existe, en général, qu'une seule manière de partager cet espace en quatre parties d'égale probabilité par un système de droites rectangulaires.

Il est inutile d'insister sur la transformation d'axes propre à faire coïncider nos axes coordonnés avec les axes principaux de l'ellipse fondamentale. Si l'on pose $e' = 0$ dans la troisième des équations (25), on en déduit tang. $2\mu = \frac{2e}{a-b} = \frac{2\beta_0}{\alpha_0 - \alpha_1}$. Quant à a' et b', ils sont fournis par les racines de l'équation $z^2 - (a+b)z + ab - e^2 = 0$. Ainsi la quantité $ab - e^2 = a'b'$ est tout à fait invariable, quel que soit le système des axes primitifs, et la quantité $\Sigma \frac{(AB' - A'B)^2}{h_m h_n}$ est indépendante du système d'axes primordiaux adopté, et reste la même, quelles que soient les variations que l'adoption de tel ou tel système puisse introduire dans les coefficients A, B, C, A′, B′, C′.. Il en est de même de $a + b = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{K^2}$, et par suite de $\alpha_0 + \alpha_1 = \Sigma \frac{A^2}{h_m} + \Sigma \frac{A'^2}{h_m} = \Sigma \left(\frac{A^2 + A'^2}{h_m} \right)$.

CAS DES AXES OBLIQUES.

La considération d'axes obliques introduit quelques légères modifications dans ces résultats. Il est à remarquer d'abord que l'équation (28) reste identiquement la même pour le cas des axes obliques; à la vérité, nous sommes arrivés à la valeur de e (éq. 26) au moyen d'axes rectangulaires; mais l'équation (28) n'en est pas moins une conséquence nécessaire de la formule (11) combinée avec les équations (9), indépendamment de toute considération géométrique, et entre autres de l'angle des axes coordonnés. Mais si nous nommons i un élément différentiel de surface infiniment petit dans les deux sens, on aura $d^2\varpi = \frac{K}{\pi} e^{-(ax^2 + 2exy + by^2)} i$, dans le cas de coordonnées rectangulaires. Si l'on change ces axes en des axes obliques quelconques, K, a, b, e se changeant en K_1, a_1, b_1, c_1,

au lieu de $dx_1\,dy_1 = i$, l'on aura $dx_1\,dy_1 = \frac{i}{\sin.\varphi}$, φ étant l'angle des axes, et l'on trouve alors

$$d^2\varpi = \frac{K_1}{\pi \sin.\varphi}\, e^{-(a_1x_1^2 + 2e_1x_1y_1 + b_1y_1^2)}\, i. \qquad (40)$$

Si maintenant nous faisons $x=0$, $y=0$, et par suite $x_1=0$, $y_1=0$, nous obtiendrons la relation $K = \frac{K_1}{\sin.\varphi}$, (41)

qui nous donne aussitôt la valeur de K relative à un système d'axes rectangulaires (système dans lequel nous avons raisonné jusqu'ici), lorsque nous connaissons la valeur K_1, relative à un système d'axes obliques, et cette valeur devra être substituée dans les équations (32), (33), (34) et (38). Les coefficients a_1, b_1, e_1 sont, à leur tour, liés à a, b, e, par la condition que $a_1x_1^2 + 2e_1x_1y_1 + b_1y_1^2$ soit la transformation du premier membre de l'équation..... $ax^2 + 2exy + by^2 = D$, dans le passage des axes rectangulaires aux axes obliques.

Dans un tel passage, le parallélogramme construit sur les diamètres conjugués doit rester constant, aussi bien que la somme des carrés de ces demi-diamètres. Or le diamètre oblique conjugué de celui qui coïncide avec l'axe des x a ici pour valeur $\frac{\sin.\varphi}{\sin.T}\sqrt{\frac{a_1D}{a_1b_1-e_1^2}}$, T étant l'angle qu'il forme avec l'axe des x. Multiplions-le par $\sqrt{\frac{D}{a_1}}$ et par sin. T : nous aurons pour l'aire du parallélogramme $\frac{\sin.\varphi.D}{\sqrt{a_1b_1-e_1^2}}$.

Donc

$$\frac{\sin.\varphi}{\sqrt{a_1b_1-e_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{ab-e^2}}; \text{ et } K = \frac{K_1}{\sin.\varphi},$$

ce qui est la relation déjà obtenue. Si l'on eût calculé, au contraire, la grandeur du demi-diamètre conjugué de l'axe des x, au moyen des formules

$$R_1^2 = y_1^2 + x_1^2 + 2x_1y_1\cos.\varphi,\ x_1 = -\frac{e_1}{a_1}y_1,\ y_1^2 = \frac{a_1D}{a_1b_1-e_1^2},$$

l'on aurait trouvé

$$R_1^2 = \frac{D(a_1^2 + e_1^2 - 2a_1 e_1 \cos.\varphi_1}{a_1(a_1 b_1 - e_1^2)}.$$

En y ajoutant le carré de son demi-diamètre conjugué ou $\frac{D}{a_1}$, on en déduira, pour la somme des carrés,

$$\frac{D(a_1 + b_1 - 2e_1 \cos.\varphi)}{a_1 b_1 - e_1^2};$$

et la relation cherchée sera

$$\frac{D(a_1 + b_1 - 2e_1 \cos.\varphi)}{a_1 b_1 - e_1^2} = \frac{D(a+b)}{ab - e^2}.$$

Si l'on observe, de plus, que

$$a_1 = (a_1 b_1 - e_1^2) \Sigma \frac{A'^2_1}{h_m},$$
$$b_1 = (a_1 b_1 - e_1^2) \Sigma \frac{A_1^2}{h_m},$$
$$e_1 = -(a_1 b_1 - e_1^2) \Sigma \frac{A_1 A'_1}{h_m},$$

on aura

$$\alpha_0 + \alpha_1 = \Sigma \frac{A_1^2}{h_m} + \Sigma \frac{A'^2_1}{h_m} + 2 \cos.\varphi \Sigma \frac{A_1 A'_1}{h_m}; \qquad (42)$$

il est bien entendu que les coefficients A_1, A'_1, etc., proviennent des équations aux coordonnées obliques

$$x_1 = A_1 m + B_1 n + C_1 p + \ldots$$
$$y_1 = A'_1 m + B'_1 n + C'_1 p + \ldots$$

Le système que forme l'équation (42), conjointement avec l'équation (41) qui peut se traduire par

$$\alpha_0 \alpha_1 - \beta_0^2 = \sin.^2\varphi \left(\Sigma \frac{A'^2_1}{h_m} \Sigma \frac{A_1^2}{h_m} - \Sigma^2 \frac{A_1 A'_1}{h_m} \right),$$

est tout à fait indépendant de la position qu'affecte le système oblique par rapport au système rectangulaire. En ayant égard à

l'angle qui détermine cette position, on aurait une troisième relation plus complexe, qui, jointe aux deux précédentes, servirait, au besoin, à déterminer α_0, α_1, β_0, en fonction de $\Sigma\frac{A_1^2}{h_m}$, $\Sigma\frac{A_1'^2}{h_m}$ et $\Sigma\frac{A_1A_1'}{h_m}$, ou réciproquement. L'équation (42) peut être nécessaire à consulter pour obtenir l'évaluation de la crainte mathématique.

CAS DES AXES PRINCIPAUX.

Revenons au système rectangulaire, et supposons que l'on ait $\Sigma\frac{AA'}{h_m}=0$, d'où $\beta_0=0$, ce qui revient à faire coïncider les axes coordonnés avec les axes principaux de l'ellipse : nous aurons $K^2=\frac{1}{\alpha_0\alpha_1}$, et l'équation (29) se changera en

$$\frac{d^2\varpi}{dx\,dy}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\alpha_0}\cdot\frac{1}{\alpha_1}}\,e^{-\left(\frac{x^2}{\alpha_0}+\frac{y^2}{\alpha_1}\right)}; \qquad (43)$$

mais, puisque $\frac{1}{h_x}=\alpha_0$, $\frac{1}{h_y}=\alpha_1$, elle devient

$$\frac{d^2\varpi}{dx\,dy}=\frac{1}{\pi}\sqrt{h_x\cdot h_y}\,e^{-(h_xx^2+h_y\cdot y^2)}. \qquad (44)$$

Ainsi, dans ce cas, la probabilité des valeurs simultanées $x=x$, $y=y$, est exactement la même que si les variables x et y étaient entièrement indépendantes l'une de l'autre. Ce cas se réalise, entre autres, si les équations (9) sont de la forme

$$x=Am+Bn+Cp+..,$$
$$y=A'_1m_1+B'_1n_1+C'_1p_1+..,$$

les variables m, n, p.. de l'équation en x étant essentiellement distinctes des variables m_1, n_1, p_1.. de l'équation en y. Chacun des termes qui composent $\Sigma\frac{AA'}{h_m}$, tels que $\frac{AA'}{h_m}$, $\frac{BB'}{h_n}$.., $\frac{A_1A'_1}{h_{m_1}}$, $\frac{B_1B'_1}{h_{n_1}}$..., renferme alors un facteur nul, savoir $A'=0$, $B'=0$.., ou $A_1=0$, $B_1=0$, ce qui annule le terme en xy, et l'on retombe sur l'équa-

tion (44), comme on devait s'y attendre, par suite de l'entière indépendance des variables x et y.

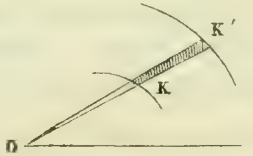
Si, dans la première des équations (25), on remplace a', a, e, b par leurs valeurs en α'_1, α_1, β_0, α_0, et si l'on observe que $K'^2 = K^2$ (p. 275), on aura

$$\alpha'_1 = \frac{1}{h_{x'}} = \alpha_1 \sin.^2\mu + 2\beta_0 \cos.\mu \sin.\mu + \alpha_0 \cos.^2\mu.$$

Si donc nous nommons ρ le rayon vecteur de l'ellipse fondamentale correspondant à l'axe des y', et qui, par suite, fait un angle $\mu + \frac{\pi}{2}$ avec l'axe des x, le second membre de cette équation deviendra $\frac{1}{K\pi\rho^2}$, comme le prouve la substitution de $r = \rho$ et de $\theta = \mu + \frac{\pi}{2}$ dans l'équation (36). On trouve ainsi $h_{x'} = K\pi\rho^2$. (45)

Ainsi, le module relatif aux ordonnées comptées sur une droite fixe, dont l'équation polaire est $\theta = \mu$, est proportionnel au carré du rayon vecteur perpendiculaire à cette droite, et intercepté par l'ellipse fondamentale. C'est donc relativement au grand axe de l'ellipse que ce module devient un minimum, et relativement au petit, qu'il devient un maximum.

Proposons-nous maintenant de déterminer la probabilité pour que le *point vrai* soit renfermé dans un espace donné fini ou indéfini. Il suffit de concevoir que, dans l'équation (38), le système des variables θ et s représente un système de coordonnées équivalant aux coordonnées polaires ordinaires θ et R, et que l'expression $\frac{1}{2} r^2 d\theta ds$ exprime l'élément différentiel de surface intercepté, d'une part, entre deux rayons vecteurs infiniment voisins, d'autre part, entre deux arcs d'ellipses semblables et contiguës.



Si donc nous intégrons l'équation (38), par rapport à s, de $s = s_1$,

qui correspond au point K, jusqu'à $s = s_2$, qui correspond au au point K′, la probabilité relative à la portion de secteur interceptée sera $\left\{e^{-\frac{K}{\pi}s_1} - e^{-\frac{K}{\pi}s_2}\right\} \frac{1}{2} r^2 d\theta$.

Les quantités s_1, s_2 sont des fonctions de θ indiquées par les équations polaires en s et θ des courbes limites; et si θ_1, θ_2 représentent les extrêmes des valeurs de θ, la probabilité cherchée s'obtiendra par la quadrature

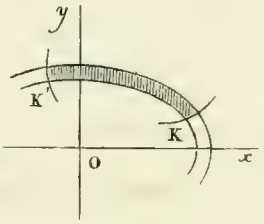
$$\varpi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(e^{-\frac{K}{\pi}s_1} - e^{-\frac{K}{\pi}s_2}\right) \frac{1}{2} r^2 d\theta, \qquad (46)$$

où r^2 est une fonction de θ donnée par l'équation (36).

On arrive à une quadrature d'une autre forme, en commençant l'intégration par θ et la finissant par s. Pour simplifier, nous supposerons que les axes coordonnés coïncident avec les axes de l'ellipse fondamentale, et nous mettrons l'équation de celle-ci sous la forme

$$\lambda^{-1}x^2 + \lambda y^2 = \frac{1}{\pi}, \qquad (47)$$

laquelle ne renferme que le paramètre variable λ qui dépend de l'excentricité. L'équation (36) se change alors en $\pi r^2 = \frac{1}{\lambda \sin.^2\theta + \lambda^{-1}\cos.^2\theta}$, et l'expression $\frac{d\theta}{\lambda \sin.^2\theta + \lambda^{-1}\cos.^2\theta}$ ne sera autre chose que la différentielle de l'arc (tang. $= \lambda$ tang. θ).



Si donc, après la substitution de r^2 dans l'équation (38), nous

l'intégrons depuis $\theta = \theta_1$ jusqu'à $\theta = \theta_2$, c'est-à-dire depuis le point K jusqu'au point K', la probabilité cherchée s'obtiendra par la quadrature

$$\varpi = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\text{arc tang.} = \lambda \text{ tang.} \theta_2 - \text{arc tang.} = \lambda \text{ tang.} \theta_1}{2\pi} \right) \frac{K}{\pi} e^{-\frac{K}{\pi} s} ds. \qquad (48)$$

La substitution de la valeur de r^2 dans l'équation (38) et le remplacement de $\frac{K}{\pi}$ par G changent l'équation (38) en

$$\frac{d^2\varpi}{d\theta ds} = \frac{G e^{-Gs}}{2\pi(\lambda \sin.^2\theta + \lambda^{-1}\cos.^2\theta)}. \qquad (49)$$

Cette expression très-simple de la probabilité différentielle montre que tous les paramètres de la question se réduisent finalement aux deux paramètres G et λ, une fois qu'on a rapporté l'ellipse fondamentale à ses axes principaux. Si cette dernière circonstance n'avait point eu lieu, on en tiendrait compte, en changeant θ en $\theta - \omega$ dans l'équation (49), et l'on introduirait ainsi un troisième paramètre ω, qui exprimerait l'angle formé par un des axes principaux de l'ellipse avec la droite origine des θ.

Proposons-nous, comme application, de trouver la probabilité pour que le point vrai soit situé dans l'intérieur du cercle $y^2 + (x-g)^2 = \rho^2$, et, pour plus de généralité, concevons que les axes coordonnés ne soient point les axes principaux de l'ellipse fondamentale.

L'équation (35) nous donne alors

$$\frac{K}{\pi} s = ax^2 + 2cxy + by^2 = R^2 (a\cos.^2\theta + 2c\cos.\theta\sin.\theta + b\sin.^2\theta);$$

mais l'équation polaire du cercle est

$$R^2 - 2gR\cos.\theta + g^2 = \rho^2,$$

d'où

$$R^2 = \rho^2 + g^2\cos.2\theta \pm 2g\cos.\theta\sqrt{\rho^2 - g^2\sin.^2\theta};$$

l'on en déduit, pour les valeurs de $\frac{K}{\pi}s_1$ et de $\frac{K}{\pi}s_2$,

$$(a\cos.^2\theta+2e\cos.\theta\sin.\theta+b\sin.^2\theta)(\rho^2+g^2\cos.2\theta-2g\cos.\theta\sqrt{\rho^2-g^2\sin.^2\theta},$$
$$(a\cos.^2\theta+2e\cos.\theta\sin.\theta+b\sin.^2\theta)(\rho^2+g^2\cos.2\theta+2g\cos.\theta\sqrt{\rho^2-g^2\sin.^2\theta}).$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'équation (46), en faisant, pour simplifier, $a\cos.^2\theta+2e\cos.\theta\sin.\theta+b\sin.^2\theta=\varphi(\theta)$, et si nous observons que $r^2=\frac{K}{\pi\varphi(\theta)}$, nous aurons

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{e^{-\varphi(\theta)(\rho^2+g^2\cos.2\theta)}\left\{e^{2g\cos.\theta\varphi(\theta)\sqrt{\rho^2-g^2\sin.^2\theta}}-e^{-2g\cos.\theta\varphi(\theta)\sqrt{\rho^2-g^2\sin.^2\theta}}\right\}Kd\theta}{2\pi\varphi(\theta)}. \quad (50)$$

Cette intégrale est relative au cas où $\rho<g$. Dans le cas où $\rho>g$, il faudrait intégrer de $s=0$ à $s=s_1$, et l'on aurait le facteur $1-e^{-\frac{K}{\pi}s_1}$, ou plutôt le facteur $e^{-\frac{K}{\pi}s_1}$, en ne considérant que la probabilité extérieure au cercle. L'intégration de $s=0$ à $s=s_2$, effectuée dans le secteur qui est opposé au précédent par le sommet, donnerait de même $e^{-\frac{K}{\pi}s_2}$. Ainsi, dans le cas général d'une courbe fermée quelconque, renfermant l'origine des coordonnées, l'équation (46) se change en

$$1-\varpi=\int_0^{\pi}(e^{-\frac{K}{\pi}s_1}+e^{-\frac{K}{\pi}s_2})\tfrac{1}{2}r^2d\theta.$$

Dans le cas particulier du cercle, on voit qu'il suffit de changer dans l'expression (50) le signe de la quantité

$$-e^{-2g\cos.\theta\varphi(\theta)\sqrt{\rho^2-g^2\sin.^2\theta}},$$

de prendre pour limites $\theta_1=0$, $\theta_2=\pi$; l'intégrale obtenue représentera la probabilité extérieure.

Dans le même cas, si $\rho<g$, les limites θ_1 et θ_2 seront données par les équations $\theta_1=-\text{arc sin.}\frac{\rho}{g}$, $\theta_2=+\text{arc sin.}\frac{\rho}{g}$.

Si le cercle donné a l'origine pour centre, on a $g = 0$, et rien n'empêche de supposer alors $e = 0$. La probabilité extérieure au cercle se présente alors sous la forme

$$\frac{K}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-(a\cos.^2\theta + b\sin.^2\theta)\rho^2} d\theta}{(a\cos.^2\theta + b\sin.^2\theta}. \qquad (51)$$

Cette quadrature peut encore se simplifier en posant

$$\frac{b}{a}\text{tang.}^2\theta = \text{tang.}^2\psi;$$

à cause de $K = \sqrt{ab}$, l'intégrale devient

$$\int_0^{\pi} e^{-\left(\frac{\cos.^2\psi}{a} + \frac{\sin.^2\psi}{b}\right)^{-1}\rho^2} \frac{d\psi}{\pi}. \qquad (52)$$

Si l'on différentie, par rapport à ρ^2, l'expression

$$\frac{K}{2\pi} \frac{e^{-(a\cos.^2\theta + b\sin.^2\theta)\rho^2} d\theta}{a\cos.^2\theta + b\sin.^2\theta},$$

qui exprime la probabilité extérieure à la partie interne d'un secteur simple indéfini, cette probabilité devient

$$\frac{K}{\pi} e^{-(a\cos.^2\theta + b\sin.^2\theta)\rho^2} \rho d\rho d\theta;$$

et cette expression, intégrée de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$, nous donnera la probabilité pour que le point vrai tombe dans l'anneau circulaire compris entre les deux cercles $R = \rho$, $R = \rho + d\rho$. Posons

$$\frac{a+b}{2} = p, \quad \frac{b-a}{2} = q, \quad 2\theta = u,$$

et notre exponentielle, développée en série, prendra la forme

$$e^{-p\rho^2} e^{q\rho^2\cos.u} = e^{-p\rho^2}\left(1 + q\rho^2\cos.u + \frac{q^2\rho^4\cos.^2 u}{1.2} + \frac{q^3\rho^6\cos.^3 u}{1.2.3} + \ldots\right).$$

Mais l'on a

$$\int_0^{\pi} \cos.^{(2m+1)} u\,du = 0 \qquad \int_0^{\pi} \cos.^2 u\,du = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \int_0^{\pi} \cos.^4 u\,du = \frac{1.3}{2.4}\pi, \text{ etc.},$$

et la probabilité relative à l'anneau circulaire devient ainsi

$$2\sqrt{ab}\,e^{-p\rho^2}\left(1+\frac{1}{2^2}q^2\rho^4+\frac{1}{2^2.4^2}q^4\rho^8+\frac{1}{2^2.4^2.6^2}q^6\rho^{12}+..\right)\rho\,d\rho.$$

Ainsi la probabilité pour que x^2+y^2 soit compris entre $t=\rho^2$ et $t+dt$, est de la forme

$$\sqrt{ab}\,e^{-pt}\left(1+\frac{1}{2^2}q^2t^2+\frac{1}{2^2.4^2}q^4t^4+...\right)dt, \qquad (53)$$

et ne peut s'obtenir que par la voie des séries. A plus forte raison en est-il de même de l'intégrale de cette expression prise de $t=0$ à $t=t$; il est très-facile de l'obtenir en série, suivant les puissances croissantes de t; mais malheureusement l'expression obtenue est peu convergente dans le cas où t est un peu grand, cas qui forme cependant la partie la plus intéressante de la question.

Il ne serait pas plus difficile de chercher la probabilité pour qu'une fonction quelconque $\varphi(x, y)$ des erreurs x et y soit comprise entre des limites données $\varphi(x, y)=t$, $\varphi(x, y)=t'$, t' pouvant, si l'on veut, être égal à $t+dt$. La difficulté se réduit à transformer $\varphi(x, y)$ en une fonction des coordonnées R et s, telle qu'on en puisse déduire, s'il se peut, R en s ou s en R. On intégrera alors dans tout l'espace plan compris entre les deux courbes $\varphi(x, y)=t$, $\varphi(x, y)=t'$, et la probabilité obtenue sera la probabilité cherchée.

Au moyen de la formule (50), on peut, entre autres, résoudre le problème suivant : « Deux points sont déterminés sur un plan « par des éléments susceptibles d'erreurs, mais dont les mo- « dules sont connus : on demande la probabilité pour que la dis-

« tance de ces points soit moindre ou plus grande qu'une ligne « donnée ρ. »

Soient

$$x = \Sigma \mathrm{A} m$$
$$y = \Sigma \mathrm{A}' m$$

les équations aux erreurs possibles de l'un de ces points pris pour origine des coordonnées; soient de même

$$x = \Sigma \mathrm{A}_1 m_1$$
$$y = \Sigma \mathrm{A}'_1 m_1$$

les équations pareilles relatives au second point, considéré à son tour comme origine. Puisque nous n'avons besoin que de connaître la distance des deux points entre eux, nous pouvons supposer le second point non sujet à erreur, et faire supporter au premier point, outre ses déplacements propres, ceux du second point pris en sens inverse.

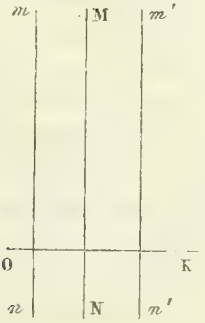
Ainsi les équations aux erreurs du premier point, pris pour origine, seront

$$\left.\begin{aligned} x &= \Sigma \mathrm{A} m - \Sigma \mathrm{A}_1 m_1 \\ y &= \Sigma \mathrm{A}' m - \Sigma \mathrm{A}'_1 m_1 \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

Prenons pour axe fixe des θ la droite qui joint le premier point au second, et nommons g la distance de ce second point à l'origine. Concevons décrit un cercle de rayon ρ, ayant ce second point pour centre : la possibilité que le *lieu vrai* de l'origine soit intérieur ou extérieur à ce cercle sera la probabilité cherchée et s'obtiendra par la formule (50), dès que l'on aura calculé, d'après les équations (54), les valeurs des coefficients a, b, e, K.

On pourrait aussi supposer que les deux points se meuvent dans des directions données et avec des vitesses données, et demander la probabilité que leur distance minimum soit

moindre que la longueur donnée ρ. Nous supposerons alors le premier point immobile, et le second se mouvant selon la direction et la vitesse qui résultent de son propre mouvement et du mouvement du premier mobile pris en sens inverse.



Soit MN cette direction relative du second mobile (voyez la figure), soit O la position du premier point pris pour origine, et nommons l la distance de O à MN. En faisant, comme dans le cas précédent, porter sur la position de ce dernier point les erreurs de situation des deux points, on aura deux équations semblables aux équations (54). Menons alors de part et d'autre de MN, et à une distance ρ, les parallèles mn, $m'n'$, la probabilité pour que le point O corrigé tombe entre ces deux parallèles sera la probabilité cherchée.

Prenons donc la normale OK pour axe des x, et une parallèle à MN pour axe des y. Après avoir intégré de $y = -\infty$ à $y = +\infty$ l'équation (19) et obtenu l'équation (20), intégrons cette dernière de $x = l - \rho$ à $x = l + \rho$: si, pour simplifier, nous posons $Kb^{-\frac{1}{2}}x = t$, la probabilité cherchée sera

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_{Kb^{-\frac{1}{2}}(l-\rho)}^{Kb^{-\frac{1}{2}}(l+\rho)} e^{-t^2} dt. \qquad (55)$$

K et b sont alors déterminés par les équations aux erreurs, et l'intégrale s'obtiendra facilement par les tables de la fonction

$\int e^{-x^2} dx$, laquelle est d'ailleurs l'une des intégrales les mieux connues des analystes. Il est remarquable que ce nouveau problème, plus complexe en apparence que le précédent, nous conduise à une formule beaucoup plus simple. Sa solution pourra être utile à l'astronome qui désirera connaître la chance pour qu'une comète connue vienne à passer très-près de la terre.

CRAINTE MATHÉMATIQUE.

Recherchons enfin la crainte mathématique de l'erreur de situation du point. Si, après avoir formé la probabilité relative à chaque élément différentiel, nous la multiplions par le rayon vecteur correspondant, et si nous formons la somme de tous ces produits ce qui revient à intégrer, dans toute l'étendue du plan, l'intégrale obtenue sera une longueur représentant la crainte mathématique cherchée.

Appliquons ces considérations à l'équation (38). Si nous multiplions son second membre par $R = rs^{\frac{1}{2}}$, il se change en

$$\frac{K}{2\pi} e^{-\frac{K}{\pi}s} s^{\frac{1}{2}} ds r^2 d\theta. \tag{56}$$

C'est l'expression différentielle de la crainte mathématique relative à un élément polaire infiniment petit. Cette expression, intégrée de $s = 0$ à $s = \infty$, nous donnera la crainte mathématique relative au secteur indéfini compris entre les droites $\theta = \theta$, $\theta = \theta + d\theta$. Or, à cause de $\int_0^\omega e^{-t} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, nous trouvons

$$\tfrac{1}{4} \pi^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} r^3 d\theta. \tag{57}$$

Supposons l'ellipse rapportée à ses axes principaux, et employons la formule $\pi r^2 = \frac{1}{\lambda \sin.^2\theta + \lambda^{-1}\cos.^2\theta}$ pour exprimer r en fonction de

θ; intégrons alors de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$ pour avoir la crainte mathématique totale; nous pouvons aussi nous contenter d'intégrer de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$, en multipliant par 4 le résultat obtenu. Nous trouverons ainsi

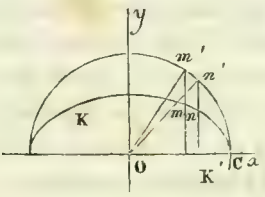
$$\pi^{-\frac{1}{2}}, K^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\lambda \sin.^2\theta + \lambda^{-1}\cos.^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \qquad (58)$$

Cette expression n'est intégrable que par les fonctions elliptiques; mais on peut la mettre sous une forme plus simple, en posant λ tang. θ = tang. ψ, et elle prend la forme

$$\pi^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\lambda \cos.^2\psi + \lambda^{-1}\sin.^2\psi)^{\frac{1}{2}} d\psi. \qquad (59)$$

Sous cette dernière forme, il est facile de voir que notre crainte mathématique a pour valeur un arc elliptique.

En effet, considérons une ellipse de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, et sur l'axe des x, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence.



Soit nm un arc elliptique infiniment petit, correspondant à l'arc circulaire $n'm'$, et soient $Con' = \psi$, $n'm' = ad\psi$: les deux projections de nm sur les axes auront pour valeur $a \cos. \psi d\psi$, $b \sin. \psi d\psi$: l'on aura donc $nm = (a^2\cos.^2\psi + b^2\sin.^2\psi)^{\frac{1}{2}} d\psi$, et la circonférence entière de l'ellipse KCK' sera égale à

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\cos.^2\psi + b^2\sin.^2\psi)^{\frac{1}{2}} d\psi.$$

Cette expression, étant comparée à la formule (59), est susceptible évidemment de s'identifier avec elle, si l'on dispose convenablement des demi-axes a et b. Dans ce but, écrivons $a^2 = f\lambda$, $b^2 = f\lambda^{-1}$, f étant un coefficient non encore déterminé. L'expression ci-dessus se changera en

$$4f^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\lambda \cos.^2\psi + \lambda^{-1} \sin.^2\psi)^{\frac{1}{2}} d\psi ;$$

et si nous posons

$$4f^{\frac{1}{2}} = \pi^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}}, \quad f = \frac{1}{16\pi K},$$

l'équation de l'ellipse KCK′ deviendra

$$\lambda^{-1} x^2 + \lambda y^2 = \frac{1}{16\pi K}.$$

Ainsi l'ellipse KCK′, dont la circonférence mesure la crainte mathématique cherchée, est une ellipse semblable à l'ellipse fondamentale, et dont la surface est égale à $\frac{1}{16K}$; mais nous avons trouvé ci-dessus que $K^2 = \frac{1}{\alpha_0 \alpha_1} = h_x h_y$ (éq. 10), h_x et h_y étant les modules relatifs aux axes principaux, c'est-à-dire les modules maximum et minimum. Ainsi l'on peut dire que « la crainte ma-« thématique de l'erreur égale le quart de la circonférence d'une « ellipse semblable à l'ellipse fondamentale, et dont la surface « égale l'unité divisée par la moyenne géométrique entre le mo-« dule maximum et le module minimum. »

On peut développer en série convergente l'intégrale (59). Pour cela, nous observerons d'abord que, si l'on fait dans l'équation (35) $\beta_0 = 0$, $s = 1$, on a l'équation de l'ellipse fondamentale rapportée à ses axes principaux, ou

$$K\alpha_1 x^2 + K\alpha_0 y^2 = \frac{1}{\pi}, \tag{60}$$

et la comparaison avec l'équation (47) donne

$$\lambda = K\alpha_0 ; \qquad \lambda^{-1} = K\alpha_1 ; \qquad K^2 \alpha_0 \alpha_1 = 1 .$$

Changeons dans l'intégrale (59) $\left(\frac{\lambda\cos.^2\psi+\lambda^{-1}\sin.^2\psi}{k}\right)$ en

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\left(1+\frac{\alpha_0-\alpha_1}{\alpha_0+\alpha_1}\cos.2\psi\right).$$

Cette intégrale deviendra, en posant $2\psi=u$, et ayant égard au changement de limites,

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2\pi}}\int_0^{\pi}\left(1+\frac{\alpha_0-\alpha_1}{\alpha_0+\alpha_1}\cos.u\right)^{\frac{1}{2}}du.$$

Celle-ci étant développée en série, en y faisant $\frac{\alpha_0-\alpha_1}{\alpha_0+\alpha_1}=4\mu$, puis intégrée par décomposition, devient, d'après les valeurs connues de $\int_0^{\pi}\cos.^m u\,du$, égale à

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}(\alpha_0+\alpha_1)}\left(1-\mu^2-\frac{1.3.5}{2^2}\mu^4-\frac{1.3.5.7.9}{2^2.3^2}\mu^6-..\right). \qquad (61)$$

La quantité placée entre parenthèses a l'unité pour valeur maximum correspondant à $\mu=0$, et $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}=0{,}9003$ pour valeur minimum correspondant à $4\mu=1$. Ainsi ce facteur diffère généralement peu de l'unité et oscille entre des limites fort voisines.

Dans le cas où l'ellipse fondamentale se change en un cercle, on a $\mu=0$, et l'expression de la crainte mathématique se réduit à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi\alpha_0}=\sqrt{\frac{\pi}{4h_x}}$; si on la compare avec la crainte mathématique obtenue dans le cas de la ligne droite, en supposant h_x le même de part et d'autre, on trouve que la crainte mathématique relative au plan, dans le cas du cercle, surpasse celle relative à la ligne droite dans le rapport de $\frac{1}{2}\pi$ à l'unité.

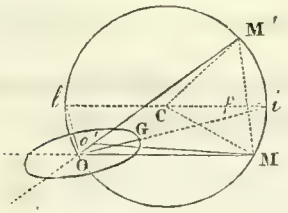
Si, dans une question quelconque dont le but est de déterminer la position d'un point sur un plan au moyen d'observations d'un certain genre, l'on se sert des conditions arbitraires

que comporte la nature de cette question, de manière à ce que $\alpha_0 + \alpha_1$ soit un minimum, on sera certain d'avance d'avoir réalisé les conditions d'observation capables de déterminer le point cherché avec la plus grande précision possible. A la vérité, la quantité entre parenthèses dans la formule (61) est une fonction de α_0 et α_1, et le véritable minimum de l'expression (61) ne coïncide pas exactement avec celui du facteur $(\alpha_0 + \alpha_1)^{\frac{1}{2}}$; mais, les variations du second facteur étant très-lentes, on peut se dispenser d'y avoir égard dans la pratique. Il est important de remarquer que, dans le cas général d'axes obliques ne coïncidant pas avec un système de diamètres conjugués de l'ellipse fondamentale, la quantité $\alpha_0 + \alpha_1$ dérive directement des équations aux erreurs au moyen de la formule (42).

Quant à la crainte mathématique du carré de l'erreur, la méthode la plus simple pour l'obtenir, consiste à multiplier par $x^2 + y^2$ l'expression différentielle $\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha_0\alpha_1}} e^{-\left(\frac{x^2}{\alpha_0}+\frac{y^2}{\alpha_1}\right)} dx\,dy$, qui dérive elle-même de l'équation (43). Si l'on intègre successivement de $x = -\infty$ à $x = +\infty$ et de $y = -\infty$ à $y = +\infty$ l'expression

$$\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha_0\alpha_1}} e^{-\left(\frac{x^2}{\alpha_0}+\frac{y^2}{\alpha_1}\right)} x^2 dx\,dy,$$

l'intégrale obtenue est égale à $\frac{1}{2}\alpha_0$. En faisant une opération analogue sur $\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha_0\alpha_1}} e^{-\left(\frac{x^2}{\alpha_0}+\frac{y^2}{\alpha_1}\right)} y^2 dx dy$, on trouverait semblablement $\frac{1}{2}\alpha_1$. Ainsi la crainte mathématique du carré de l'erreur a pour valeur $\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1)$, et, dans le cas où cette crainte serait appelée à mesurer la précision du résultat, on arriverait encore à la règle déjà obtenue, savoir : que « l'on doit s'attacher à rendre le terme « $\alpha_0 + \alpha_1$ un minimum. »



Prenons pour exemple le cas où il s'agit de déterminer la position d'un point O par deux relèvements pris de deux points fixes M, M′ supposés parfaitement connus, les relèvements étant, au contraire, susceptibles d'erreurs qui doivent réagir sur la position du point O.

Soit pris ce point O pour origine, OM, GM′ pour axes obliques des x et des y; soient θ et θ' les relèvements qui fixent la position des droites MO, M′O : les angles étant pris avec le cercle répétiteur, le résultat moyen peut être considéré comme déduit d'un grand nombre d'observations. Soient h_θ, $h_{\theta'}$, les modules des erreurs qui peuvent avoir été commises sur ces angles : les valeurs de h_θ, $h_{\theta'}$, dépendent de l'exactitude de l'instrument et du nombre de fois que l'angle a été répété. Laplace a fait voir comment on peut alors *a posteriori* déterminer les valeurs de ces modules par une méthode générale, qui consiste à tenir compte des petits termes dont les équations de condition se trouvent en défaut. Ces détails sont étrangers à ce mémoire; nous supposerons h_θ et $h_{\theta'}$ connus, et nous ferons observer que l'on doit avoir $h_\theta = h_{\theta'}$, si l'on s'est servi en M du même instrument qu'en M′, et si les angles ont été répétés un même nombre de fois dans ces deux points différents.

Ceci posé, soient $\mathrm{MOM}' = \varphi$, $\mathrm{OM} = r$, $\mathrm{OM}' = r'$, et menons la droite Mo′ faisant avec MO l'angle $\mathrm{OMo}' = \delta\theta$: on aura

$$\delta x = 0, \qquad \delta y = \frac{r\delta\theta}{\sin.\varphi};$$

d'où

$$A = 0, \qquad A' = \frac{r}{\sin.\varphi},$$

A et A′ étant les premiers coefficients des équations (9). En faisant varier à son tour θ', on aurait trouvé

$$\delta y = 0, \qquad \delta x = \frac{r'\delta\theta'}{\sin.\varphi};$$

d'où

$$B = \frac{r'}{\sin.\varphi}, \qquad B' = 0.$$

On trouve ainsi

$$\alpha_0 = \frac{A^2}{h_\theta} + \frac{B^2}{h_{\theta'}} = \frac{r'^2}{h_{\theta'}\sin.^2\varphi}, \quad \alpha_1 = \frac{A'^2}{h_\theta} + \frac{B'^2}{h_{\theta'}} = \frac{r^2}{h_\theta \sin.^2\varphi}, \quad \beta_0 = 0. \tag{62}$$

Ainsi, en supposant, pour simplifier, que l'on ait $h_\theta = h_{\theta'}$, l'équation générale des ellipses de la formule (30) prend la forme

$$r^2x^2 + r'^2y^2 = D^2,$$

D étant une constante variable d'une ellipse à l'autre. Si l'on veut déterminer D par la condition que la surface de l'ellipse soit égale à l'unité, il faut poser

$$\pi \frac{D}{r}\frac{D}{r'}\sin.\varphi = 1;$$

d'où

$$D^2 = \frac{rr'}{\pi\sin.\varphi},$$

et l'on a pour équation de l'ellipse fondamentale en coordonnées obliques

$$r^2x^2 + r'^2y^2 = \frac{rr'}{\pi\sin.\varphi}. \tag{63}$$

Si maintenant l'on détermine par l'équation (42) le facteur $\alpha_0 + \alpha_1$ qui doit rendre la crainte mathématique un minimum, en observant que $\Sigma\frac{A_1^2}{h_m}$, $\Sigma\frac{A_1'^2}{h_m}$, $\Sigma\frac{A_1A_1'}{h_m}$ ont ici pour équivalents les quan-

tités α_0, α_1, β_0 des équations (62), on trouvera que ce facteur est égal à $\frac{r^2+r'^2}{h_\theta \sin.^2\varphi}$, et le point O sera déterminé avec la plus grande précision possible, si $\frac{r^2+r'^2}{\sin.^2\varphi}$ atteint la plus petite valeur dont il est susceptible. Le minimum absolu a lieu d'ailleurs pour le point $r = r'$, tang. $\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{2}$.

On peut employer la méthode suivante pour déterminer le grand axe de l'ellipse fondamentale. Soit OG cet axe inconnu, et soient GOM $= \lambda$, GOM' $= \lambda'$: nommons ξ les abscisses relatives à cet axe. Projetons perpendiculairement la variation Oo' sur cet axe OG; l'on aura

$$\delta\xi = Oo' \cos.\lambda' = \frac{r\cos.\lambda'}{\sin.\varphi}\,\delta\theta.$$

La variation de θ' introduit dans l'expression de $\delta\xi$ un terme analogue; ainsi la valeur complète de $\delta\xi$ est

$$\delta\xi = \frac{r\cos.\lambda'}{\sin.\varphi}\,\delta\theta + \frac{r'\cos.\lambda}{\sin.\varphi}\,\delta\theta'.$$

Le module, suivant l'axe des ξ, s'obtiendra par le procédé général qu'indique la formule (6) jointe à la première des équations (2), et l'on aura

$$\frac{1}{h_\xi} = \frac{1}{h_\theta}\,\frac{r^2\cos.^2\lambda' + r'^2\cos.^2\lambda}{\sin.^2\varphi}. \qquad (64)$$

Cette expression doit devenir un maximum pour le grand axe et un minimum pour le petit axe. Différentions le second membre, en faisant varier λ et λ' et observant que $\delta\lambda + \delta\lambda' = 0$: la condition cherchée sera

$$r^2 \sin.2\lambda' = r'^2 \sin.2\lambda.$$

Soit donc C le centre du cercle circonscrit à MOM', et soit i le point où ce cercle coupe l'axe inconnu OG : l'on aura

$$M'Ci = 2\lambda',\ MCi = 2\lambda; \qquad \sin.2\lambda' : \sin.2\lambda :: M'p : Mp,$$

p étant le point d'intersection de M'M et de Ci : donc

$$M'p : Mp :: r^2 : r'^2.$$

Si donc on partage la base M'M en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents, les extrémités i et l du diamètre, passant par le point p ainsi obtenu, fourniront, l'une un point du grand axe, l'autre un point du petit axe cherchés.

CAS GÉNÉRAL D'UN POINT DANS L'ESPACE.

Soient dans ce cas

$$\begin{aligned} x &= Am + Bn + Cp.. \\ y &= A'm + B'n + C'p.. \\ z &= A''m + B''n + C''p.. \end{aligned} \qquad (65)$$

les trois équations aux erreurs des coordonnées du point, et continuons à considérer le point comme origine des coordonnées.

Introduisons, comme dans le cas du plan, les variables $u..$, w qui, étant jointes à x, y, z, formeront un nombre total de variables dépendantes égal à celui des variables indépendantes; déduisons alors m, n, $p..$ en fonction de x, y, $z...$, et nous retomberons sur le double système des équations (12) et (13) déjà obtenues dans le cas du plan. La substitution des valeurs de m, n, $p..$ dans l'expression (11), et la transformation de l'élément différentiel $dm\,dn\,dp...$ nous ramènent à la formule (16), qu'il s'agit d'intégrer de $w=-\infty$ à $w=\infty$, et de même pour les autres variables, de manière à ne laisser finalement subsister que les trois variables x, y et z. Il est visible que la différentielle ainsi obtenue se présentera sous la forme

$$\frac{G}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-(ax^2+by^2+cz^2+2exy+2fxz+2gxz)}\,dx\,dy\,dz, \qquad (66)$$

qui est l'analogue de l'expression (18).

Il ne s'agit plus que de déterminer G, et les six coefficients

a, b, c, e, f, g. Nous continuerons à supposer

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0 &= \Sigma \frac{A^2}{h_m},\\ \alpha_1 &= \Sigma \frac{A'^2}{h_m},\\ \alpha_2 &= \Sigma \frac{A''^2}{h_m},\end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

et à ces équations nous ajouterons les suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\beta_2 &= \Sigma \frac{AA'}{h_m},\\ \beta_1 &= \Sigma \frac{AA''}{h_m},\\ \beta_0 &= \Sigma \frac{A'A''}{h_m}.\end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

Ceci posé, l'expression (66), intégrée de $z=-\infty$ à $z=+\infty$, en ayant égard à la valeur connue de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p+2rz+qz^2)}\,dz$, nous donne

$$\frac{G}{\pi\sqrt{c}}\, e^{-\frac{c(ax^2+by^2+2exy)-(fx+gy)^2}{c}}\,dx\,dy = \frac{G}{\pi\sqrt{c}}\, e^{-\left(\frac{ac-f^2}{c}x^2+2\frac{ec-fg}{c}xy+\frac{bc-g^2}{c}y^2\right)}\,dx\,dy, \qquad (69)$$

et cette formule doit être identiquement la même que le second membre de l'équation (29), en ayant soin de changer dans celle-ci β_0 en β_2.

De là résultent les équations de condition suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\frac{G}{\sqrt{c}} &= K,\\ K^2\alpha_1 &= \frac{ac-f^2}{c}\\ K^2\alpha_0 &= \frac{bc-g^2}{c}\\ K^2\beta_2 &= \frac{fg-ec}{c}\end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

A cause de $\alpha_0\alpha_1-\beta_2^2=\frac{1}{K^2}$, on en déduit

$$K^2 = \frac{(ac-f^2)(bc-g^2)-(fg-ec)^2}{c^2};$$

d'où

$$G^2 = cK^2 = abc + 2efg - ce^2 - bf^2 - ag^2, \qquad (71)$$

ce qui nous donne une première équation de condition.

Multiplions par $\frac{c}{G^2}$ les trois dernières équations (70), et formons pour α_2, β_0, β_1 des équations analogues à celles ainsi obtenues; il viendra

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{bc-g^2}{G^2}, & \beta_0 &= \frac{fe-gu}{G^2}, \\ \alpha_1 &= \frac{ac-f^2}{G^2}, & \beta_1 &= \frac{eg-fb}{G^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{ab-e^2}{G^2}, & \beta_2 &= \frac{gf-cc}{G^2}. \end{aligned} \qquad (72)$$

Formons avec ces équations les produits $\alpha_0\alpha_1 - \beta_2^2$, $\alpha_0\alpha_2 - \beta_1^2$, $\alpha_1\alpha_2 - \beta_0^2$, ainsi que les produits $\beta_0\beta_1 - \alpha_2\beta_2$, $\beta_0\beta_2 - \alpha_1\beta_1$, $\beta_1\beta_2 - \alpha_1\beta_0$: nous trouverons

$$\begin{aligned} a &= G^2(\alpha_1\alpha_2 - \beta_0^2), & e &= G^2(\beta_0\beta_1 - \alpha_2\beta_2), \\ b &= G^2(\alpha_0\alpha_2 - \beta_1^2), & f &= G^2(\beta_0\beta_2 - \alpha_1\beta_1), \\ c &= G^2(\alpha_0\alpha_1 - \beta_2^2), & g &= G^2(\beta_1\beta_2 - \alpha_0\beta_0). \end{aligned} \qquad (73)$$

L'équation en c ainsi obtenue ne diffère pas de celle qu'on eût pu déduire directement de l'équation $G^2 = cK^2$. Formons maintenant le terme $bc - g^2$; nous aurons, après des transformations pareilles à celles qui nous ont conduits à l'équation (71),

$$bc - g^2 = \alpha_0(\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 2\beta_0\beta_1\beta_2 - \alpha_0\beta_0^2 - \alpha_1\beta_1^2 - \alpha_2\beta_2^2)G^4, \qquad (74)$$

et cette équation, comparée à la première des équations (72), nous donnera

$$\frac{1}{G^2} = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 2\beta_0\beta_1\beta_2 - \alpha_0\beta_0^2 - \alpha_1\beta_1^2 - \alpha_2\beta_2^2, \qquad (75)$$

équation dont l'analogie avec l'équation (71) est remarquable.

Jointe aux équations (73), elle détermine entièrement les coefficients de la formule (66); mais on peut leur donner une autre forme, qui permette de reconnaître plus facilement leur mode de formation.

Nous avons déjà vu (éq. 27) que la quantité $\Sigma\frac{A^2}{h_m}\Sigma\frac{A'^2}{h_m}-\Sigma\frac{AA'}{h_m}$ étant développée se présentait sous la forme $\Sigma\frac{(AB'-A'B)^2}{h_m h_n}$. Si nous développons de même l'expression

$$-\beta_0\beta_1+\alpha_2\beta_2=-\Sigma\frac{A'A''}{h_m}\Sigma\frac{AA''}{h_m}+\Sigma\frac{A''^2}{h_m}\Sigma\frac{AA'}{h_m},$$

nous trouverons, toute réduction faite, que le résultat obtenu se présente sous la forme $\Sigma\frac{(A''B-AB'')(A''B'-A'B'')}{h_m h_n}$. Ainsi les valeurs de nos coefficients peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
a&=G^2\Sigma\frac{(A'B''-B'A'')^2}{h_m h_n}, & e&=-G^2\Sigma\frac{(A''B-AB'')(A''B'-A'B'')}{h_m h_n},\\
b&=G^2\Sigma\frac{(AB''-BA'')^2}{h_m h_n}, & f&=-G^2\Sigma\frac{(A'B-B'A)(A'B''-B'A'')}{h_m h_n},\\
c&=G^2\Sigma\frac{(AB'-BA')^2}{h_m h_n}, & g&=-G^2\Sigma\frac{(AB'-BA')(AB''-BA'')}{h_m h_n}.
\end{aligned}\qquad (76)$$

Quant à $\frac{1}{G^2}$, sa détermination, au moyen de l'équation (75), présente quelques difficultés à cause de la complication des calculs; mais on peut y arriver plus simplement par la considération suivante. La forme des valeurs connues de α_0, α_1, α_2, β_0, β_1, β_2 (éq. 67 et 68), prouve d'abord que tous les termes qui résultent du développement du second membre de l'équation (75) ne renferment, au plus, que des combinaisons ternaires des lettres A, B, C, D, E... Or, dans le cas où il n'existe que trois variables indépendantes et que trois lettres A, B, C, on sait que le changement de *dmdndp* en *dxdydz* introduit dans l'expression (16) le facteur $\frac{1}{(AB'C'')}$. On a donc dans ce cas

$$\frac{G}{\pi^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(AB'C'')}\sqrt{\frac{h_m}{\pi}\cdot\frac{h_n}{\pi}\cdot\frac{h_p}{\pi}};$$

d'où

$$\frac{1}{G^2} = \frac{\{(AB'C'')\}^2}{h_m h_n h_p};$$

nous croyons devoir rappeler que le symbole $(AB'C'')$ n'est que l'expression abrégée de

$$AB'C'' - AC'B'' + CA'B'' - BA'C'' + BC'A'' - CB'A''.$$

S'il existait quatre lettres A, B, C, D, le terme $\frac{\{(AB'C'')\}^2}{h_m h_n h_p}$ continuerait évidemment à exister dans le second membre de l'équation (75); mais, de plus, ce second membre renfermerait des termes analogues relatifs aux combinaisons (A, B, D), (A, C, D), (B, C, D). Il en serait de même pour le cas de cinq lettres, et ainsi de suite.

Donc on a, en général,

$$\frac{1}{G^2} = \Sigma \frac{\{(AB'C'')\}^2}{h_m h_n h_p}. \qquad (77)$$

Si l'on substitue cette valeur dans les équations (76) et si, pour abréger, on désigne les différentes *résultantes* (dans le sens donné à ce terme par Laplace) par les expressions symboliques $((A'B''))$, $((AB''))$, $((AB'))$, on mettra en évidence la loi des coefficients a, b, c, e, f, g. On trouvera ainsi

$$a = \frac{\Sigma \frac{1}{h_m h_n} ((A'B''))^2}{\Sigma \frac{1}{h_m h_n h_p} ((AB'C''))^2}, \qquad e = -\frac{\Sigma \frac{1}{h_m h_n} ((A''B))\,((A''B'))}{\Sigma \frac{1}{h_m h_n h_p} ((AB'C''))^2},$$

$$b = \frac{\Sigma \frac{1}{h_m h_n} ((AB''))^2}{\Sigma \frac{1}{h_m h_n h_p} ((AB'C''))^2}, \qquad f = -\frac{\Sigma \frac{1}{h_m h_n} ((A'B))\,((A'B''))}{\Sigma \frac{1}{h_m h_n h_p} ((AB'C''))^2}, \qquad (78)$$

$$c = \frac{\Sigma \frac{1}{h_m h_n} ((AB'))^2}{\Sigma \frac{1}{h_m h_n h_p} ((AB'C''))^2}, \qquad g = -\frac{\Sigma \frac{1}{h_m h_n} ((AB'))\,((AB''))}{\Sigma \frac{1}{h_m h_n h_p} ((AB'C''))^2}.$$

D'après cette loi de formation, qui se trouve vérifiée pour le cas de deux et de trois variables, il est probable que la même loi se continuerait dans le cas de quatre et même d'un nombre quelconque de variables. Je l'ai vérifié, en effet, pour le cas de quatre variables, et en partant de l'exponentielle

$$\frac{G}{\pi^2} e^{-(ax^2+by^2+cz^2+du^2+2exy+2fxz+2gxu+2hyz+2kyu+2lzu)},$$

l'on trouve

$$G^2 = abcd+2ahkl+2bfgl+2cegk+2defg-abl^2-ack^2-adh^2-bcg^2 \\ -bdf^2-cde^2-2efkl-2ehgl-2fhgk-g^2h^2-k^2f^2-l^2e^2,$$

et si dans cette équation l'on remplace a, b, c, d par α_0, α_1, α_2, α_3, etc. l'on aura aussi

$$\frac{1}{G^2} = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \text{etc...}$$

Cette dernière est l'analogue de l'équation (75), et la première est l'analogue de (71). Mais la démonstration générale de cette loi de formation m'est inconnue.

Posons maintenant

$$ax^2+by^2+cz^2+2exy+2fxz+2gyz = \text{const.}, \qquad (79)$$

et cette équation nous donnera une série d'ellipsoïdes, semblables entre eux, obtenus par la variation de la constante. Cette équation est du reste l'analogue de l'équation (30).

Pour simplifier, nous supposerons que l'on prenne pour axes coordonnés les axes principaux de ces ellipsoïdes, ce qui nous donne les conditions $e=0$, $f=0$, $g=0$, et, par suite,

$$\alpha_0\beta_0 = \beta_1\beta_2, \qquad \alpha_1\beta_1 = \beta_0\beta_2, \qquad \alpha_2\beta_2 = \beta_3\beta_1.$$

Des deux dernières on déduit $(\alpha_2\alpha_1-\beta_0^2)\beta_1\beta_2=0$, $a\beta_1\beta_2=0$.

Mais comme a ne peut être égal à zéro, il en résulte que l'un des deux facteurs β_1 et β_2 est nul. Soit donc $\beta_1 = 0$; nos équations de condition deviennent $\alpha_0\beta_0 = 0$, $\alpha_2\beta_2 = 0$; et, comme α_0, α_2 ne sauraient être nuls, on est en droit d'en conclure $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $G^2 = \frac{1}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$.

Donc aussi $a = G^2\alpha_1\alpha_2$, $b = G^2\alpha_0\alpha_2$, $c = G^2\alpha_0\alpha_1$, et la substitution de ces valeurs dans l'équation (79) la change en

$$\frac{x^2}{\alpha_0} + \frac{y^2}{\alpha_1} + \frac{z^2}{\alpha_2} = D. \tag{80}$$

C'est l'équation d'un de nos ellipsoïdes rapporté à ses trois axes principaux.

Soit V le volume de l'ellipsoïde représenté par l'équation (80), et posons

$$V^{\frac{2}{3}} = u. \tag{81}$$

La quantité u ainsi introduite sera proportionnelle à la surface de ces ellipsoïdes et, par suite, à la quantité D.

Or, si l'on forme le produit des carrés des trois axes principaux, et qu'on le multiplie par $(\frac{4}{3}\pi)^2$, on doit avoir le carré du volume V ou le cube de u.

Donc, en observant qu'ici $\frac{1}{G^2} = \alpha_0\alpha_1\alpha_2$,

$$u^3 = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 . D\alpha_0 . D\alpha_1 . D\alpha_2 = \left(\frac{4\pi}{3G}\right)^2 D^2.$$

On aura donc aussi

$$D = \left(\frac{3G}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} u. \tag{82}$$

Si dans la formule générale (66) nous remplaçons l'exposant par $ax^2 + by^2 + cz^2 = \frac{x^2}{\alpha_0} + \frac{y^2}{\alpha_1} + \frac{z^2}{\alpha_2} = D = \left(\frac{3G}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} u$, nous pour-

rons écrire, en conservant à la quantité ϖ une signification analogue à celle qu'elle a dans le cas du plan,

$$\frac{d^3\varpi}{dxdydz} = \frac{G}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-\left(\frac{3G}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} u}, \qquad (83)$$

ce qui montre que la probabilité différentielle est la même pour tous les points de la surface du même ellipsoïde, et varie de l'un à l'autre, suivant l'exponentielle de cette surface. Cette équation est l'analogue de l'équation (32).

Considérons maintenant un ellipsoïde infiniment voisin. La tranche courbe qui sépare ces deux ellipsoïdes a pour valeur la variation de V : or $dV = \frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} du$, et nous aurons

$$\frac{d\varpi}{du} = \frac{3G}{2\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-\left(\frac{3G}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} u} u^{\frac{1}{2}}, \qquad (84)$$

équation analogue à (83), mais qui n'est pas intégrable sous forme finie. Ainsi la probabilité pour que le point vrai tombe dans l'intérieur de nos ellipsoïdes coordonnés ne peut être obtenue sous forme algébrique.

Les équations de nos ellipsoïdes étant écrites sous la forme,

$$\frac{x^2}{\alpha_0} + \frac{y^2}{\alpha_1} + \frac{z^2}{\alpha_2} = \left(\frac{3G}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} u, \qquad (85)$$

celle de l'ellipsoïde *fondamental*, dont le volume est égal à 1, s'obtiendra en faisant $u = 1$, et l'on aura

$$\frac{x^2}{\alpha_0} + \frac{y^2}{\alpha_1} + \frac{z^2}{\alpha_2} = \left(\frac{3G}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}. \qquad (86)$$

Soit maintenant R un rayon vecteur quelconque, correspondant au point (x, y, z), et soit r la portion de ce rayon vecteur interceptée dans l'ellipsoïde fondamental, on aura, en général,

$$R = r u^{\frac{1}{2}}. \qquad (87)$$

Concevons maintenaint un cône quelconque infiniment petit, mais indéfini, ayant son sommet à l'origine des coordonnées; la portion de ce cône, interceptée par une sphère de rayon R, sera de la forme $i\mathrm{R}^3$, i étant une quantité infiniment petite, indépendante de R et dépendante seulement de la surface que ce cône intercepte sur la sphère dont le rayon est égal à l'unité. En concevant de la sorte une série de sphères infiniment voisines l'une de l'autre, le cône se trouve décomposé en éléments de la forme $id\mathrm{R}^3 = 3i\mathrm{R}^2 d\mathrm{R}$; mais à cause de l'équation (87), qui donne $\mathrm{R}^2 = r^2 u^{\frac{2}{3}}$, $3\mathrm{R}^2 d\mathrm{R} = \frac{3}{2} r^2 u^{\frac{1}{3}} du$: ainsi $\frac{3}{2} i r^3 u^{\frac{1}{3}} du$ mesure le volume d'un de ces éléments. En le multipliant par la probabilité correspondante, tirée de l'équation (83), et intégrant de $u = 0$ à $u = \infty$, on aura la probabilité relative au cône supposé indéfini, et, toute réduction faite, cette probabilité devient égale à ir^3, c'est-à-dire au volume que le cône intercepte dans l'ellipsoïde fondamental, propriété analogue à celle déjà obtenue dans le cas du plan.

On peut arriver au même résultat par un autre ordre de considérations. Pour cela, considérons l'expression différentielle générale

$$\frac{\mathrm{G}}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-(ax^2+by^2+cz^2)} dx\,dy\,dz;$$

soit $x = hz$, $y = kz$, et proposons-nous de déterminer la probabilité relative à la pyramide comprise entre les plans $x = hz$, $x = (h+dh)z$ d'une part, et $y = kz$, $y = (k+dk)z$ de l'autre. Posons donc

$$x = hz,\quad y = kz,\quad dx = z\,dh,\quad dy = z\,dk,$$

et intégrons de $z = 0$ à $z = \infty$ la formule

$$\frac{\mathrm{G}}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-(ah^2+bk^2+c)z^2} z^2 dz\,dh\,dk.$$

Par suite de $\int_0^\infty e^{-t^2} t^2 dt = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$, nous trouverons

$$\frac{G}{4\pi}(ah^2 + bk^2 + c)^{-\frac{3}{2}} dh\,dk.$$

Soient maintenant x, y, z les coordonnées du point où le cône rencontre l'ellipsoïde fondamental; on aura

$$ah^2 + bk^2 + c = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{3G}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}},$$

à cause de l'équation (86). La substitution de cette valeur change la probabilité relative au cône en $\frac{1}{3} z^3\, dh\,dk$.

D'un autre côté, prenons l'intégrale du volume $dx\,dy\,dz = z^2 dz\,dh\,dk$ de $z = 0$ à $z = z$, et nous trouverons $\frac{1}{3} z^3 dh\,dk$ pour le volume que le cône intercepte dans l'ellipsoïde fondamental, expression identique avec la précédente.

CAS DES AXES OBLIQUES.

Les valeurs générales de a, b, c, e, f, g, G (éq. 76, 77 et 78) resteraient identiquement les mêmes dans le cas des axes obliques, puisque les considérations qui nous ont conduits à ces valeurs sont indépendantes des angles des axes entre eux : toutefois, il est essentiel de remarquer que, dans ce cas, $dx\,dy\,dz$ ne représente plus la mesure de l'élément de volume intercepté entre les plans $x = x$, $x = x + dx$, $y = y$, $y = y + dy$, $z = z$, $z = z + dz$, et que cet élément a besoin d'être multiplié par un facteur convenable dépendant de ces angles.

Si nous formons maintenant, dans l'équation générale

$$a_1 x_1^2 + b_1 y_1^2 + c_1 z_1^2 + 2e_1 x_1 y_1 + 2f_1 x_1 z_1 + 2g_1 y_1 z_1 = D,$$

la somme des carrés de trois demi-diamètres conjugués, la somme ainsi obtenue doit être constante et égale à la somme des carrés

des trois axes principaux, qui est représentée par $D(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$, comme le prouve l'équation (80).

Soient donc φ l'angle formé par les axes des x_1 et des y_1; ψ celui des x_1 et des z_1; χ celui des y_1 et des z_1. Le plan des x_1y_1 détermine dans l'ellipsoïde une section ayant pour équation

$$a_1x_1^2 + 2e_1x_1y_1 + b_1y_1^2 = D,$$

et telle que la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués a pour valeur, comme nous l'avons déjà vu, $\frac{D(a_1 + b_1 - 2e_1\cos.\varphi)}{a_1b_1 - e_1^2}$.

Il reste à trouver le troisième demi-diamètre conjugué : soient x_1, y_1, z_1 ses coordonnées extrêmes, R_1 sa longueur. On a

$$R_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2x_1y_1\cos.\varphi + 2x_1z_1\cos.\psi + 2y_1z_1\cos.\chi.$$

L'équation de l'ellipsoïde, différentiée en faisant $dz_1 = 0$, conduit aux deux relations

$$a_1x_1 + e_1y_1 + f_1z_1 = 0$$
$$b_1y_1 + e_1x_1 + g_1z_1 = 0.$$

Et si l'on nomme α'_0, α'_1, α'_2, β'_0, β'_1, β'_2, ce que deviennent pour nos axes obliques les premiers membres des équations (72), on trouve

$$\frac{x_1}{\beta'_1} = \frac{y_1}{\beta'_0} = \frac{z_1}{\alpha'_2} = \sqrt{\frac{D}{\alpha'_2}} = \sqrt{\frac{R_1^2}{\beta'^2_1 + \beta'^2_0 + \alpha'^2_2 + 2\beta'_1\beta'_0\cos.\varphi + 2\beta'_1\alpha'_2\cos.\psi + 2\beta'_0\alpha'_2\cos.\chi}},$$

d'où

$$R_1^2 = D\left(\alpha'_2 + 2\beta'_1\cos.\psi + 2\beta'_0\cos.\chi + \frac{\beta'^2_1 + \beta'^2_0 + 2\beta'_1\beta_0\cos.\varphi}{\alpha'_2}\right).$$

Ajoutant à cette formule la quantité

$$\frac{D(a_1 + b_1 - 2e_1\cos.\varphi)}{a_1b_1 - e_1^2} = D\left\{\frac{(\alpha'_1\alpha'_2 - \beta'^2_0) + (\alpha'_0\alpha'_2 - \beta'^2_1) + 2(\alpha'_2\beta'_2 - \beta'_0\beta'_1)\cos.\varphi}{\alpha'_2}\right\},$$

on trouvera, toute réduction faite,

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha'_0 + \alpha'_1 + \alpha'_2 + 2\beta'_2\cos.\varphi + 2\beta'_1\cos.\psi + 2\beta'_0\cos.\chi, \qquad (88)$$

qui est l'analogue de l'équation (42), et permet de trouver la valeur $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$, relative aux trois axes principaux, lorsqu'on a employé un système d'axes obliques quelconques pour système primordial.

Soit maintenant un axe quelconque, faisant avec les trois axes principaux de l'ellipsoïde les angles φ, ψ et χ; soit ξ l'abscisse, suivant ce nouvel axe, et soit x, y, z un point quelconque : on aura

$$\xi = x\cos.\varphi + y\cos.\psi + z\cos.\chi;$$

donc

$$\xi = (\mathrm{A}\cos.\varphi + \mathrm{A}'\cos.\psi + \mathrm{A}''\cos.\chi)m + (\mathrm{B}\cos.\varphi + \mathrm{B}'\cos.\psi + \mathrm{B}''\cos.\chi)n + \text{etc.} \qquad (89)$$

C'est l'équation aux erreurs relative à ce nouvel axe.

Si, eu égard à l'équation (6), on forme la valeur du module $\frac{1}{h_\xi}$, en observant que $\Sigma \frac{\mathrm{AA}'}{h_m} = 0$, $\Sigma \frac{\mathrm{AA}''}{h_m} = 0$, $\Sigma \frac{\mathrm{A}'\mathrm{A}''}{h_m} = 0$, on aura

$$\frac{1}{h_\xi} = \cos.^2\varphi \Sigma \frac{\mathrm{A}^2}{h_m} + \cos.^2\psi \Sigma \frac{\mathrm{A}'^2}{h_m} + \cos.^2\chi \Sigma \frac{\mathrm{A}''^2}{h_m} = \alpha_0 \cos.^2\varphi + \alpha_1 \cos.^2\psi + \alpha_2 \cos.^2\chi.$$

Soit maintenant (x, y, z) un point pris sur l'axe des ξ à une distance ρ de l'origine, et de telle sorte qu'on ait

$$\alpha_0 x^2 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 z^2 = 1; \qquad (90)$$

on aura évidemment

$$h_\xi = \rho^2. \qquad (91)$$

Ainsi les modules relatifs aux divers axes se mesurent par les carrés des rayons vecteurs interceptés dans l'ellipsoïde dont (90) représente l'équation, et dont les axes principaux coïncident en direction avec ceux de l'ellipsoïde fondamental, mais sont, quant à la grandeur, en raison inverse des axes de ce dernier ellipsoïde.

Les *maxima* et *minima* des modules correspondent donc aux axes principaux de l'ellipsoïde fondamental.

On peut établir les coordonnées polaires d'un point quelconque de l'espace au moyen de l'angle θ que forme un axe fixe avec la projection du rayon vecteur sur un plan fixe renfermant cet axe, au moyen de l'angle ω que forme ce rayon vecteur avec sa projection, enfin au moyen du rayon vecteur lui-même R, ou au moyen du paramètre u lié à R par l'équation (87). L'élément de volume se trouve alors représenté par $\mathrm{R}^2\cos.\omega d\mathrm{R}d\omega d\theta$, ou encore par

$$\tfrac{1}{2}r^3u^{\frac{1}{2}}\cos.\omega d\omega d\theta du. \tag{93}$$

Le passage des coordonnées rectilignes aux coordonnées polaires se fera par le moyen des équations

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{R}\cos.\omega\cos.\theta, \\ y &= \mathrm{R}\cos.\omega\sin.\theta, \\ z &= \mathrm{R}\sin.\omega. \end{aligned} \tag{94}$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'équation (86), en changeant R en r, il viendra

$$r = \left(\frac{3\mathrm{G}}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\cos.^2\omega\cos.^2\theta}{\alpha_0} + \frac{\cos.^2\omega\sin.^2\theta}{\alpha_2} + \frac{\sin.^2\omega}{\alpha_2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{95}$$

Substituons cette valeur de r dans (93), et multiplions-la par la probabilité relative à cet élément, déduite de l'équation (83); nous aurons la formule générale

$$\frac{d^3\varpi}{du d\theta d\omega} = \frac{3\mathrm{G}^2}{8\pi^{\frac{5}{2}}} \left\{\left(\frac{\cos.^2\theta}{\alpha_0} + \frac{\sin.^2\theta}{\alpha_1}\right)\cos.^2\omega + \frac{\sin.^2\omega}{\alpha_2}\right\}^{-\frac{5}{2}} \cos.\omega\ c^{-\left(\frac{3\mathrm{G}}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}u}u^{\frac{1}{2}}. \tag{96}$$

Cette expression n'est point intégrable relativement à u : intégrée relativement à θ, elle conduit à une fonction elliptique; mais

elle peut s'intégrer algébriquement relativement à ω, et en prenant pour limites $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$, on trouve

$$= \frac{3G^3 \alpha_2^{\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{3G}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} u} u^{\frac{1}{2}}}{8\pi^{\frac{5}{2}} \left(\frac{\cos.^2\theta}{\alpha_0} + \frac{\sin.^2\theta}{\alpha_1}\right)} \left\{ \text{sin. arc. tang.} = \frac{-\text{tang.}\,\omega_2}{\left(\frac{\alpha_2 \cos.^2\theta}{\alpha_0} + \frac{\alpha_2 \sin.^2\theta}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}} - \text{sin. arc tang.} = \frac{\text{tang.}\,\omega_1}{\left(\frac{\alpha_2 \cos.^2\theta}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2 \sin.^2\theta}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \right\}, \quad (97)$$

ω_1 et ω_2 étant des fonctions de u et θ déterminées par les surfaces courbes qui terminent l'espace considéré; le reste de l'intégration s'effectuera par la méthode ordinaire des cubatures.

L'équation (97) est relative à l'élément intercepté entre deux ellipsoïdes très-voisins, deux plans très-voisins passant par l'axe des z, et, d'autre part, deux cônes droits ayant pour axe l'axe des z et pour équations $\omega = \omega_1$, $\omega = \omega_2$.

Je prendrai, pour exemple, le cas déjà examiné sur un plan de deux mobiles de directions et de vitesses données; je supposerai maintenant que ces deux corps se meuvent dans l'espace, et, pour fixer les idées, je considérerai la terre et une comète, en faisant abstraction des perturbations mutuelles que ces deux astres, passant à petite distance, doivent exercer l'un sur l'autre. Considérons la terre comme fixe; la comète, dans son mouvement géocentrique, décrira un arc très-peu différent d'une ligne droite, et pourra être supposée, sans erreur dans l'estimation des probabilités, se mouvoir indéfiniment suivant la tangente rectiligne de cet arc. Proposons-nous de trouver la probabilité pour que cet astre passe à une distance de la terre moindre qu'une longueur donnée ρ.

Il faut concevoir alors que la terre, outre les incertitudes propres aux éléments de son orbite, doit aussi être affectée des incertitudes propres aux éléments qui fixent à chaque instant la position de la comète. D'après ce principe, on construira les équations aux erreurs du centre de la terre, et ces équations seront les analogues des équations (53). Il restera alors à déterminer la probabilité pour que le centre de la terre soit situé dans l'inté-

rieur d'un cylindre droit, dont le rayon est ρ et dont l'axe est précisément la tangente de la trajectoire géocentrique de la comète.

On mènera par le centre de la terre, pris pour origine, une droite parallèle à cet axe; cette droite sera prise pour l'axe des z, et son plan normal pour plan des xy : ce plan coupera le cylindre droit, suivant un cercle de rayon ρ. La droite, qui joint son centre à l'origine, sera prise pour axe des x, et l'on construira les équations aux erreurs de position de la terre

$$x = \Sigma \mathrm{A} m \quad - \Sigma \mathrm{A}_1 m_1,$$
$$y = \Sigma \mathrm{A}' m \quad - \Sigma \mathrm{A}'_1 m_1.$$

L'équation en z nous est inutile; car la probabilité cherchée pour que le point (x, y, z) qui représente la vraie position du centre de la terre relativement à la trajectoire de la comète, soit situé dans le cylindre, est égale à la probabilité que le point (x, y) soit situé dans le cercle trace du cylindre sur le plan des xy.

Les valeurs calculées de $\Sigma \frac{\mathrm{A}^2}{h_m}$, $\Sigma \frac{\mathrm{A}'^2}{h_m}$, $\Sigma \frac{\mathrm{A}\mathrm{A}'}{h_m}$ donneront les valeurs des coefficients a, b, e, K, qui entrent implicitement dans la formule (50); on nommera g la distance de l'origine au centre du cercle, et la formule (50) donnera la probabilité cherchée.

Du reste, dans la pratique, et pour la détermination rigoureuse de cette probabilité, il serait indispensable d'avoir égard aux mutuelles perturbations de ces astres, ce qui, sans doute, compliquerait beaucoup la question; de plus, pour que le problème que nous venons de traiter ait un sens véritable, il faut supposer aussi que la distance à laquelle la comète doit passer de la terre est de l'ordre des erreurs que comporte la détermination de la position géocentrique de la comète, erreurs que l'on ne saurait pas estimer plus petites que la valeur du rayon de l'orbite lunaire.

CRAINTE MATHÉMATIQUE.

Pour obtenir la *crainte mathématique* de l'erreur de la situation du point, il faut multiplier par $R = ru^{\frac{1}{2}}$ le produit de (93) par le second membre de l'équation (83), et intégrer ce nouveau produit dans toute l'étendue de l'espace. On trouve, pour l'expression différentielle de cette crainte mathématique,

$$\frac{G}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{3G}{4\pi}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\cos.\omega\, e^{-\left(\frac{3G}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}u}\, u\,du\,d\theta\,d\omega}{\left(\left(\frac{\cos.^2\theta}{\alpha_0}+\frac{\sin.^2\theta}{\alpha_1}\right)\cos.^2\omega+\frac{\sin.^2\omega}{\alpha_2}\right)^2}, \tag{98}$$

expression qui, intégrée de $u=0$ à $u=\infty$, donne

$$\frac{G}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{\cos.\omega\, d\omega\, d\theta}{\left(\left(\frac{\cos.^2\theta}{\alpha_0}+\frac{\sin.^2\theta}{\alpha_1}\right)\cos.^2\omega+\frac{\sin.^2\omega}{\alpha_2}\right)^2}; \tag{99}$$

c'est la crainte mathématique relative à une pyramide infiniment petite, mais indéfinie, et dont le sommet est à l'origine.

Si l'on intègre maintenant, par rapport à ω, de $\omega=-\frac{\pi}{2}$ à $\omega=\frac{\pi}{2}$, on aura la crainte mathématique relative au fuseau indéfini compris entre deux plans infiniment voisins, et passant tous les deux par l'axe des z. L'intégrale dépend d'un arc de cercle ou d'un logarithme, selon que l'on a $\alpha_2<\alpha_1<\alpha_0$ ou $\alpha_2>\alpha_1>\alpha_0$; selon que l'axe des z est le plus petit ou le plus grand des trois axes principaux de l'ellipsoïde fondamental. Je supposerai, ce qui est permis, que cet axe soit le plus petit des trois.

On écrira

$$\cos.^2\psi=\alpha_2\left(\frac{\cos.^2\theta}{\alpha_0}+\frac{\sin.^2\theta}{\alpha_1}\right),$$

et la formule (99) deviendra

$$\frac{G}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{\alpha_2^3\cos.\omega\,d\omega\,d\theta}{(\cos.^2\psi+\sin.^2\psi\sin.^2\omega)^2}=\frac{G\alpha_2^3 d\theta}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\text{séc.}^4\psi\,d\sin.\omega}{(1+\text{tang.}^2\psi\sin.^2\omega)^2}.$$

On intégrera de $\omega=-\frac{\pi}{2}$ à $\omega=\frac{\pi}{2}$; ce qui revient, en posant sin. $\omega=t$, à déterminer l'intégrale $\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{(1+b^2t^2)^2}$. Or on a

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{(1+b^2t^2)^2}=\frac{1}{1+b^2}+\frac{\text{arc tang. }b}{b},$$

et si l'on pose $b=\text{tang.}\,\psi$, elle devient égale à $\cos.^2\psi+\psi\cot.\psi$. Donc l'expression de la crainte relative au fuseau infiniment petit a pour valeur

$$\frac{G\alpha_2^2}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d\theta}{\cos.^2\psi}+\frac{\psi d\theta}{\sin.\psi\cos.^3\psi}\right). \qquad (100)$$

Enfin, pour avoir la crainte mathématique relative à la totalité de l'espace, il faudrait intégrer cette expression de $\theta=0$ à $\theta=2\pi$. L'intégrale $\int\frac{d\theta}{\cos.^2\psi}$ n'offre aucune difficulté; mais il n'en est pas de même de l'intégrale $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\psi d\theta}{\sin.\psi\cos.^3\psi}$. On peut seulement simplifier cette dernière, en observant que

$$\frac{d\theta}{\sin.\psi\cos.\psi}=\frac{d\psi}{\sqrt{\left(\cos.^2\psi-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}-\cos.^2\psi\right)}},$$

et que la difficulté de l'intégration est ramenée à la quadrature

$$\int\frac{\psi d\psi}{\cos.^2\psi\sqrt{\left(\cos.^2\psi-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}-\cos.^2\psi\right)}},$$

l'intégrale étant prise entre les limites $\cos.^2\psi = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\cos.^2\psi = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$.

Dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, nous pouvons poser $\alpha_1 = \alpha_0$; on a alors $\cos.^2\psi = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$, ψ devient une quantité constante, et la formule (100), intégrée de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$, se change en

$$\frac{G}{\pi^{\frac{1}{2}}}\left(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_0^2\alpha_2^{\frac{1}{2}}(\alpha_0-\alpha_2)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{arc}\left(\cos.^2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right)\right). \qquad (101)$$

Enfin, dans le cas de la sphère, on a $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$: ψ devient nul; $\frac{1}{\cos.^2\psi}$ devient égal à 1; $\frac{\psi}{\sin.\psi\cos.^2\psi}$ devient aussi égal à 1. La formule (100) se présente donc sous la forme $\frac{G\alpha_0^2}{\pi^{\frac{3}{2}}}d\theta = \frac{\alpha_0^{\frac{1}{2}}d\theta}{\pi^{\frac{3}{2}}}$, à cause de $G^2 = \frac{1}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$, et la crainte mathématique totale a pour valeur

$$\frac{2\alpha_0^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}. \qquad (102)$$

Du reste, la crainte mathématique totale peut être considérée comme égale à la surface d'un ellipsoïde. Pour le prouver, reprenons l'expression générale de la probabilité différentielle mise sous la forme

$$G\pi^{-\frac{3}{2}}e^{-\left(\frac{x^2}{\alpha_0}+\frac{y^2}{\alpha_1}+\frac{z^2}{\alpha_2}\right)}dx\,dy\,dz.$$

Multiplions-la par $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, et posons $x = hz$, $y = kz$: différentions ces deux dernières équations, en y supposant z constant, et remplaçons x, y, dx, dy par leurs valeurs; il viendra

$$G\pi^{-\frac{3}{2}}(1+h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}e^{-z^2\left(\frac{h^2}{\alpha_0}+\frac{k^2}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)}z^3\,dz\,dh\,dk.$$

Intégrons cette expression de $z = 0$ à $z = \infty$; elle se change en

$$\frac{1}{2} G \pi^{-\frac{3}{2}} \frac{(1 + h^2 + k^2)^{\frac{1}{2}} \, dh \, dk}{\left(\frac{h^2}{\alpha_0} + \frac{k^2}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right)^2}. \qquad (103)$$

En prenant de nouvelles intégrales de $h = 0$ à $h = \infty$ et de $k = 0$ à $k = \infty$, on aura la crainte mathématique relative à la portion de l'espace qui correspond aux coordonnées positives, et par conséquent le huitième de la crainte mathématique totale.

Considérons maintenant l'équation générale d'un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Cette équation différentiée donne

$$dz = -\frac{c^2 x}{a^2 z} dx - \frac{c^2 y}{b^2 z} dy;$$

ainsi l'élément différentiel de la surface de cet ellipsoïde a pour valeur

$$\left(\frac{c^4 x^2}{a^4 z^2} + \frac{c^4 y^2}{b^4 z^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} dx \, dy. \qquad (104)$$

Dans cette expression, z doit être considéré comme une fonction de x et de y donnée par l'équation de l'ellipsoïde. Pour intégrer cette expression relativement à la portion de surface qui correspond aux x, y, z positifs, on posera

$$x = \mu z,$$
$$y = \nu z,$$

et par conséquent

$$\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{z^2};$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} r &= \mu \left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ y &= \nu \left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (105)$$

Le coefficient de $dx\,dy$, dans la formule (104), se change ainsi en $c^2\left(\frac{\mu^2}{a^4}+\frac{\nu^2}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}$. On changera ensuite $dx\,dy$ en $d\mu\,d\nu$ au moyen de l'équation

$$dx\,dy=\left(\frac{dx}{d\mu}\frac{dy}{d\nu}-\frac{dy}{d\mu}\frac{dx}{d\nu}\right)d\mu\,d\nu,$$

et toute réduction faite, on trouvera

$$dx\,dy=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{-2}d\mu\,d\nu. \tag{106}$$

Ainsi l'élément différentiel de surface devient

$$\frac{\left(\frac{\mu^2}{a^4}+\frac{\nu^2}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}d\mu\,d\nu}{\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2};$$

mais puisque nous devons intégrer de $\mu=0$ à $\mu=\infty$, de $\nu=0$ à $\nu=\infty$, on peut, sans changer les limites, écrire

$$\mu=\frac{a^2h}{c^2},\qquad \nu=\frac{b^2k}{c^2},\qquad d\mu\,d\nu=\frac{a^2b^2}{c^4}dh\,dk,$$

et la surface cherchée sera représentée par la formule

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{a^2b^2c^2\left(1+h^2+k^2\right)^{\frac{1}{2}}dh\,dk}{\left(a^2h^2+b^2k^2+c^2\right)^2}; \tag{107}$$

et si nous posons $a^2=\frac{l}{\alpha_0}$, $b^2=\frac{l}{\alpha_1}$, $c^2=\frac{l}{\alpha_2}$, l étant un coefficient à déterminer, elle devient

$$\frac{l}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\left(1+h^2+k^2\right)^{\frac{1}{2}}dh\,dk}{\left(\frac{h^2}{\alpha_0}+\frac{k^2}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)^2}, \tag{108}$$

expression qui coïncidera avec l'intégrale de (103), si l'on pose

$$\frac{l}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = \tfrac{1}{2}\,G\pi^{-\frac{3}{2}}v,$$

v étant l'unité de mesure linéaire; d'où

$$l = \tfrac{1}{2}v\sqrt{\frac{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}{\pi^3}}.$$

La substitution des valeurs de a^2, b^2, c^2 dans l'équation de l'ellipsoïde change celle-ci en

$$\alpha_0x^2 + \alpha_1y^2 + \alpha_2z^2 = \tfrac{1}{2}v\pi^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}. \qquad (110)$$

La surface totale de cet ellipsoïde est évidemment égale à la crainte mathématique cherchée, puisque le huitième de sa surface égale le huitième de la crainte mathématique totale.

On remarquera que cet ellipsoïde est semblable à l'ellipsoïde (90), dont les carrés des rayons vecteurs nous donnaient les divers modules des erreurs.

Dans le cas du plan, nous savons que l'ellipsoïde, dont la surface mesure ici la crainte mathématique, est remplacé par une ellipse dont l'équation peut s'écrire

$$\alpha_0x^2 + \alpha_1y^2 = \frac{1}{16}\frac{\alpha_0\alpha_1}{\pi}; \qquad (111)$$

mais cette dernière ellipse, par le simple changement de x en y et de y en x, prend la forme $\frac{x^2}{\alpha_0} + \frac{y^2}{\alpha_1} = \text{const.}$, ce qui est l'équation générale de nos ellipses coordonnées; ainsi, elle leur est semblable, quoique non semblablement placée. Il n'en est plus ainsi dans l'espace, et l'ellipsoïde (110) n'est pas semblable aux ellipsoïdes coordonnés fournis par l'équation (80), sauf dans le cas où les trois axes formeraient une progression géométrique.

Si nous nous étions proposé d'obtenir la crainte mathématique du carré de l'erreur, il aurait fallu calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G\pi^{-\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{x^2}{\alpha_0}+\frac{y^2}{\alpha_1}+\frac{z^2}{\alpha_2}\right)} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz;$$

si, comme nous l'avons déjà fait dans le cas du plan, nous intégrons par décomposition, en observant que $G = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}$ et que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \pi^{\frac{1}{2}}$, nous trouverons qu'elle se réduit à

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2).$$

Si l'on rapproche ce résultat de la valeur $\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)$ obtenue dans le cas du plan, et de la valeur $\frac{1}{2}\alpha_0$ obtenue dans le cas d'une ligne droite, on reconnaît facilement la loi très-simple que suit cette crainte mathématique. Pour obtenir celle relative au cas du plan, on doit ajouter les craintes mathématiques propres à chacun des deux axes coordonnés rectangulaires, considérés chacun à son tour isolément; pour obtenir celle relative à l'espace, on doit faire la somme des craintes mathématiques relatives à chacun des trois axes coordonnés.

Ainsi, lorsqu'il s'agira de fixer, avec le plus de précision possible, la position d'un point dans l'espace, il sera avantageux de disposer de l'arbitraire que peuvent laisser les circonstances de l'observation, de manière à rendre la somme $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$ aussi petite que possible, ce qui, toutes choses égales d'ailleurs, diminuera la possibilité des erreurs de situation du point cherché. Dans le cas d'axes coordonnés obliques, la quantité $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$ se déduira immédiatement des équations (65) au moyen de l'équation (88).

NOTE.

La note actuelle a pour objet les relations du double système que forment les équations (12) et les équations (13). A la vérité, la forme qu'affectent les coefficients de l'un de ces systèmes, exprimés au moyen des coefficients de l'autre système, est connue par la théorie générale de l'élimination entre les équations du premier degré; mais en outre leurs expressions, fort compliquées dans le cas d'un nombre un peu considérable d'équations, affectent dans leurs combinaisons mutuelles des lois remarquables, capables de conduire à des résultats simples et généralement fort symétriques.

Pour plus de clarté, je me bornerai d'abord au cas de quatre équations à quatre inconnues m, n, p, q, ce nombre étant suffisant pour mettre en évidence la loi relative à un nombre quelconque d'inconnues. Nous écrirons

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= a_0 m + b_0 n + c_0 p + d_0 q \\ x_1 &= a_1 m + b_1 n + c_1 p + d_1 q \\ x_2 &= a_2 m + b_2 n + c_2 p + d_2 q \\ x_3 &= a_3 m + b_3 n + c_3 p + d_3 q \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(A)}$$

Si avec les lettres a, b, ou avec les lettres a, b, c ou etc.., on forme toutes les permutations possibles de ces lettres, qu'on les affecte après coup de leurs indices 0, 1 ou 0, 1, 2 ou etc., rangés dans l'ordre naturel, et que l'on ajoute ensemble les divers termes avec des signes alternativement positifs et négatifs, il en résulte des expressions de la forme

$$a_0 b_1 - b_0 a_1, \qquad a_0 b_1 c_2 - a_0 c_1 b_2 + c_0 a_1 b_2 - b_0 a_1 c_2 + b_0 c_1 a_2 - c_0 b_1 a_2, \text{ etc.},$$

qui ne sont autres que les dénominateurs communs résultant de la théorie générale de l'élimination. Bezout a donné une règle

simple pour les former, de manière que la véritable alternance des signes soit toujours observée.

Laplace nomme *résultantes* les expressions ci-dessus, et les représente sous la forme symbolique (a_0b_1), $(a_0b_1c_2)$. Il démontre (*Mém. Acad. des sciences*, 1772), 1° que, si l'on change une résultante telle que $(a_0b_1c_2)$ en une autre telle que $(b_0a_1c_2)$ qui en diffère par l'interversion de deux lettres successives, la valeur absolue reste la même dans ce changement, la résultante changeant seulement de signe; 2° que l'on peut former une résultante, telle que $(a_0b_1c_2d_3e_4)$ par exemple, au moyen de la somme

$$(a_0b_1c_2d_3)e_4 - (a_0b_1c_2d_4)e_3 + (a_0b_1c_3d_4)e_2 - \text{etc...},$$

ou encore au moyen de la somme

$$a_0(b_1c_2d_3e_4) - a_1(b_0c_2d_3e_4) + a_2(b_0c_1d_3e_4) - \text{etc...},$$

sommes dans lesquelles on doit avoir soin d'observer l'alternance des signes, et dont la loi de formation est du reste évidente.

Ceci posé, combinons ensemble la première et la seconde des équations (A), de manière à éliminer q; combinons de même la première et la troisième, de manière à éliminer q; puis la première et la quatrième, et ainsi de suite, de manière à épuiser toutes les combinaisons binaires; nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
x_0d_1 - x_1d_0 &= (x_0d_1) = (a_0d_1)m + (b_0d_1)n + (c_0d_1)p \\
x_0d_2 - x_2d_0 &= (x_0d_2) = (a_0d_2)m + (b_0d_2)n + (c_0d_2)p \\
x_0d_3 - x_3d_0 &= (x_0d_3) = (a_0d_3)m + (b_0d_3)n + (c_0d_3)p \\
x_1d_2 - x_2d_1 &= (x_1d_2) = (a_1d_2)m + (b_1d_2)n + (c_1d_2)p \\
x_1d_3 - x_3d_1 &= (x_1d_3) = (a_1d_3)m + (b_1d_3)n + (c_1d_3)p \\
x_2d_3 - x_3d_2 &= (x_2d_3) = (a_2d_3)m + (b_2d_3)n + (c_2d_3)p
\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(B)}$$

Si l'on eût éliminé p au lieu de q, l'on aurait eu des équations pareilles, dans lesquelles la lettre c aurait joué le rôle que joue ici la lettre d relative à la variable éliminée.

Proposons-nous maintenant d'éliminer p à son tour et de former

une équation renfermant les variables x_0, x_1, x_2, m et n. L'élimination peut se faire, soit entre la première et la seconde des équations (B), soit entre la première et la quatrième, soit entre la seconde et la quatrième. Le premier de ces couples ne fournit qu'un terme en x_1 et un terme en x_2. L'équation provenant du second renferme une seule fois les variables x_0 et x_2; celle provenant du second couple renferme une seule fois x_0 et une seule fois x_1. Considérons, dans la dernière de ces équations, la forme des termes en x_0, x_1 : après l'élimination de p, l'on trouve

$$+ x_0 d_2 (c_1 d_2) - x_1 d_2 (c_0 d_2);$$

de sorte qu'à part le facteur commun d_2, on passe du premier terme au second, en changeant le signe et en effectuant, entre la resultante et la lettre x, la mutation d'indices capable de changer x_0 en x_1. Considérons maintenant le couple propre à nous donner des termes uniques en x_1 et x_2; soient $Ax_1 + Bx_2$ ces termes après l'élimination de p : A renferme nécessairement une résultante en (c, d), résultat de l'élimination, et cette résultante ne peut être que $(c_0 d_2)$, c'est-à-dire la même que celle servant de facteur à x_1 dans le couple précédent; car avec les lettres (c, d) et les indices (0, 1, 2), on ne peut former que la résultante $(c_0 d_2)$, ne renfermant pas l'indice de x_1. Quant à l'indice 3 et aux indices 4, 5.., s'ils existaient, ils ne peuvent entrer dans A, car les équations en x_3, x_4... nous sont inutiles pour former l'équation en x_0, x_1, x_2 : donc $A = K(c_0 d_2)$, K étant un facteur indépendant de la lettre x; et comme la loi déjà remarquée pour passer de x_0 à x_1 ne saurait être particulière aux indices 0 et 1, de $A = K(c_0 d_2)$ on déduit $B = -K(c_0 d_1)$.

Soit maintenant $A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2$ le terme total résultant de l'élimination de p, au moyen de l'un quelconque de nos trois couples : nous sommes certains que l'on a

$$\frac{A_0}{+(c_1 d_2)} = \frac{A_1}{-(c_0 d_2)} = \frac{A_2}{+(c_0 d_1)};$$

donc ce terme total est de la forme

$$K\{x_0(c_1d_2) - x_1(c_0d_2) + x_2(c_0d_1)\} = K(x_0c_1d_2), \qquad (C)$$

K restant encore indéterminé.

Concevons donc qu'on élimine p entre la première et la seconde des équations (B); on aura, à cause de la forme maintenant connue du premier membre,

$$(x_0d_1)(c_0d_2) - (x_0d_2)(c_0d_1) = K(x_0c_1d_2);$$

donc aussi, changeant x en a, et puisque K ne renferme pas la lettre x,

$$\left.\begin{aligned}(a_0d_1)(c_0d_2) - (a_0d_2)(c_0d_1) &= K(a_0c_1d_2)\\ (b_0d_1)(c_0d_2) - (b_0d_2)(c_0d_1) &= K(b_0c_1d_2)\end{aligned}\right\}. \qquad (D)$$

La substitution de ces valeurs et la suppression du facteur commun K nous mènent à l'équation finale

$$(x_0c_1d_2) = (a_0c_1d_2)m + (b_0c_1d_2)n.$$

On aurait pu former une équation pareille en x_0, x_1, x_3 ou en x_0, x_2, x_3, ou enfin en x_1, x_2, x_3; nous aurons de la sorte le système suivant, relatif aux combinaisons ternaires,

$$\left.\begin{aligned}x_0(c_1d_2) - x_1(c_0d_2) + x_2(c_0d_1) &= (x_0c_1d_2) = (a_0c_1d_2)m + (b_0c_1d_2)n\\ x_0(c_1d_3) - x_1(c_0d_3) + x_3(c_0d_1) &= (x_0c_1d_3) = (a_0c_1d_3)m + (b_0c_1d_3)n\\ x_0(c_2d_3) - x_2(c_0d_3) + x_3(c_0d_2) &= (x_0c_2d_3) = (a_0c_2d_3)m + (b_0c_2d_3)n\\ x_1(c_2d_3) - x_2(c_1d_3) + x_3(c_1d_2) &= (x_1c_2d_3) = (a_1c_2d_3)m + (b_1c_2d_3)n\end{aligned}\right\}. \qquad (E)$$

En continuant à opérer sur les équations (E), comme nous avons fait sur les équations (B), nous sommes conduits à éliminer n entre la troisième et la quatrième de ces équations (E); le couple qu'elles forment renferme un seul terme en x_0 et un seul terme en x_1: soit donc toujours

$$A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3$$

le résultat de l'élimination.

Le double terme en x_0 et x_1 se présentant sous la forme

$$x_0(c_2d_3)(b_1c_2d_3) - x_1(c_2d_3)(b_0c_2d_3),$$

il en résulte que l'on a

$$\frac{A_0}{+(b_1c_2d_3)} = \frac{A_1}{-(b_0c_2d_3)}.$$

Passons au couple qui renferme un seul terme en x_1 et un seul terme en x_2; comme avec les lettres b, c, d et les indices 0, 1, 2, 3, on ne peut former que la seule résultante $(b_0c_2d_3)$ ne renfermant pas l'indice de x_1, il en résulte entre A_1 et A_2 la relation

$$\frac{A_1}{(b_0c_2d_3)} = \frac{A_2}{-(b_0c_1d_3)},$$

et ainsi de suite; donc encore

$$\frac{A_0}{(b_1c_2d_3)} = \frac{A_1}{-(b_0c_2d_3)} = \frac{A_2}{+(b_0c_1d_3)} = \frac{A_3}{-(b_0c_1d_2)},$$

et par suite

$$\begin{aligned}(x_0c_1d_2)(b_0c_1d_3) - (x_0c_1d_3)(b_0c_1d_2) &= K\{x_0(b_1c_2d_3) - x_1(b_0c_2d_3) + x_2(b_0c_1d_3) - x_3(b_0c_1d_2)\}\\ &= K(x_0b_1c_2d_3), \qquad \text{(F)}\end{aligned}$$

K étant toujours un certain coefficient indépendant de x, et fonction seulement des lettres b, c et d.

En changeant dans cette dernière équation x en a, on aura le coefficient de m après l'élimination, et divisant par K, on trouvera l'équation suivante en m, x_0, x_1, x_2, x_3,

$$(x_0b_1c_2d_3) = (a_0b_1c_2d_3)m. \qquad \text{(G)}$$

Ainsi, pour former les systèmes successifs des équations (B), (E), (G), on aura la règle suivante : « Avec x et les lettres qui cor-« respondent aux variables indépendantes que vous voulez éli-« miner formez une résultante; donnez-lui pour indices les in-« dices de celles des variables x_0, x_1, x_2... que vous voulez con-

« server dans votre équation; vous aurez le premier membre de « l'équation cherchée. Remplacez dans ce premier membre la lettre « x par la lettre correspondant à l'une des variables indépendantes « m, n, p, q... que vous ne voulez pas éliminer; la résultante ainsi « formée sera le coefficient de cette variable dans le second « membre; formez de même les coefficients des autres variables « indépendantes qui ne doivent pas être éliminées; la somme ainsi « obtenue sera votre second membre. »

Il est facile de généraliser cette règle, en montrant que, si elle a lieu pour des résultantes renfermant un nombre $\alpha+1$ d'indices, elle a lieu aussi dans le cas d'un nombre d'indices égal à $\alpha+2$.

Soient a, b,... d, e les lettres relatives aux variables non éliminées; soient f..., k, l les lettres correspondantes aux variables éliminées; concevons qu'on ait

$$(x_0 f_1 \ldots k_{\alpha-1} g_\alpha) = (a_0 f_1 \ldots k_{\alpha-1} g_\alpha) m + \ldots\ldots\ldots + (e_0 f_1 \ldots k_{\alpha-1} g_\alpha) s,$$
$$(x_0 f_1 \ldots k_{\alpha-1} g_{\alpha+1}) = (a_0 f_1 \ldots k_{\alpha-1} g_{\alpha+1}) m + \ldots\ldots + (e_0 f_1 \ldots k_{\alpha-1} g_{\alpha+1}) s,$$

et proposons-nous d'éliminer s. Le premier membre de la première de ces équations renferme le terme $\pm x_\alpha (f_0 \ldots k_{\alpha-1})$, d'après le second des deux théorèmes donnés par Laplace. Le premier membre de la seconde ne renferme pas x_α; mais en revanche, il renferme $x_{\alpha+1}$, qui n'existe pas dans la première, et le terme en $x_{\alpha+1}$ est de la forme $\pm x_{\alpha+1} (f_0 \ldots k_{\alpha-1})$; ainsi l'élimination donne

$$\pm (f_0 \ldots k_{\alpha-1}) \{ x_\alpha (e_0 f_1 \ldots k_{\alpha-1} g_{\alpha+1}) - x_{\alpha+1} (e_0 f_1 \ldots k_{\alpha-1} g_\alpha) \}; \qquad \text{(H)}$$

donc

$$\frac{A_\alpha}{(e_0 f_1 \ldots k_{\alpha-1} g_{\alpha+1})} = \frac{A_{\alpha+1}}{-(e_0 f_1 \ldots k_{\alpha-1} g_\alpha)}.$$

La loi de passage de A_α à $A_{\alpha+1}$ est donc vérifiée; ainsi le premier membre doit, après l'élimination, se présenter sous la forme

$$K (x_0 e_1 f_2 \ldots k_\alpha g_{\alpha+1}), \qquad \text{(K)}$$

et en y changeant x successivement en a, b,... et d, on trouvera

$$(x_0e_1f_2\ldots k_\alpha g_{\alpha+1}) = (a_0e_1f_2\ldots k_\alpha g_{\alpha+1})m + (b_0e_1f_2\ldots k_\alpha g_{\alpha+1})n + \text{etc.}\ldots;$$

donc si la loi est vraie pour $\alpha+1$ indices, elle est vraie également pour $\alpha+2$; donc elle est tout à fait générale.

On peut demander quelle est la valeur du facteur K qui entre dans les équations (D), (F), et qui se représenterait également dans la différence des produits croisés de quatre résultantes à quatre ou à cinq, ou à six, etc., indices.

Reportons-nous à l'exemple général que nous venons de donner pour le cas de $\alpha+1$ indices, et comparons l'une à l'autre les formules (H) et (K). Cette dernière développée renferme le terme

$$\pm K\{x_\alpha(e_0f_1\ldots k_{\alpha-1}g_{\alpha+1}) - x_{\alpha+1}(e_0f_1\ldots k_{\alpha-1}g_\alpha)\};$$

donc

$$K = (f_0\ldots k_{\alpha-1}),$$

et ainsi, en général,

$$(x_0f_1\ldots k_{\alpha-1}g_\alpha)(e_0f_1\ldots k_{\alpha-1}g_{\alpha+1}) \quad (x_0f_1\ldots k_{\alpha-1}g_{\alpha+1})(e_0f_1\ldots k_{\alpha-1}g_\alpha) = (f_0\ldots k_{\alpha-1})(x_0e_1f_2\ldots k_\alpha g_{\alpha+1}). \qquad (L)$$

« Ainsi, si l'on effectue dans une résultante le seul changement « d'une lettre, puis le seul changement d'un indice, et enfin ces « deux changements à la fois, la différence des produits croisés « de ces quatre résultantes sera égale au produit de la résultante « formée avec toutes les lettres et tous les indices, par la résul- « tante formée avec les indices et les lettres qui n'ont pas varié. » Toutefois, dans le cas général, on ne pourra ramener la différence des produits croisés à la forme du premier membre de l'équation (L) qu'en transposant des indices entre parenthèses, ce qui, d'après la première règle de Laplace, pourra amener des changements de signe dans le second membre.

La loi générale de la page 322 conduit immédiatement, par l'élimination de toutes les variables moins une, aux valeurs des

inconnues m, n, p... en fonction de x_0, x_1... et des coefficients de ces inconnues, telles qu'on les déduit de la règle donnée dans les éléments d'algèbre.

Soient maintenant

$$\left.\begin{aligned} m &= \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ n &= \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \\ p &= \gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 \\ q &= \delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (M_1)$$

les équations qui expriment les transformations des variables m, n, p, q en fonction des autres variables x_0, x_1, x_2, x_3.

Nous ferons remarquer d'abord qu'il existe une différence entre la notation des coefficients de ces équations et celle des coefficients des équations (A). Cette différence tient à ce qu'on substitue ici les lettres aux indices et réciproquement; car, si l'on conçoit par la pensée que les indices 0, 1, 2, 3... soient les analogues des anciennes lettres a, b, c, d..., et que les lettres α, β, γ, δ soient les analogues des anciens indices, la différence de notation disparaît aussitôt. Ainsi une résultante relative à nos nouveaux coefficients, telle que $(\alpha_0\beta_1\gamma_2)$ par exemple, devient l'analogue des résultantes considérées ci-dessus, si dans le développement de l'expression symbolique $(\alpha_0\beta_1\gamma_2)$ nous assujettissons les lettres α, β, γ à rester invariables, tandis que nous ferons varier, suivant la loi de Bezout, la position des indices : nous obtenons ainsi

$$\alpha_0\beta_1\gamma_2 - \alpha_0\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_0\gamma_1 - \alpha_1\beta_0\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_0 - \alpha_2\beta_1\gamma_0;$$

or, il est visible que la résultante ainsi obtenue ne diffère pas de celle que l'on obtiendrait en traitant $(\alpha_0\beta_1\gamma_2)$ par la méthode ordinaire, c'est-à-dire en laissant les indices fixes et faisant varier la position des lettres. En effet, la règle étant évidemment vérifiée dans le cas de $\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0$, il suffit de prouver que, si elle a lieu pour des résultantes de $a+1$ lettres, elle a lieu aussi pour $a+2$ lettres.

Représentons par une double parenthèse la résultante obtenue en faisant varier les indices. D'après la seconde règle de Laplace, appliquée aux indices et non aux lettres, on peut écrire

$$((\alpha_0\beta_1\gamma_2\ldots\delta_a\varepsilon_{a+1})) = \alpha_0((\beta_1\gamma_2\ldots\delta_a\varepsilon_{a+1})) - \beta_0((\alpha_1\gamma_2\ldots\varepsilon_{a+1}))\ldots \pm \varepsilon_0((\alpha_1\beta_2\ldots\delta_{a+1})).$$

Le coefficient de α_1 dans le second membre est donc

$$-\beta_0((\gamma_2\ldots\varepsilon_{a+1}))+\ldots \pm \varepsilon_0((\beta_2\ldots\delta_{a+1})) = -((\beta_0\gamma_2\ldots\delta_a\varepsilon_{a+1}));$$

le coefficient de α_2 est de même

$$+((\beta_0\gamma_1\ldots\delta_a\varepsilon_{a+1})),$$

et ainsi de suite.

La proposition étant censée démontrée pour le cas de $a+1$ lettres, on peut dans les coefficients de α_0, α_1, α_2.. changer la double parenthèse en parenthèse simple, et il vient

$$\begin{aligned}((\alpha_0\beta_1\gamma_2\ldots\varepsilon_{a+1})) &= \alpha_0(\beta_1\gamma_2..\varepsilon_{a+1}) - \alpha_1(\beta_0\gamma_2..\varepsilon_{a+1}) + \alpha_2(\beta_0\gamma_1..\varepsilon_{a+1}) - \text{etc}..\\ &= (\alpha_0\beta_1\gamma_2..\varepsilon_{a+1}),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi « la résultante $(\alpha_0\beta_1\gamma_2\ldots)$ reste identiquement la même, « soit qu'on la décompose par les permutations des lettres, en « laissant les indices fixes; soit qu'on la décompose par les permutations des indices, en laissant les lettres fixes à leur tour.

Écrivons maintenant

$$m = \frac{(x_0b_1c_2d_3)}{(a_1b_1c_2d_3)},\quad n = \frac{(a_0x_1c_2d_3)}{(a_1b_1c_2d_3)},\quad p = \frac{(a_0b_1x_2d_3)}{a_0b_1c_2d_3)},\quad q = \frac{(a_0b_1c_2x_3)}{(a_0b_1c_2d_3)}. \qquad (N)$$

Soit de plus

$$P = (a_0b_1c_2d_3). \qquad (P)$$

On a par la première règle de Laplace $(a_0x_1c_2d_3) = -(x_1a_1c_2d)$.

$$(a_0b_1x_2d_3) = -(a_0x_1b_2d_3) = +(x_0a_1b_2d_3),$$

et ainsi de suite.

Décomposons les seconds membres des équations (N) par la seconde règle de Laplace, et nous trouverons, en ayant égard aux équations (M),

$$\left.\begin{array}{llll} P\alpha_0 = +(b_1c_2d_3), & P\alpha_1 = -(b_0c_2d_3), & P\alpha_2 = +(b_0c_1d_3), & P\alpha_3 = -(b_0c_1d_3), \\ P\beta_0 = -(a_1c_2d_3), & P\beta_1 = +(a_0c_2d_3), & P\beta_2 = -(a_0c_1d_3), & P\beta_3 = +(a_0c_1d_2), \\ P\gamma_0 = +(a_1b_2d_3), & P\gamma_1 = -(a_0b_2d_3), & P\gamma_2 = +(a_0b_1d_3), & P\gamma_3 = -(a_0b_1d_2), \\ P\delta_0 = -(a_1b_2c_3), & P\delta_1 = +(a_0b_2c_3), & P\delta_2 = -(a_0b_1c_3), & P\delta_3 = +(a_0b_1c_2), \end{array}\right\} \quad (Q)$$

équations dont la loi de formation est évidente; il suffit de faire passer à volonté, avec son indice, une des lettres qui composent le second membre de l'équation (P) dans le premier membre de cette même équation, en la changeant en la lettre grecque correspondante; puis d'échanger arbitrairement l'indice de cette lettre avec un des indices restants dans le second membre, en ayant soin de changer le signe du second membre, si la somme des indices ainsi échangés est impaire.

Proposons-nous maintenant d'éliminer x_0 entre les deux premières équations (M); nous aurons

$$-\beta_0 m + \alpha_0 n = (\alpha_0\beta_1)x_1 + (\alpha_0\beta_2)x_2 + (\alpha_0\beta_3)x_3.$$

Multiplions cette équation par P, et substituons-y les valeurs de $P\alpha_0$, $P\beta_0$ (équations Q) : il viendra

$$m(a_1c_2d_3) + n(b_1c_2d_3) = P(\alpha_0\beta_1)x_1 + P(\alpha_0\beta_2)x_2 + P(\alpha_0\beta_3)x_3,$$

et cette équation, comparée à la quatrième des équations (E), donne

$$P(\alpha_0\beta_1) = (c_2d_3). \qquad (R)$$

Pour éliminer x_0 et x_1 entre les trois premières équations (M) et former directement l'équation finale, il faut modifier la règle donnée à la page 322, en ayant égard à l'échange qui s'est fait entre les lettres et les indices. On trouve alors la règle suivante relative aux équations (M) : « D'une part avec les indices des va-

« riables x que vous vous proposez d'éliminer et l'indice d'une des « variables restantes, d'autre part avec les lettres grecques qui « correspondent aux variables m, n, p.. que vous conservez, formez une résultante : ce sera le coefficient d'une des variables x du second membre, de celle dont vous avez employé l'indice « pour former ce coefficient; faites de même pour les autres variables x non éliminées : la somme obtenue sera le second « membre. Pour former le premier membre, faites $m = \alpha_i$, $n = \beta_i$, « $p = \gamma_i$.... etc.; avec les indices des variables éliminées et l'indice i, avec les lettres grecques qui entrent dans le second « membre, formez une résultante : ce sera le premier membre « cherché. »

On trouve ainsi que l'élimination de x_0, x_1 donne

$$(\alpha_0\beta_1\gamma_i) = (\alpha_0\beta_1\gamma_2)x_2 + (\alpha_0\beta_1\gamma_2)x_i.$$

Le premier membre de cette équation renfermant nécessairement le terme $+ (\alpha_0\beta_1)\gamma_i$ (deuxième règle de Laplace), si l'on multiplie cette équation par P, en observant que $P(\alpha_0\beta_1) = +(c_2d_3)$ et que $\gamma_i = n$, si de plus on la compare à la dernière des équations (B), on trouvera

$$P(\alpha_0\beta_1\gamma_2) = d_3. \qquad (S)$$

Maintenant pour éliminer x_0, x_1 et x_2, on doit poser, d'après la règle précédente,

$$(\alpha_0\beta_1\gamma_2\delta_i) = (\alpha_0\beta_1\gamma_2\delta_3)x_3.$$

On en déduit

$$P(\alpha_0\beta_1\gamma_2\delta_i) = P(\alpha_0\beta_1\gamma_2\delta_3)x_3,$$

et à cause du terme $P(\alpha_0\beta_1\gamma_2)\delta_i = d_3\delta_i = d_3q$, la comparaison de cette équation avec la dernière des équations (A) prouve que l'on a

$$P(\alpha_0\beta_1\gamma_2\delta_3) = 1. \qquad (T)$$

En réunissant maintenant l'équation (P), la première équation Q, les équations (R), (S) et (T), la loi de formation de ces équations devient évidente. La démonstration que nous venons de donner s'applique évidemment à un nombre quelconque de lettres et à des résultantes formées d'une manière quelconque, pourvu qu'on fasse passer les lettres du second membre dans le premier, en leur conservant leurs indices.

Mais qu'arrivera-t-il si l'on effectue un changement d'indices entre le premier et le second membre de l'une des équations (Q), (R), (S)? Or, à cause de la signification intrinsèque des indices, leur ordre initial dans l'équation $P = (a_0 b_1 c_2 ..)$ est tout à fait indifférent, quoiqu'on admette de préférence l'ordre naturel, à cause de sa plus grande simplicité. D'après cela, il est évident que, si l'on effectue dans le facteur P le même changement d'indices qui a lieu dans les deux résultantes du premier et du second membre, le signe de l'équation ne doit pas changer. Mais la quantité $(a_0 b_1 c_2 ...)$ change-t-elle alors? Les équations (Q) prouvent *a posteriori* que $(a_0 b_1 c_2 ...) = P$ a dû changer de signe toutes les fois que la somme des deux indices échangés est impaire. Donc aussi l'équation générale

$$P(\alpha_0 \beta_1 ... \varepsilon_l) = (f_{l+1} g_{l+2} ...)$$

devra changer le signe de son second membre dans le même cas, par suite du changement de signe qui aurait lieu dans P, si l'on y effectuait le changement d'indices convenu.

Rien n'empêche, au lieu d'un seul échange d'indices, d'en faire deux, trois ou davantage, et, selon que la somme totale des indices échangés sera paire ou impaire, le second membre devra garder ou non le même signe.

Ainsi la règle suivante est générale : « Soit $P = (a_0 b_1 c_2 ...)$: faites « passer, avec leurs indices et la forme grecque correspondante, « autant de lettres que vous voudrez dans le premier membre, « pour en former une résultante qui aura P pour facteur : l'équa-

« tion arbitraire ainsi obtenue sera exacte. Faites alors passer à « volonté autant d'indices que vous voudrez d'un membre à « l'autre, et changez le signe du second membre, si la somme « des indices échangés est impaire : l'équation arbitraire ainsi « obtenue sera encore exacte. »

Concevons, comme application, que dans le cas des six lettres a, b, c, d, e, f, on demande la valeur de $\alpha_1\beta_2\varepsilon_5$. De $P=(a_0b_1c_2d_3e_4f_5)$, on déduira d'abord $P(\alpha_0\beta_1\varepsilon_4)=(c_2d_3f_5)$; on échangera ensuite 0 et 4 contre 2 et 5 : la somme $4+2+5+0$ étant impaire, on aura

$$P(\alpha_1\beta_2\varepsilon_5)=-(c_0d_3f_4); \qquad (\alpha_1\beta_2\varepsilon_5)=-\frac{c_0d_3f_4}{(a_0b_1c_2d_3e_4f_5)}.$$

Concevons, au contraire, qu'on demande $c_0d_3f_4$ en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ et ζ : on posera

$$\Pi=(\alpha_0\beta_1\gamma_2\delta_3\varepsilon_4\zeta_5),$$

et l'on trouvera

$$(c_0d_3f_4)=-\frac{\alpha_1\beta_2\varepsilon_5}{(\alpha_0\beta_1\gamma_2\delta_3\varepsilon_4\zeta_5)}.$$

Ces deux équations se vérifient mutuellement, par suite de la relation générale $P\Pi=1$, qui est la généralisation de l'équation (T); c'est l'équation à laquelle nous avons été conduits immédiatement après la formule (15), et par une voie bien différente de celle que nous venons d'employer.

RÉSUMÉ.

Les résultats du mémoire précédent ne doivent être considérés comme nous offrant une image fidèle de nos connaissances sur la position d'un point, que dans le cas où les éléments employés ont été préalablement déterminés par un grand nombre d'observations; il faut, de plus, que les erreurs possibles soient assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés relativement aux erreurs elles-mêmes. Quoique l'application pratique de ces résultats soit singulièrement restreinte par ces circonstances, l'astronomie et les grandes opérations géodésiques les réalisent d'une manière suffisamment exacte, et l'illustre Laplace en a donné de remarquables exemples. Mais ce grand géomètre s'est borné à l'appréciation de la possibilité des erreurs de la mesure finale d'une longueur, c'est-à-dire des erreurs qui peuvent exister dans la situation d'un point assujetti à rester sur une droite donnée. Si l'on prend pour départ le lieu que les observations assignent au point cherché ou le lieu apparent du point, et si on le compare au lieu vrai inconnu, que des observations exemptes d'erreurs eussent déterminé, le passage du lieu apparent au lieu vrai peut avoir lieu dans des conditions moins restreintes que les précédentes.

En conséquence, j'ai d'abord assujetti le point cherché à varier dans un plan donné, et j'ai examiné ensuite le cas général de l'espace. Je détermine les probabilités diverses que ce point a de se transporter dans une direction donnée pour aller de son lieu apparent à son lieu vrai; celles pour que l'erreur de situation, c'est-à-dire la distance qui sépare ces deux lieux entre eux, soit moindre qu'une longueur donnée; celles, enfin, pour que ce lieu vrai soit renfermé dans l'intérieur d'ellipses ou ellipsoïdes dont le contour

offre pour tous ses points la même chance de coïncider avec le lieu vrai cherché, et, en général, pour que ce lieu vrai soit renfermé dans un espace quelconque assigné, fini ou indéfini. Je détermine ensuite la valeur de la crainte mathématique de l'erreur: celle-ci, par une curieuse propriété, a pour mesure, dans le cas du plan, une circonférence d'ellipse, et, dans le cas de l'espace, une surface d'ellipsoïde; j'y ajoute les conditions qui doivent rendre cette crainte mathématique un minimum, lorsqu'on peut choisir à volonté les circonstances de temps, de lieu, etc. dans lesquelles les observations devront être faites: c'est en se conformant à ces conditions déterminées d'avance, que la situation du point cherché laissera le moins de prise possible à l'erreur.

Accidentellement, je considère le cas où les transformations de variables s'effectuent d'après des équations linéaires, ce qui arrive, entre autres, dans le passage d'un système à un autre système d'axes coordonnés quelconques, et je démontre les lois que suivent dans leurs combinaisons les coefficients de l'un de ces systèmes en fonction des coefficients de l'autre.

SUR

LES DENTS DES MUSARAIGNES,

CONSIDÉRÉES

DANS LEUR COMPOSITION ET LEUR STRUCTURE INTIME,
LEURS RAPPORTS AVEC LES MACHOIRES,
LEUR DÉVELOPPEMENT ET LEUR SUCCESSION,

MÉMOIRE LU À L'ACADÉMIE DES SCIENCES LES 8 ET 16 AOÛT ET 5 SEPTEMBRE 1842.

PAR M. G. L. DUVERNOY.

§ 1^er^. INTRODUCTION.

Le titre de ce mémoire en expose le plan.

J'y considère les substances dont se composent les dents des mammifères en général et celles des musaraignes en particulier, leur structure intime ou microscopique, leur développement et leur succession, et je compare mes propres observations aux derniers progrès que la science vient de faire, particulièrement au sujet des dents des mammifères, après les avoir étudiées sous ces divers points de vue.

Ces progrès ont été tellement importants, dans ces dernières années, qu'on pourrait les considérer comme une sorte de révolution dans cette partie de la science de l'organisation, et les plus marquants peut-être sont encore dus à l'emploi du microscope.

Il n'était donc pas hors de propos de les rappeler, comme point de départ d'un travail que j'ai cherché à rendre digne de l'attention et de l'intérêt de l'Académie, sous le double rapport de l'histoire de la science et des observations nouvelles qu'il renferme.

J'avais d'ailleurs avancé, dans mon premier mémoire sur les musaraignes, qui date de 1834, plusieurs propositions sur l'évolution et la structure des dents de ces animaux, que des observations ultérieures m'ont mis heureusement à même de développer ou de rectifier.

Celles que, 1° *l'accroissement et le durcissement de ces dents se font, pour la couronne, en dehors des mâchoires, à la place qu'elles doivent occuper toute la vie;* 2° *que leur série fait saillie, par suite de ce développement extérieur, sur le bord des mâchoires, à travers la capsule qui les enveloppe, de telle manière que chaque dent y dessine une partie de sa forme;* ces propositions, dis-je, étaient fondées sur des observations exactes, que j'ai eu de nouveau l'occasion de vérifier.

Mais j'en avais conclu à tort, ainsi que de leur mode d'adhésion aux mâchoires, de leur nombre et de leur forme à l'époque de la première dentition, qu'il n'y avait pas de seconde dentition. Tout fait présumer, avais-je dit cependant avec cette réserve d'expression, qu'elle n'a pas lieu du tout [1]. Je montrerai dans ce mémoire qu'elle a lieu en effet; mais avec des particularités très-remarquables, qui n'ont encore été observées dans aucun mammifère, et qui m'ont paru très-instructives pour l'intelligence des phénomènes de la première comme de la seconde dentition en général.

§ 2. DE LA COMPOSITION DES DENTS DES MAMMIFÈRES EN GÉNÉRAL.

Avant Haller, et depuis ce grand physiologiste jusqu'à Tenon, on ne reconnaissait dans la composition des dents que deux substances : l'une interne et principale, appelée osseuse; l'autre externe, l'émail, formant une couche mince autour de la couronne, et la rendant plus propre, par sa plus grande dureté, à couper, à briser et à broyer les substances alimentaires. Cette propriété et sa nature, en partie inorganique, font encore que, dans beaucoup de cas, cette substance joue, à l'égard de celle qu'elle recouvre,

[1] Voir pages 26 et 27 du mémoire cité.

le rôle de l'épiderme relativement au derme; elle la préserve jusqu'à un certain degré, qui est loin cependant d'être aussi important qu'on l'a cru, de l'action nuisible des agents physiques, des substances alimentaires et des sécrétions da la cavité buccale.

Voici à peu près comment s'exprime Haller, au sujet de ces deux substances.

Celle qu'il appelle osseuse, dont la couronne est principalement et dont les racines sont exclusivement formées, a la structure lamelleuse, telle qu'on l'observe dans les os de tout le corps. Cette substance est recouverte dans la couronne par l'émail, matière particulière beaucoup plus dure, qui résiste au fer et à la lime, vitreuse, blanche, à structure fibreuse, etc.[1].

Jusqu'à ces dernières années, les ouvrages des anthropotomistes n'ont fait, pour ainsi dire, que copier Haller, au sujet des substances qui entreraient, au nombre de deux seulement, dans la composition des dents de l'homme. Quoique averti, par un beau travail de Tenon, sur l'existence d'une troisième substance que le judicieux académicien appelle cortical-osseux, et qu'il décrivit pour la première fois dans ses Recherches sur les dents et sur les os des mâchoires, communiquées déjà, en 1767 et 1770, à l'ancienne Académie des sciences, lues de nouveau à la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut national, ce corps savant n'a rendu ces recherches publiques que dans le tome I de ses mémoires, comprenant ceux de 1796 à 1797. Elles démontrent l'existence du cortical-osseux[2], non-seulement autour des molaires du cheval, mais encore jusque dans le creux de ses incisives. Les unes et les autres en sont originairement enveloppées de toutes parts; c'est la trituration et l'usure qu'elle produit qui font disparaître ce cortical-osseux de la surface triturante de la couronne.

Blake, dans sa dissertation inaugurale, qui a paru en 1798,

[1] Alb. V. Haller, *Elementa physiologiæ*, t. VI, p. 23.

[2] Leeuwenhoeck parle déjà d'une substance corticale dans les dents du veau. *Continuatio epistolarum*; Lugduni Batavorum, 1680.

et conséquemment l'année après la dernière publication des beaux mémoires de Tenon, décrivit avec soin le cortical-osseux, mais sous le nom de *crusta petrosa*, d'après des observations faites sur les mêmes animaux.

G. Cuvier constata, dès 1803, que le cortical-osseux de Tenon sert à réunir et à souder entre elles les différentes lames dont une molaire d'éléphant ou de cabiai se compose. Un pareil usage lui fit donner à cette substance le nom de cément. Mais il ne s'aperçut pas que cette légère couche jaunâtre, qu'on a nommée, dit-il, substance cornée, et qui recouvre les racines au lieu d'émail, est l'analogue du cément des dents de cheval, de ruminants et d'éléphant [1].

Ce n'est guère que dans le beau travail de M. Retzius *Sur la structure des dents*, fondé sur des observations faites en 1836, travail que nous aurons plusieurs fois l'occasion de citer dans ce mémoire, que l'on démontre l'existence du cortical-osseux ou du cément, entourant, dans les dents de l'homme, la substance tubuleuse des racines.

A la vérité, M. Frœnkel [2], dans sa dissertation inaugurale, soutenue en 1835 à l'université de Breslaw, sous la présidence du célèbre Purkinje, en avait déjà reconnu les traces et la nature, et nous venons de dire qu'elle avait été indiquée bien longtemps auparavant, mais comme substance cornée. Quelques anatomistes l'ont même considérée comme un état anormal de cette dernière substance; ce qui est précisement l'inverse.

M. Erdl [3], dans un très-intéressant travail sur les dents des vertébrés en général, et plus particulièrement sur celles des rongeurs, travail que nous ne connaissions pas encore au moment de nos communications à l'Académie, croit devoir distinguer ce

[1] *Leçons d'anatomie comparée*, t. III, p. 107, 1re édit. Paris, 1805, et t. IV, 1re part. p. 206; 2e édit. Paris, 1835.

[2] *De penitiori dentium structura observationes*; Vratislaviæ, 1835.

[3] *Recherches sur la structure des dents des vertébrés, et plus particulièrement des rongeurs.* (*Mémoires de l'académie royale des sciences de Bavière*, t. III, 2e part. p. 485-548; Munich, 1841.)

qu'il appelle la substance osseuse (la *crusta petrosa* de Blake, le cortical-osseux de Tenon) du cément; quoique ces dénominations n'expriment, de son aveu, qu'une même substance, un peu modifiée, à la vérité, dans sa structure intime, suivant qu'on l'observe à la surface de la couronne ou de la racine (la substance osseuse), ou dans l'épaisseur de la couronne (le cément.) (Pl. II, fig. 6 et 7.)

Je n'ai pas cru devoir parler ici d'une quatrième substance, admise déjà en 1839 (Gazette de Londres) par M. John Tomes.

Cette quatrième substance formerait une couche intermédiaire entre le cément et l'ivoire, et commencerait où l'émail finit.

Elle se composerait de granules enfouis dans une substance transparente, continuation de la gangue des tubes de l'ivoire.

Je soupçonne que cette couche intermédiaire est due à la membrane capsulaire de l'ivoire, sur laquelle j'aurai l'occasion de revenir en parlant de cette dernière substance.

Enfin, le docteur Fournier, dans son article *Dents* (pathologie) du Dictionnaire des sciences médicales, cite M. Duval comme ayant observé une nouvelle substance ossifiée, différente des substances dentaires, analogue aux osselets qu'on voit quelquefois aux extrémités des dents cariées. Il ajoute, toujours d'après les observations de M. Duval, que cette production extraordinaire existe dans les dents des animaux.

Je pense que, dans plusieurs cas, c'est une production de ce que je désigne dans ce mémoire sous le nom de cément alvéolaire. (Voir le Dictionnaire des sciences médicales, t. VIII, p. 338 et 339.)

J'espère montrer, par mes propres observations, combien l'idée que l'on doit se faire du cément et du rôle que joue cette substance dans la dentition, avait besoin d'être complétée.

Étudions d'abord les deux autres substances précédemment nommées.

§ 3. DE LA SUBSTANCE PRINCIPALE OU TUBULEUSE DES DENTS.

HISTOIRE DE LA SCIENCE.

La substance que j'appelle principale a reçu, en premier lieu, la dénomination de substance osseuse. Hunter, ayant reconnu qu'elle devait être distinguée des os, généralisa le nom qu'elle porte dans les défenses d'éléphant et la désigna sous le nom d'ivoire.

J'adopte pour cette substance l'épithète de principale, parce qu'elle compose en effet la principale partie de la dent; ou celle de tubuleuse, que lui a donnée M. J. Müller, à cause de sa structure intime, qui se compose d'un grand nombre de tubes ou de canaux.

G. Cuvier, qui avait rédigé et écrit de sa main, déjà en 1803, ainsi que je l'ai dit ailleurs, la Leçon sur les dents (qui n'a paru qu'en septembre 1805, dans le premier des trois tomes des Leçons d'anatomie comparée que nous publiâmes à cette époque), l'appelait encore substance osseuse.

Mais déjà il faisait voir que son tissu intime présente, à l'œil nu ou à la loupe, des différences considérables selon les animaux, et il en indiquait quelques-unes des plus remarquables.

Peu de temps après, dans son mémoire Sur les éléphants vivants et fossiles, imprimé en 1806 dans le tome VIII des Annales du Muséum d'histoire naturelle, il exprimait « que la substance interne des dents n'a de commun avec les os que sa nature chimique; que son tissu n'offre ni cellulosité ni fibres, mais seulement des lames emboîtées les unes dans les autres. »

Il ajoute plus bas : « Ceux qui ont pensé que les vaisseaux du noyau pulpeux entrent dans le corps de la dent[1] ont été trompés. » Cette dernière proposition est exacte, s'il s'agit des vaisseaux sanguins. La première, que la substance interne des dents n'a de commun avec les os que sa nature chimique, est plus rapprochée

[1] Cette opinion avait été exprimée, entre autres, par Blake. (Voir sa Dissertation inaugurale.)

de la vérité qu'on ne l'a dit dans ces dernières années. Les autres donnaient du tissu de cette substance une idée très-incomplète, qui tenait aux moyens imparfaits d'investigation, l'œil nu ou tout au plus la loupe, dont on se contentait généralement à cette époque, pour observer les tissus dont le microscope seul peut mettre en évidence la structure intime.

Déjà Leeuwenhoeck, parmi tant de découvertes qu'il devait à l'emploi de son microscope, avait signalé dès le 1er avril 1678, dans une lettre adressée à la société royale de Londres, la structure tubuleuse des dents de l'homme, de l'éléphant, du veau et du cochon. Cette lettre, imprimée dans le tome I de ses œuvres (*Lugduni Batavorum, 1715*), est même accompagnée de plusieurs figures gravées, dont une représente ces tubes tels qu'il les a vus dans une portion de molaire d'homme. Leur diamètre, d'après son estimation, serait de 1/200 de millimètre, puisqu'il juge qu'on peut en compter 120 dans 1/45 de pouce.

Ce n'est qu'après le long intervalle de 1678 à 1798 que Blake, dans sa Dissertation inaugurale, admet *a priori*, plutôt qu'il ne le démontre par de nouvelles observations directes, la structure vasculaire de la substance osseuse des dents.

Il a fallu un second intervalle de trente-sept à trente-neuf ans, c'est-à-dire de 1798 à 1835 et 1837, avant que cette structure tubuleuse fût enfin démontrée, d'une manière indubitable, par les belles observations de MM. Purkinje et Frœnkel, J. Müller et Retzius.

En coupant des lamelles extrêmement minces de cette substance, elle a paru à MM. Purkinje et Frœnkel[1] formée d'une matière inorganique qui en compose la masse principale, et de fibres creuses ou de tubes qui sont dirigés presque parallèlement de l'axe de la dent vers sa circonférence, tantôt en ligne droite, tantôt en formant des sinuosités, et en s'anastomosant rarement entre eux par des rameaux latéraux. Ces savants n'ont d'ailleurs trouvé aucune analogie, disent-ils, même éloignée, entre la structure des

[1] Frœnkel, *De penitiori dentium humanorum structura observationes;* Wratislaviæ, 1835.

os et celle de la substance principale des dents et de leur émail.

M. J. Müller a ajouté à cette première description[1] de MM. Purkinje et Frœnkel, que ces tubes renferment, par-ci par-là, des matières inorganiques solubes dans les acides (des sels calcaires); que c'est à ces tubes que la dent doit sa couleur blanche; que la substance intermédiaire qui les sépare est plus transparente; qu'elle renferme cependant une bonne partie des sels calcaires qui durcissent les dents, soit combinés chimiquement au cartilage, soit déposés dans sa substance; que ces tubes, enfin, ont des parois membraneuses distinctes dans lesquelles sont déposés des sels calcaires qui les rendent rigides. Ces parois deviennent flexibles, lorsqu'on enlève ces sels par les acides.

A peu près en même temps que MM. Purkinje et Frœnkel, M. Retzius[2] faisait, de son côté, des observations multipliées sur la structure intime des dents des mammifères, des reptiles et des poissons.

Non-seulement il démontrait d'une manière générale la structure tubuleuse de la substance principale, qu'il continue cependant d'appeler osseuse, mais il faisait voir encore que ces tubes présentent, dans la direction qu'ils suivent de la paroi intérieure du noyau pulpeux vers la surface de la dent, et dans leurs divisions ou ramifications, quelques différences caractéristiques.

Il découvrait que, chez plusieurs animaux, il y a des cellules calcaires dans les intervalles de ces tubes, et que leurs dernières divisions viennent aboutir dans celles de ces cellules qui sont les plus rapprochées de la surface et conséquemment de l'émail ou du cément[3].

[1] *Archives d'anatomie et de physiologie pour 1836*, p. II et III.

[2] Voir les Archives d'anatomie et de physiologie de J. Müller, pour 1837, p. 496 et suiv. et pl. XXI et XXII, et la lettre à M. Flourens, lue à l'Académie des sciences, le 5 septembre 1836, et insérée dans les Annales des sciences naturelles, 2e série, t. VI, p. 155.

[3] Animaux dont M. Retzius a observé les dents, outre celles de l'homme à différents âges.

1. *Cercopithecus cynomolgus.*
2. *Erinaceus Europæus.*
3. *Sorex fodiens.*

En 1836, M. Dujardin, après avoir répété et constaté quelques-unes des observations de MM. Purkinje, Frœnkel, J. Müller et Retzius, en conclut que ces canaux des dents n'ont pas de parois propres; que ce sont des lacunes creusées dans une substance homogène et continue, qui ne montre pas la moindre trace de couches successivement juxtaposées[1].

Enfin, M. Richard Owen a communiqué à l'académie, en 1839 et 1840[2], deux mémoires importants, dans lesquels il est parvenu aux résultats suivants, dans la comparaison qu'il a pu faire des dents de poissons avec celles des mammifères.

Selon ce savant, une dent de mammifère, au lieu d'avoir plusieurs canaux médullaires ramifiés, comme celles des poissons, aboutissant à des vaisseaux capillaires calcigères, n'a « qu'un seul canal médullaire et un système unique de tubes rayonnés calcigères, à parois distinctes. »

Cette manière de voir sera sans doute développée dans le texte et dans les planches du grand ouvrage que publie M. Owen, sur

4. *Felis lynx.*
5. *Canis familiaris.*
6. *Lepus borealis.*
7. *Castor fiber.*
8. *Elephas indicus.*
9. *Hippopotamus amphibius.*
10. *Sus scrofa.*
11. *Equus caballus.*
12. *Bos taurus.*
13. *Ovis aries.*
14. *Dasypus tricinctus.*
15. *Bradypus tridactilus.*
16. *Phoca annellata.*
17. *Trichecus rosmarus.*
18. *Delphinus Delphis.*

Parmi les reptiles, les dents de *crocodilus sclerops* et de *python bivittatus*, et celles de sept espèces de poissons. (*Journal de J. Müller*, p. 431, 1827.)

[1] Recherches microscopiques sur la structure des dents, communiquées à l'Académie des sciences le 26 septembre 1836; et Sur la structure intime de la substance osseuse des dents. (*Annales françaises et étrangères d'anatomie et de physiologie*, t. I, p. 149 et suiv. Paris, 1838.)

[2] *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, des 16 décembre 1839 et 13 janvier 1840, et *Annales des sciences naturelles*, 2e série, t. XII, p. 209 et 307.

la forme, la structure et le développement des dents des vertébrés [1].

Il faut ajouter à cette liste des anatomistes qui ont publié des travaux sur la structure tubuleuse de l'ivoire des dents, M. le docteur Erdl. Dans le travail important que nous avons déjà cité au sujet du cément, ce jeune et très-habile scrutateur de la nature confirme, par ses propres observations, la présence de canaux nombreux dans la substance dentaire principale, canaux qui pénètrent la gangue, le plus souvent homogène, dont elle se compose. Dans un cas cependant, celui des dents de tatoux, qui ne sont composées que d'ivoire, ainsi que l'avait déjà remarqué M. Retzius, cette gangue montre des stries extrêmement fines, pressées les unes vers les autres, et lui donnant l'apparence de l'émail.

Les figures des deux planches annexées à ce mémoire représentent des coupes transversales ou longitudinales de molaires d'écureuil d'Europe, de *pteromys nitidus*, de rat, de castor, de lièvre, de rat d'eau, de veau, dans lesquelles les tubes calcigères sont représentés avec beaucoup de netteté [2].

[1] *Odontography, etc.* by Richard Owen, S. R. S. part. first, London, 1840; part. second, London, 1841.

[2] Note additionnelle pour le mémoire de M. Erdl, devant servir à en faire comprendre le contenu.

EXPLICATION DES PLANCHES DE CE MÉMOIRE.

PLANCHE I.

Fig. 1. Coupe transversale d'une molaire d'écureuil d'Europe faite dans la partie inférieure de la couronne. Il y a une bande d'émail tout autour; les tubes de l'ivoire paraissent dans une plus grande étendue près de l'émail, où ils ont une direction plus horizontale: plus en dedans, leur direction est plus irrégulière et leur trajet plus court.

2. Coupe transversale de la partie supérieure de la couronne d'une molaire de rat.

3. Coupe transversale d'une molaire de castor.

4. Coupe transversale d'une molaire de lièvre.

PLANCHE II.

Fig. 1. Coupe longitudinale d'une molaire de *pteromys nitidus*, qui passe par la couronne et deux racines, une courte et une longue.

2. Coupe transversale d'une molaire de rat d'eau, *arvicola amphibius*. CUVIER.

3. Portion de substance tubuleuse d'une molaire de castor très-grossie. Les tubes calcigères ont de légères inflexions parallèles, se divisent dichotomiquement et se ramifient beaucoup vers l'émail, dans lequel quelques ramuscules pénètrent.

4. Ivoire d'une dent de veau prise de la paroi de la cavité du noyau pulpeux. Les tubes

§ 4. DE LA SUBSTANCE PRINCIPALE DES DENTS.

MES PROPRES OBSERVATIONS.

J'ai étudié la substance tubuleuse ou principale des dents dans celles des *sorex araneus*, *tetragonurus et fodiens*, et comparativement dans les dents de la chauve-souris commune et de la taupe, parmi les autres insectivores; du rat d'eau, du campagnol, du cochon d'Inde et d'un fœtus de lapin parmi les rongeurs. Voici le résultat général de mes observations :

Chez ces petits animaux on a l'avantage de pouvoir amincir assez une branche tout entière de la mâchoire inférieure, ou des portions considérables de la supérieure, pour en observer à la fois toutes les dents en place, même à un grossissement considérable, en faisant mouvoir la pièce au foyer du microscope. Ainsi amincies par leurs deux côtés, ces dents nous ont montré des tubes nombreux, dirigés des parois de la cavité du tube dentaire, ou du noyau pulpeux, vers la surface de la dent.

Lorsqu'on observe ces parois sous certains aspects, on y distingue très-bien les embouchures de ces tubes, que nous appellerons calcigères avec M. R. Owen.

Leur direction et leur longueur varient suivant la position et la distance de la surface vers laquelle ils doivent se porter.

Observés avec plus d'attention, beaucoup ne montrent de coloration que dans leurs parois; leur canal paraît blanc et même transparent comme la gangue qu'ils traversent. Dans les molaires, ceux qui se dirigent vers les saillies sont, non-seulement les plus longs, mais encore les plus nombreux dans un espace donné, de

calcigères sont d'abord réunis en faisceaux, se séparent ensuite les uns des autres, forment des inflexions, plus tôt ou plus tard, qui se mêlent entre elles.

5. Émail de dent d'homme.

6. Substance osseuse d'une racine de molaire de veau.

7. Cément d'une molaire de castor.

sorte qu'ils forment comme un faisceau ou un écheveau de tubes à peu près parallèles.

Dans l'incisive inférieure, la plupart ont une direction transversale, qui devient de plus en plus oblique en avant, pour ceux qui s'approchent de la pointe, et directe dans ce sens, pour les tubes qui partent du sommet du canal du bulbe.

L'obliquité est en sens contraire pour les tubes qui appartiennent à la dernière portion de la racine de cette dent.

Dans les molaires, c'est de tous les points de la cavité centrale du bulbe que ces tubes rayonnent vers la surface, non en ligne droite, mais en s'infléchissant un peu dans un sens ou dans un autre; et comme cette cavité se divise et se prolonge dans les racines, c'est encore des parois du canal de celles-ci que les tubes se portent vers la surface, mais toujours plus ou moins directement en travers. Les derniers deviennent obliques et se dirigent à la fois en dehors et vers l'extrémité de la racine. J'insiste sur leur direction, parce qu'elle indique, à mon avis, la marche de l'activité nutritive, qui a son centre d'action ou d'impulsion autour du noyau pulpeux principal, et qui rayonne de ce centre vers toute la circonférence de la dent, c'est-à-dire aussi bien vers celle de sa couronne que vers celle de ses racines. Seulement, dans celles-ci, l'impulsion nutritive du noyau principal n'agit que par l'intermédiaire des branches qu'il y projette.

Les tubes ou les canaux de la substance principale sont très-serrés les uns près des autres à leur origine et dans une partie de leur trajet, au point qu'on les distingue à peine et qu'ils forment, vus par transparence, comme des taches de couleur grise dans les lames qui ne sont pas extrêmement amincies. Ils se séparent, en devenant moins nombreux, à mesure que l'on s'éloigne du bulbe dentaire. Dans une dent ancienne, la plupart ne se prolongent pas jusqu'à l'émail, de sorte que la partie de la substance tubuleuse qui s'approche de l'émail montre de moins en moins de ces tubes: sans doute, parce qu'ayant été remplis de substance calcaire, et leurs parois ayant été pénétrées de cette même substance, comme

la gangue que ces tubes traversent, ces parois ne peuvent plus s'en distinguer. Un certain nombre cependant, après s'être ramifiés en diminuant de calibre et s'être anastomosés entre eux, vont se terminer dans une ligne noire, comme réticulée, qui sépare assez nettement de l'émail la substance tubulée. Cette ligne est importante à étudier; elle répond à la membrane très-fine que G. Cuvier a découverte dans les mâchelières d'éléphant, entre la prétendue substance osseuse et l'émail, et qui enveloppe immédiatement, ajoute-t-il, et serre de très-près le petit mur gélatineux, lorsqu'il n'y a encore aucune partie de l'émail de transsudée[1]. C'est ce petit mur gélatineux qui deviendra la dent en forme de lame, dont plusieurs réunies composent une molaire de ces animaux. Le diamètre des tubes, près du bulbe et dans la plus grande partie de leur trajet, est de 1/500 de millimètre au plus.

M. Retzius figure des cellules calcaires rangées dans les intervalles des dernières ramifications des tubes dentaires de plusieurs animaux (entre autres dans les incisives du cheval); c'est là où leurs ramuscules les plus fins viennent se terminer en rayonnant. Je n'ai rien vu de semblable dans les dents des musaraignes. Leur substance tubuleuse ne montre, en général, aucune de ces cellules étoilées qui caractérisent la substance osseuse.

Ce que cet estimable auteur dit de la substance tubuleuse des dents du *sorex fodiens* me fait penser qu'il n'y a pas observé, plus que moi, des cellules calcaires.

La substance tubuleuse ne m'a montré aucune différence importante dans les dents de la chauve-souris, dans celles de la taupe, ni dans les incisives du rat d'eau et du fœtus de lapin, comparativement à celles des musaraignes. Je ne puis donner ici qu'un extrait de ces observations de détail.

Dans une molaire de chauve-souris commune, les tubes de la couronne sont très-distincts et se continuent jusqu'à l'émail, en se divisant très-peu, et conséquemment avec de rares embranchements apparents; on dirait voir des mèches de cheveux. Leur dia-

[1] *Recherches sur les ossements fossiles*, t. I, p. 33, édit. in-4°; Paris, 1821.

mètre diminue peu dans leur trajet, et leurs orifices aboutissent et semblent béants dans la partie usée des pointes de cette couronne. Dans la racine, ces tubes paraissent plus flexueux, un peu divisés, et se rapetissant à mesure de leurs divisions. Tous partent évidemment de la paroi du bulbe. Beaucoup montrent leur canal blanc ou transparent entre les deux lignes noires ou grises de leurs propres parois.

Ces tubes, suivant les exemplaires que l'on étudie, paraissent comme divisés par de petites stries transversales; ce qui leur donne une apparence granuleuse qui vient sans doute des matières qu'ils renferment. Ils sont évidemment ramifiés, flexueux dans leurs divisions et s'anastomosant à mesure qu'ils s'approchent de l'émail. Ils partent de tout le pourtour des parois de la cavité principale du bulbe, et se dirigent en sens contraires vers la couronne ou la racine, de manière que ceux d'une partie de celle-ci ont une direction oblique en descendant.

Mais il y a, dans la dernière moitié de la racine de l'exemplaire que nous avons sous les yeux, une coupe de la cavité du noyau pulpeux, qui montre que ses parois sont aussi un centre d'impulsion nutritive. Les tubes calcigères partent de tout son pourtour et se dirigent, soit en divergeant vers le haut, à la rencontre de ceux qui descendent du noyau pulpeux de la couronne, pour former ensemble un réseau très-remarquable, soit sur les côtés, soit en bas vers la dernière extrémité de la racine. Cette circonstance organique montre ici plusieurs centres d'action nutritive qui rayonnent l'un vers l'autre.

Dans la taupe, les tubes calcigères ont beaucoup de rapport avec ceux de la chauve-souris. Ils sont très-flexueux, et ramifiés et serrés les uns près des autres autour des parois du noyau pulpeux, comme les jeunes arbres d'une épaisse revenue.

Leur direction générale, dans les molaires, s'élève des parois de la cavité du noyau pulpeux de la couronne vers la surface de celles-ci; mais elle ne descend pas de cette surface vers les racines. Ici ces tubes partent des parois du noyau pulpeux qui occupe l'axe

de la racine, en se portant en travers et un peu obliquement en haut, de sorte que l'impulsion nutritive semble avoir cette direction. Il n'y a que vers le bas de la racine que la direction de ces tubes est d'abord exactement transversale, puis oblique en bas et enfin directe dans ce sens ; ce sont ceux qui vont de l'extrémité du noyau pulpeux vers celle de la racine.

J'insiste sur la direction des tubes relativement au bulbe et à la surface de la dent, parce que c'est évidemment une indication de la marche qu'a dû suivre le dépôt successif des sels calcaires.

Dans une lame d'incisive de rat d'eau [1] longitudinale et verticale, la portion inférieure de cette lame, qui est au-dessous du noyau pulpeux, montre des tubes qui vont assez directement en travers, de la paroi de ce noyau vers la surface, qui est garnie d'émail. Ces tubes sont un peu flexueux dans leur trajet, pressés les uns vers les autres, on ne peut plus nombreux Comme ils s'infléchissent légèrement dans tous les sens, ils passent derrière ou devant les uns des autres, de manière qu'on ne peut pas suivre le même tube depuis son origine à sa terminaison ; près de celle-ci, ils forment des anastomoses extrêmement fines, et comme une sorte de réseau qui s'étend dans une bande rapprochée de l'émail et qui est limitée, de ce côté, par une double chaînette qui sépare les deux substances.

L'origine des tubes dans la paroi du noyau pulpeux est manifeste dans une portion supérieure de cette coupe. Un grand nombre de points noirs qui s'y dessinent sont évidemment les orifices de ces tubes.

Dans une autre coupe, on les voit se continuer de la membrane qui revêt la cavité du noyau pulpeux, et on les distingue parfaitement les uns des autres, à leur origine et pendant un court trajet, comme des troncs de jeunes arbres ; mais ils ne tardent pas à se serrer et à s'entrelacer par leurs sinuosités et leurs nom-

[1] Cette lame verticale et longitudinale comprend une partie de la cavité du noyau pulpeux et les deux côtés de la substance tubuleuse, supérieur et inférieur à cette cavité.

breuses ramifications, à la manière des branches et des rameaux d'une belle revenue de forêt.

Ici, leur direction transversale et très-peu oblique en avant, des parois du noyau pulpeux vers la surface convexe ou inférieure, qui est garnie d'émail, est très-remarquable.

Dans une incisive inférieure de fœtus de lapin, les canaux de la substance tubulée ont leurs orifices marqués d'un petit trait oblong, dans les parois du noyau pulpeux. Ces canaux ont généralement une direction transversale de dedans en dehors; ils se ramifient et s'anastomosent beaucoup dans leur court trajet, surtout en approchant de la surface. Ceux de l'extrémité de la dent vont en divergeant du sommet de la cavité du noyau pulpeux vers celui de la dent, qui est ovale parce qu'il n'est pas encore usé par la trituration.

Les tubes de la substance principale ont-ils des parois propres?

M. Retzius l'affirme et se fonde sur l'apparence d'une lame de dent faite par une section transversale de ces tubes. Leur lumière paraît un disque noir ou blanc, si on place la lame sur un corps de couleur foncée, et il en conclut qu'ils sont vides. Dans ce cas, elle est entourée d'un anneau qui se distingue de la gangue par une autre nuance, sous certains aspects. On ne l'en distingue pas quand on place la lame sur un corps opaque.

J. Müller dit qu'ils sont moins transparents que leur gangue. Ils paraissent blancs à la lumière réfléchie.

Les acides leur font perdre cette couleur. On peut en conclure que leurs parois renferment des sels calcaires.

Il est possible de les isoler, par le déchirement, du cartilage dont on a extrait, au moyen des acides, les sels calcaires qui paraissent se trouver particulièrement dans la gangue. Ils deviennent apparents dans des lamelles dentaires usées par le frottement et cuites dans une eau de potasse qui dissout le cartilage.

Peut-être que ces différentes assertions ne seront pas considérées comme incontestables. C'est ce qui leur est arrivé, au jugement de M. Dujardin, qui n'admet point de parois propres à ces canaux.

J'avoue que je ne puis que me ranger, à ce sujet, du côté de MM. Retzius et J. Müller, malgré le cas particulier que je fais de l'expérience de M. Dujardin, quand il s'agit d'observations microscopiques.

Les parois de ces canaux m'ont paru souvent indiquées par une ligne noire, distincte du vide ou du canal proprement dit et de la substance homogène qui lui sert de gangue.

La membrane qui tapisse les parois du noyau pulpeux, et qui enveloppe celui-ci, m'a paru se continuer dans ces canaux, en s'introduisant dans leurs embouchures.

Je sais parfaitement toutes les illusions qui peuvent tromper dans de pareilles observations; mais, en y ayant égard, je reste encore convaincu de la réalité et de l'exactitude de ces apparences.

A ces raisonnements *a posteriori* j'ajoute des motifs *a priori*, pour me convaincre de l'existence de ces parois propres. Ce sont les organes vitaux, sécrétoires et nutritifs de la substance tubulée, qui reçoivent les sucs nutritifs et les transmettent, à travers leurs parois, dans leurs intervalles. Ces canaux, à parois propres, composent le canevas primitif de la substance dentaire principale, et déterminent avec la membrane extérieure du bulbe, que Raschkow appelle *membrana præformativa*, la forme et les dimensions de la dent, autant qu'elles dépendent de la substance dentaire principale.

§ 5. DU BULBE DENTAIRE OU DE L'ORGANE PRODUCTEUR DE LA SUBSTANCE PRINCIPALE DES DENTS.

L'histoire du bulbe dentaire est inséparable de celle de la partie principale des dents. Toute dent simple, dont il est l'organe producteur, lui doit sa forme et ses dimensions, déterminées l'une et l'autre par le canevas qu'il lui fournit.

Le bulbe dentaire est ce noyau pulpeux, de couleur rouge ou jaunâtre, remplissant la cavité qui occupe, dans une dent toute formée, le centre de la couronne, se prolonge dans ses proéminences et se continue dans l'axe de ses racines.

Observé avec soin, dans nos dents de musaraignes adultes, le noyau pulpeux est d'autant plus petit que la dent est plus ancienne. Sa forme est exactement en petit celle de chaque dent; elle répète intérieurement la forme extérieure de la couronne et des racines; et comme ce noyau remplit complétement la cavité de la dent qui le renferme, sa forme et ses dimensions indiquent encore très-bien la forme et les dimensions de cette cavité.

Ainsi, relativement à son volume, ce noyau pulpeux est beaucoup plus grand dans une dent qui n'est pas complétement durcie. Il a la forme d'un cône simple un peu recourbé à sa pointe, dans une incisive inférieure de *sorex araneus;* tandis que ce même noyau présente dans le *sorex tetragonurus H.* trois petits cônes en arrière de son sommet recourbé, lesquels répondent exactement aux trois dents du tranchant de la couronne, qui caractérisent l'incisive de cette espèce.

Le noyau pulpeux, avec sa couleur rouge, s'aperçoit généralement sans préparation, à travers la substance osseuse de l'émail de ces dents, qui sont très-minces.

Dans l'incisive moyenne supérieure fourchue du *sorex tetragonurus H.* ou *vulgaris L.* il se prolonge dans l'axe de ces fourches. On le voit s'avancer de même dans l'axe de toutes les dentelures des molaires et s'étendre comme un canal étroit dans leurs racines.

Toutes ces productions du noyau pulpeux, qui répondent aux proéminences principales de la dent, et répètent en dedans sa forme extérieure, se réunissent à la base de la couronne où se trouve le centre d'action de ce noyau.

La paroi de la cavité simple ou compliquée du noyau pulpeux est tapissée par une membrane très-fine, irrégulièrement réticulée, ayant l'apparence noire, vue par transparence à un grossissement de quatre cents diamètres. On dirait une gaze noire qui enveloppe la substance gélatineuse, homogene, rouge ou jaunâtre, qui forme en apparence toute la masse du noyau pulpeux.

Cette membrane est évidemment en rapport immédiat avec les tubes de la substance principale, qui ont leur origine dans

la paroi de la cavité du bulbe qu'elle tapisse. Sa couleur apparente et sa constitution me font penser que c'est sa continuation qui produit cette ligne noire réticulée, indiquant la limite entre l'émail et la substance tubulée.

Le noyau pulpeux reçoit des vaisseaux sanguins considérables qui lui apportent les matériaux de sa sécrétion.

Le produit de cette sécrétion est versé dans la poche que forme ce noyau, qui en est, pour ainsi dire, le réservoir. Ce produit, dans une incisive de mâchoire inférieure de fœtus de lapin, conservé depuis longtemps dans l'esprit-de-vin, m'a paru composé de granulations blanches ayant, en quelque sorte, l'apparence de grains de fécule.

Je n'ai pu lui découvrir aucune forme, aucune organisation dans le noyau pulpeux des dents des musaraignes. Il m'a toujours paru, au premier aspect, une substance homogène, comme gélatineuse, rouge ou jaune, contenue dans une poche membraneuse très-mince, recevant, d'un côté, des vaisseaux sanguins par des branches que lui envoient ceux du canal dentaire, et donnant de toute sa surface, en contact avec les parois du canal qu'il remplit, des canaux qui pénètrent immédiatement dans la substance tubuleuse. Ces vaisseaux sanguins se distribuent principalement dans la partie centrale du bulbe ou du noyau pulpeux[1].

§ 6. CONCLUSIONS DES CONSIDÉRATIONS PRÉCÉDENTES SUR LA SUBSTANCE DENTAIRE PRINCIPALE ET SUR SON BULBE PRODUCTEUR.

On peut conclure de cette étude de la substance principale et du bulbe dentaire,

1° Que ce bulbe se compose de deux parties distinctes, ayant chacune une fonction particulière :

2° L'une, en rapport immédiat avec les vaisseaux sanguins qui arrivent à la capsule dentaire, est une sorte de follicule dont

[1] Voir, pour compléter l'idée que l'on doit se faire du bulbe, d'après mes vues et mes observations, le deuxième supplément imprimé à la suite de ce mémoire.

les parois sécrètent et versent, dans la cavité de ce follicule ou du noyau pulpeux, les matériaux de la substance tubuleuse : c'est à la fois l'organe préparateur et le réservoir de ces matériaux ;

3° L'autre partie du bulbe, qui enveloppe la première, est le canevas de la substance principale ou tubuleuse de la dent, lequel se durcit à mesure que les tubes capillaires dont il se compose reçoivent et absorbent les matériaux préparés par l'organe sécréteur de ce bulbe.

4° Cette théorie concilie, jusqu'à un certain point, l'ancienne, qui regardait la formation des dents comme une sécrétion de la surface du bulbe, avec celle adoptée récemment par M. Owen, qui admet que les dents croissent, comme les os, par intussusception, et que leur durcissement ne diffère de celui des os que parce qu'il est centripète dans les dents et centrifuge dans les os.

5° Le bulbe ne me paraît donc pas destiné tout entier à se transformer en dent; dans tous les cas, il en est réellement, en partie, l'organe sécréteur, en ce qu'il en prend les matériaux dans le sang et qu'il les verse dans sa cavité : ceci est conforme à l'ancienne théorie.

6° Ces matériaux passent à mesure à travers les parois de cet organe de sécrétion, et, en dehors de ces parois, dans le canevas tubuleux de la substance principale, dont la forme et les dimensions sont déterminées pour chaque dent et limitées, d'un côté, par la membrane qui tapisse les parois de la cavité du noyau pulpeux et, de l'autre, par celle qui se trouve, plus tard, enveloppée par l'émail de la couronne. Ces deux membranes sont continues et forment une poche renfermant ce canevas de la dent, et, plus tard, toute la substance tubuleuse.

7° L'arrangement des matériaux de la dent, sécrétés par le bulbe, n'est donc pas une simple transsudation de ces matériaux par couches, dont la première se ferait dans le vide de la capsule dentaire, entre le bulbe et la membrane émaillante, et dont

les autres se placeraient successivement dans la précédente, en se moulant simplement autour de la surface du bulbe.

8° Cet arrangement est déterminé par la forme, le nombre et la direction des tubes nutritifs qui composent la partie dentaire du bulbe et qui se chargent de ses matériaux.

9° La substance principale des dents ne paraît contenir aucun vaisseau sanguin en activité ; en cela elle diffère essentiellement des os.

Les dents, ne recevant pas de sang dans leur substance tubuleuse, prennent dans le noyau pulpeux leurs matériaux nutritifs.

La moelle des os pourrait, tout au plus, être comparée à une partie de la substance du noyau pulpeux ; aussi M. Owen appelle-t-il canal médullaire unique la cavité de ce noyau pulpeux d'une dent de mammifère.

10° Les dents simples, une fois durcies, ne croissent pas par développement, quoique se nourrissant par intussusception. La couche de matière inerte et cristalline qui revêt leur couronne en est une démonstration incontestable. Ce développement donnerait nécessairement plus d'extension à la surface recouverte par l'émail, le fendrait et le détacherait indubitablement.

11° L'accroissement et le durcissement des dents par intussusception ont, par cette circonstance et par l'absence de vaisseaux sanguins dans leur substance principale, deux caractères essentiels qui les distinguent de ceux des os : on ne saurait assez signaler le dernier, l'absence de vaisseaux sanguins dans la substance tubulée. Il constitue une immense différence entre cette substance et les os, riche en conséquences physiologiques, sur laquelle nous reviendrons en parlant du cément.

12° La partie glanduleuse d'un bulbe dentaire, dans une dent dont l'accroissement est borné, est d'autant plus petite, que cet accroissement est plus rapproché de son terme.

Le canevas de substance tubulée qui fait partie de ce même bulbe se durcit rapidement et sans qu'il reste de traces, le plus souvent, d'intermittences ou de périodes de ce durcissement et

de l'accroissement du bulbe par des couches apparentes des sels calcaires qui auraient été déposés successivement.

Au contraire, dans une dent dont l'accroissement est, pour ainsi dire, sans limites, telle qu'une incisive de rongeur ou une défense d'éléphant, la partie glanduleuse du noyau pulpeux reste toujours considérable, et celle qui devra former successivement le canevas de la dent ne peut manquer de se développer à mesure que celle qui l'a précédée a été durcie. Il y a, à cet égard, une succession de développements et de durcissements qui fait comprendre les couches successives de ces dents et les cônes emboîtés les uns dans les autres, si apparents dans les défenses fossiles d'éléphant.

§ 7. DE L'ÉMAIL DES DENTS.

ÉTAT ACTUEL DE LA SCIENCE.

On admet généralement que l'émail des dents est composé d'aiguilles prismatiques de sels calcaires, auxquelles se trouve mêlée une très-faible proportion (0,02) de parties animales [1].

Ces aiguilles sont disposées, ajoute-t-on, perpendiculairement à la surface de l'ivoire, et à peu près parallèlement les unes aux autres [2].

L'émail est déposé, dit G. Cuvier, sur la surface de la substance dite osseuse..... sous forme..... de petits cristaux, tous perpendiculaires à cette surface, et y formant, dans les premiers temps, une sorte de velours à brins fins.

M. J. Müller, en raclant l'émail de dessus la surface d'une mo-

[1] Voici les résultats de l'analyse de Berzélius:

Chaux phosphatée et fluor de calcium	88,5
Chaux carbonatée	8,0
Phosphate de magnésie	1,5
Alcali, eau, substance animale	2,0

[2] *Sur les molaires d'éléphant*, par G. Cuvier; *Recherches sur les ossements fossiles*, t. I, p. 34, édit. in-4°; Paris, 1821.

laire de veau, lorsqu'il était encore mou comme une bouillie, a constaté que cette matière était composée d'aiguilles pointues aux deux bouts [1].

Leur extrémité interne, pour celles du moins de la couche profonde, est engrenée dans de petits enfoncements et entre les petites proéminences qui se voient à la surface de la substance tubuleuse ou principale, et de la membrane qui la recouvre immédiatement.

C'est à M. Retzius que l'on doit cette dernière observation, et d'autres très-circonstanciées sur la composition microscopique de l'émail des dents de l'homme et des mammifères, qui complètent cette idée générale qu'on avait de l'émail avant ces recherches, ou qui la rectifient dans ce qu'elle avait de trop absolu.

Vues au microscope, les fibres de l'émail se montrent comme de petites aiguilles anguleuses de $\frac{1}{500}$ de ligne de diamètre. Suivant le même auteur, ces fibres n'ont pas toutes la même direction; les plus inférieures sont plus transversales; elles se redressent à mesure qu'on les observe plus haut, dans la partie triturante de la couronne. Dans quelques places, elles montrent d'élégantes inflexions parallèles [2]; dans d'autres, elles s'inclinent les unes contre les autres, de sorte qu'une partie de ces fibres aboutit par leur extrémité, tronquée obliquement, contre l'autre partie, sans arriver à la surface de la dent.

Dans la couronne des dents les plus aiguës et dans les parties qui répondent aux enfoncements de cette couronne, les aiguilles d'émail forment comme des tourbillons; dans d'autres places, elles sont pressées et confluentes les unes vers les autres. Il en résulte qu'on remarque des différences dans la forme et la direction des fibres d'émail d'une même dent, suivant la place où on les observe et les contours de cette dent.

[1] *Manuel de physiologie de l'homme*, t. I, 1re part. p. 386; Coblentz, 1837; 3e édit. allemande.

[2] Voir pl. XXI, fig. 7, du mémoire cité. Archives d'anatomie et de physiologie de J. Müller, pour 1837.

Dans la couronne des molaires de l'homme, il y a une couche extérieure de ces fibres qui sont engrenées, pour ainsi dire, comme des coins entre les autres, et qui n'atteignent pas jusqu'à l'ivoire.

M. Retzius a observé également cette sorte d'engrenage dans l'émail des dents molaires du cheval et des ruminants.

Ce savant n'a pu voir bien distinctement les fibres de l'émail de plusieurs mammifères; il lui a été également impossible de distinguer ces fibres dans l'émail des dents de reptiles ou de poissons [1].

Sous le rapport de sa formation, tous les physiologistes conviennent que l'émail est sécrété par une membrane que G. Cuvier regarde comme la lame interne de la capsule dentaire, que F. Cuvier [2] a décrite comme une membrane distincte, et qu'il désigne sous le nom de membrane émaillante, parce qu'il lui attribue la fonction exclusive de sécréter l'émail.

Cette membrane subsiste au fond de l'alvéole des incisives des rongeurs [3], pour revêtir d'émail la face inférieure de ces dents, à mesure qu'elles croissent de ce côté; elle revêt de même, d'une manière continue, l'extrémité inférieure du fût d'une dent de cheval aussi longtemps que ce fût croît, pour remplacer les portions de la couronne usées par la trituration.

L'émail est déposé sur la membrane qui revêt immédiatement la substance tubuleuse, membrane que G. Cuvier a signalée le premier, et qu'il regarde comme appartenant au bulbe.

« A mesure que ce petit mur (ce bulbe d'une lame dentaire) transsude l'ivoire, il se rapetisse, se retire en dedans et s'éloigne de la membrane, qui néanmoins lui sert toujours de tunique, mais de tunique commune, ainsi qu'à la matière qu'il a transsudée sous elle.

[1] Mémoire cité, p. 336.

[2] *Dents de mammifères*, p. 23.

[3] Voir M. le Dr Oudet, *Expériences sur l'accroissement continu et la reproduction des dents chez les lapins*; 2e mémoire.

« L'émail, de son côté, est déposé sur cette tunique par les productions de la lame interne de la capsule, et il la comprime tellement contre la substance interne, dite osseuse, qu'elle sépare de lui, que bientôt cette tunique devient imperceptible dans les portions durcies de la dent, ou du moins qu'elle n'y paraît que sur la coupe comme une ligne grisâtre, très-fine, qui sépare l'émail de la substance interne.

« Mais alors on voit toujours que c'est elle seule qui attache ces parties durcies au fond de la capsule; car, sans elle, il y aurait solution de continuité [1]. »

M. Retzius, qui semble attribuer la découverte de cette membrane, sur laquelle l'émail se dépose, à la chimie et à M. Berzélius, suppose, au contraire, qu'elle appartient à l'organe sécréteur de l'émail [2] décrit par MM. Purkinje et Raschkow. Cet organe a cependant été bien précisé par G. Cuvier, du moins pour les molaires d'éléphant.

« Quand on ouvre, dit-il, la capsule d'un germe de dent, on trouve les petites molécules du futur émail encore très-légèrement adhérentes à la face interne de cette capsule et s'en détachant aisément.

« Une partie nage, comme dans une liqueur, entre la capsule et le germe.

« Je n'ai pas vu les petites vésicules adhérentes à la capsule, d'où Hérissant prétend que sort la matière qui doit, en se desséchant, devenir émail.

« L'opinion de Hunter, que l'émail n'est que le sédiment du liquide interposé entre la dent et sa capsule, est inexacte, en ce qu'il fait trop abstraction de la membrane capsulaire, d'où sortent réellement les molécules de l'émail; mais il est très-vrai que ces molécules sont d'abord entre cette membrane et la dent avant de se coller à celle-ci [3]. »

[1] *Recherches sur les osssements fossiles*, t. I, p. 33 et 34.
[2] Mémoire cité, p. 833.
[3] G. C. p. 34 et 35.

M. Retzius admet aussi que ce dépôt se fait par couches et à des périodes successives, et que cette circonstance explique l'existence des lignes colorées en brun qui s'observent dans l'émail des dents récentes, et qui contournent la substance principale, qu'il appelle si improprement osseuse[1]; de même que les stries colorées que montre cette dernière substance, parallèlement au contour du noyau pulpeux, indiquent les différentes périodes de la formation de l'ivoire ou de la substance dentaire principale.

Cet ingénieux anatomiste pénètre plus avant encore dans la formation de l'émail. Il avait remarqué des stries transversales, partageant, souvent avec régularité, les prismes d'émail, stries qu'il a pu suivre dans une partie ou dans toute l'épaisseur de ces prismes. Cette observation lui a fait présumer que ces stries sont les traces des parois membraneuses des petites capsules qui renferment la substance inorganique de l'émail, dont les petits grains se placeraient en lignes droites ou courbes pour composer un filet d'émail.

Pour terminer cette partie historique de l'émail, je dois ajouter une observation précieuse de M. Flourens, c'est que, dans ses expériences sur la coloration des dents par la garance, il n'a jamais vu l'émail se colorer. Ce phénomène de nutrition n'a lieu que dans la substance principale[2].

§ 8. MES PROPRES OBSERVATIONS.

Elles ont eu pour sujet la disposition générale de l'émail, sa structure microscopique, sa coloration et sa formation dans les musaraignes, la chauve-souris commune, la taupe, parmi les insectivores; le rat d'eau, le campagnol, un fœtus de lapin et le cochon d'Inde parmi les rongeurs.

[1] G. C. p. 539.

[2] *Recherches sur le développement des os et des dents* (*Archives du Muséum*, t. II § IV, p. 383; Paris, 1841.)

§ 9. DISPOSITION GÉNÉRALE DE L'ÉMAIL.

Dans les molaires vraies et fausses, comme dans les incisives et les petites dents intermédiaires des musaraignes, il n'y a d'émail que dans la partie extérieure et libre de la couronne; celle qui repose sur le cément alvéolaire n'en a pas plus que les racines. L'émail cesse, en général, aux endroits où deux dents sont en contact par la base de la couronne, même lorsque celle-ci redevient libre avant de se terminer à son collet. Cette disposition de l'émail est la suite du contact possible de la membrane émaillante, qui passe d'une dent à l'autre, sans s'enfoncer profondément entre elles lorsque leur contact l'en empêche.

En général, l'émail est beaucoup plus épais dans chaque pointe; il va en diminuant d'épaisseur du sommet de chaque proéminence vers la base de la couronne.

Cela se voit très-bien dans une coupe verticale de molaire lorsque chaque proéminence se présente comme une surface triangulaire; on voit les deux côtés de l'angle saillant et libre recouverts d'une bande d'émail plus épaisse vers le sommet, et diminuant d'épaisseur en approchant du collet de la couronne, où cette bande finit.

J'avais cru à tort, dans mon premier travail, que l'émail formait la plus grande partie d'une dent de musaraigne; cette substance ne s'y trouve que dans les proportions ordinaires.

§ 10. STRUCTURE MICROSCOPIQUE DE L'ÉMAIL DANS LES DENTS DES MUSARAIGNES.

La structure microscopique de l'émail des dents des musaraignes est très-difficile à apercevoir distinctement, même à un grossissement de trois à quatre cents diamètres, et sur des pièces assez amincies pour être observées par transparence.

Les bandes d'émail m'ont présenté rarement ces prismes ré-

guliers, parallèles entre eux et perpendiculaires à la surface de la substance principale, qui doivent caractériser, en général, l'émail des dents de mammifères.

Dans certaines pièces, il m'a semblé voir comme des pavés oblongs, disposés en travers de cette bande, sans régularité bien remarquable. Dans d'autres places, on dirait apercevoir des moellons de grandeur variée, formant comme un mur. Dans d'autres places, les fibres de l'émail m'ont paru comme des poutres courbées en plusieurs sens, pressées les unes vers les autres et un peu inclinées vers la pointe de la dent, en traversant la bande d'émail de dedans en dehors. Dans d'autres encore, j'ai vu des stries régulières et parallèles indiquant la séparation des fibres de l'émail.

Dans d'autres rubans enfin de ce même émail, je n'ai pu distinguer aucune fibre ou prisme; tout était également transparent, sauf des apparences de réseaux et de vaisseaux dont je parlerai tout à l'heure.

Ces différences proviennent sans doute, en partie, des différences dans la direction des surfaces produites par l'usure de la dent ainsi préparée; mais elles me semblent encore indiquer une sorte d'irrégularité dans l'arrangement des couches successives des prismes qui composent l'émail. J'ai réussi, d'ailleurs, à voir que la surface de l'émail a l'apparence d'un réseau divisé en mailles rondes ou polygonales. Cet autre aspect indique d'une manière plus évidente la composition moléculaire de l'émail.

Dans les dents de la chauve-souris commune, l'émail montre dans quelques coupes des apparences de canaux parallèles arqués, ayant une direction transversale et oblique, assez distants. Lorsqu'on les compare aux tubes de la substance principale qui aboutissent près de la bande d'émail, on ne les en distingue que par leur courbure différente et par la ligne noire qui limite cette dernière substance. (Voir pl. IV, fig. 4 et verre G, n° 24 des préparat.) Parci par-là, on reconnaît des divisions transversales dans ces apparences de tubes. Ils ne forment d'ailleurs que la moindre partie

de la masse totale de l'émail, dont la composition moléculaire n'est pas bien distincte dans mes préparations. Dans ces mêmes préparations cependant, les tubes de la substance principale sont de la plus belle netteté dans toute leur étendue.

Ils forment un beau réseau, extrêmement fin à l'extrême limite de cette substance, et c'est de ce réseau que semblent partir les canaux apparents de l'émail.

Je retrouve les mêmes choses dans l'émail de la taupe : des apparences de canaux arqués qui traversent obliquement le ruban d'émail dans une partie de sa largeur, et dont l'origine est dans la ligne noire qui limite la substance principale, ou dans une bande finement réticulée qui forme son extrême limite.

Le bord antérieur d'une coupe verticale de canine du même animal a son ruban d'émail marqué de stries nombreuses, parallèles, transversales, ayant d'irrégulières et très-légères courbures assez nombreuses.

Ces stries forment un angle obtus avec les tubes plus directs de la substance principale, vers le sommet de la dent.

Dans une coupe verticale et longitudinale d'incisive de rat d'eau, les prismes d'émail sont beaucoup moins directement transverses que les tubes de la substance principale. Les stries qu'ils forment dans leurs lignes de jonction, partent d'une ligne noire compliquée, qui indique les restes de la membrane extérieure de la substance tubulée, et se portent assez obliquement en avant et en bas.

Chaque intervalle de deux stries, qui mesure en largeur un prisme d'émail, est sous-divisé plus ou moins évidemment par un grand nombre de lignes qui le traversent, et qui montrent que ce prisme est composé originairement de petits cubes arrangés en série [1].

L'émail a un tout autre aspect dans une lame extrêmement mince d'incisive de cochon d'Inde [2]; je n'y trouve aucune strie

[1] Voir les figures 5 et 6 de la planche IV, G et H des préparations.

[2] La même dont j'ai fait représenter, fig. 7, pl. IV, les orifices de la substance tubuleuse dans la paroi du noyau pulpeux. (Voir le verre K des préparations.)

régulière qui dessinerait et limiterait les prismes de cette substance. L'extrême bord du ruban d'émail s'est brisé, par-ci par-là, par une sorte de clivage indiquant des cubes qui formeraient la dernière couche ou la plus extérieure de ce ruban. Dans le reste de sa largeur, on ne voit que des traits fins, très-irréguliers, et comme des apparences de fibres contournées en tous sens.

§ 11. LIMITE DE L'ÉMAIL ET DE LA SUBSTANCE TUBULEUSE.

Assez souvent cette limite est bien distincte par une ligne simple ou compliquée comme une chaînette de couleur noire, reste de la membrane qui subsiste entre les deux substances de la dent. Au lieu de cette ligne noire, j'ai vu rarement une ligne transparente. Lorsque la structure des deux substances est évidente, le changement de l'une à l'autre indique bien la limite où l'une finit et où l'autre commence; cependant les tubes de la substance principale, ou leurs dernières divisions, se continuent quelquefois dans l'émail et se perdent entre ses fibres, en formant comme des apparences de franges; on aperçoit, d'ailleurs, dans quelques parties des bandes d'émail, comme des débris d'un réseau membraneux qui les pénétrerait.

§ 12. COLORATION DE L'ÉMAIL.

Dans les espèces de musaraignes à dents colorées, c'est presque exclusivement dans l'émail que se voit cette coloration. Rarement s'étend-elle, à travers toute la bande d'émail, jusque dans la substance tubuleuse. Cela se voit cependant dans quelques-unes des parties les plus saillantes et les plus colorées, où les deux rubans d'émail qui se rencontrent au sommet des pointes sont rouges, avec une bordure intérieure jaune, au moins dans toute leur largeur, puisque la coloration pénètre quelquefois, avec cette dernière nuance, dans la substance tubulée. Cette coloration va en diminuant de largeur et d'intensité à mesure qu'elle s'approche

du collet de la couronne et cesse souvent bien avant d'y arriver.

La coloration de la substance tubulée, qui a lieu dans quelques cas et par portions à la suite de celle de l'émail qui est coloré dans toute son épaisseur, est un nouvel indice de l'origine et de la marche que suit la matière colorante. Elle montre, d'autre part, que cette matière est distincte de la substance cristalline qui forme l'émail et qu'elle ne fait que la teindre.

Elle montre enfin qu'il peut y avoir absorbtion de cette matière colorante, par la surface de la substance principale, malgré la membrane qui la revêt et probablement par son intermédiaire.

§ 13. FORMATION DE L'ÉMAIL.

Nous avons vu, dans la partie historique concernant l'émail, que l'on convient généralement de la formation de cette substance par sécrétion d'une membrane recouvrant la couronne et déposant successivement à la surface de celle-ci et de son enveloppe membraneuse, différentes couches ou assises de molécules d'émail.

On trouverait, au besoin, une nouvelle preuve de l'exactitude de cette doctrine dans la dentition des musaraignes.

Aux époques de la première et de la seconde dentition de ces animaux, dont nous parlerons dans les paragraphes suivants, la membrane émaillante, qui se voit à l'extérieur des mâchoires, à travers la capsule dentaire qui recouvre la série des dents, est colorée lorsque les dents doivent être colorées; bien plus, l'étendue et la place de ces parties teintes correspondent exactement aux parties de ces dents qui doivent présenter la même coloration; elle reste, au contraire, blanche ou jaunâtre chez les jeunes musettes, dont les dents sont sans couleur.

Je suis bien tenté de regarder, avec M. Retzius, les molécules, souvent de forme évidemment cubique, dont les séries composent un prisme ou une fibre d'émail, comme composées d'une petite poche membraneuse contenant la substance inorganique de l'émail; et je comparerais volontiers ces petites capsules aux cellules de l'é-

piderme. Nous avons déjà indiqué l'analogie de fonction de ce dernier organe, relativement au derme, avec l'émail dans ses rapports avec la substance principale des dents.

La membrane émaillante se convertirait-elle en émail, ou, du moins entrerait-elle, vers la fin de sa fonction, dans cette juxtaposition des dernières couches des molécules de cette substance?

Je crois avoir la preuve du contraire dans un exemple de seconde dentition que j'ai sous les yeux. Les dents me paraissent terminées; la membrane émaillante me semble avoir déposé sur ces dents tout l'émail qui leur revient, et cependant cette membrane a pu en être détachée avec sa forme, qui est celle des dents, et sa couleur rouge bleuâtre, remarquable aux endroits précis où elle a coloré l'émail de ces dents.

§ 14. DU CÉMENT.

Le cément est une partie essentielle des dents composées ou de celles que G. Cuvier appelle demi-composées. Jusqu'à présent il n'a été considéré que comme l'une des substances dentaires proprement dites, c'est-à-dire comme faisant partie des dents, dans quelques cas déterminés, dans ceux entre autres que nous venons d'indiquer.

C'était, à notre avis du moins, en faire une histoire incomplète; sans doute parce qu'on a trop exclusivement étudié les dents isolées et hors de leurs rapports avec les mâchoires.

Lorsque ces rapports seront conservés, on ne pourra manquer de reconnaître des productions de même nature que le cément dentaire, qui enveloppent de toutes parts les racines des dents jusqu'à la couronne, qui ne font cependant pas essentiellement partie des mâchoires ni des dents; mais qui servent d'intermédiaire, de moyen de liaison entre les unes et les autres, et qui éprouvent, dans leur tissu intime, des changements correspondants à ceux des dents.

Dans les musaraignes, ces productions alvéolaires se développent

avec les dents, dont elles forment pour ainsi dire la gangue; elles se durcissent avec elles, lorsqu'elles ont été renouvelées simultanément, à l'époque de la seconde dentition. Nous croyons devoir désigner leur ensemble sous le nom de cément alvéolaire, en premier lieu, parce que leur substance est de la même nature osseuse que le cément dentaire; en second lieu, parce qu'elles servent de liaison, de véritable soudure entre la mâchoire et les dents.

L'histoire du cément alvéolaire, considéré sous ce point de vue, est encore à faire, si je ne me trompe.

L'idée que nous en donnerons, d'après nos propres observations, aura peut-être une heureuse influence sur la physiologie des dents et sur celles des os, dont elle nous montrera facilement les changements de structure intime, dans ce cas particulier, et les passages successifs de l'état mou, et, pour ainsi dire bulbeux, à l'état d'os solide.

§ 15. DU CÉMENT ALVÉOLAIRE DES MUSARAIGNES.

Nous avons étudié comparativement le *cément alvéolaire* des musaraignes à l'âge adulte et à l'époque de leur seconde dentition, lorsque les dents n'ont pas encore toutes leurs racines complétement durcies.

Il forme un organe distinct de la mâchoire et des dents, dont il est séparé par sa membrane particulière, par une sorte de périoste du cément. Cette membrane le recouvre de toutes parts, se replie autour des racines des dents, revêt le cément dans toute la surface qui touche aux parois de chaque grande cavité alvéolaire dans laquelle il est enchâssé, et vient doubler la muqueuse de la gencive au collet de la couronne, où la partie de cette membrane du cément qui a recouvert les racines se joint à celle qui a tapissé, au dedans de leur propre périoste, les parois alvéolaires des mâchoires. Chaque mâchoire a, en effet, de l'un et de l'autre côté, une rainure ou dépression, superficielle ou profonde, dans laquelle le cément est reçu avec les dents. Pour la mâchoire su-

périeure, cette rainure est superficielle et se sous-divise en celle de l'os intermaxillaire, qui reçoit les grosses incisives intermédiaires avec les petites latérales qui les suivent, et en celle de l'os maxillaire, qui reçoit les molaires avec le cément qui les assujettit.

Dans chaque branche de la mâchoire inférieure, la rainure alvéolaire aurait tout au plus une division pour la grande incisive; il m'a même paru que cette division n'existe pas.

Cette rainure alvéolaire des mâchoires n'est donc qu'une simple dépression plus ou moins superficielle ou profonde, dans laquelle leur périoste se continue, de manière que les phénomènes de la dentition se passent en dehors de ce périoste. Autrement, il serait difficile de comprendre la chute des premières dents chez les musaraignes, qui a lieu comme une espèce de mue, et la manière dont elles sont remplacées. Ce qui est évident et facilement démontrable chez les musaraignes, pourra servir à répandre la lumière sur les autres dentitions.

C'est la membrane du cément alvéolaire qui produit ces couches adventives de cément dentaire autour des racines des dents de l'homme, lesquelles croissent avec l'âge, et contribuent, en augmentant le volume de ces racines, à les pousser au dehors des alvéoles.

C'est cette même membrane dont l'activité nutritive continue, après que celle de la dent a cessé, qui tend encore, en augmentant l'épaisseur du cément alvéolaire, à combler les fosses dans lesquelles les racines des dents sont enfoncées. Elle les en fait sortir quelquefois complétement chez les personnes âgées ou chez les personnes vieillies et pétrifiées, pour ainsi dire, avant l'âge, qui demandent vainement des remèdes pour raffermir, disent-elles, leurs gencives. C'est encore au moyen de la membrane du cément et de son activité vitale, que les deux bords de la rainure alvéolaire occupée par les dents se rapprochent et se soudent après leur chute [1].

[1] Le cément alvéolaire est pour la racine ce que le cément dentaire est pour la cou-

L'organe du cément, qui répond à chacune des grandes cavités alvéolaires des musaraignes et les remplit, est, en quelque sorte, une poche à parois contournées, remplie elle-même d'une substance osseuse, de même nature que la mâchoire, dans laquelle on distingue de nombreuses petites taches noires, ovales, oblongues, rondes, irrégulières, comme disposées dans une gangue homogène, et telles qu'on les voit dans la substance des os.

Des branches vasculaires considérables, à ramifications assez nombreuses, qui se détachent, presque à angle droit, des vaisseaux sanguins du canal dentaire, pénètrent cette substance dans une direction uniforme, en se divisant assez régulièrement, et semblent la partager en cellules ou en compartiments.

Je suis, du reste, encore incertain si ces apparences de cloisons ramifiées ne sont formées que de vaisseaux sanguins, ou bien si elles ne renfermeraient pas aussi des canaux médullaires.

Je ferai à ce sujet des recherches ultérieures au moyen d'injections fines.

En décrivant l'aspect du cément dans une coupe verticale et longitudinale de l'une et de l'autre mâchoire, puis dans une coupe horizontale, enfin dans une coupe verticale transversale, je parviendrai peut-être à faire comprendre, dans tous ses détails, l'arrangement et la disposition de cet organe important de la dentition, ainsi que ses rapports avec les mâchoires et avec les dents, tels que je viens de les indiquer d'une manière générale.

Je démontrerai, de cette manière, son individualité distincte comme organe, et sa séparation de la substance même de la mâ-

ronne. Une couche mince de ce cément alvéolaire peut adhérer autour de la racine, et devenir de plus en plus épaisse avec l'âge, ainsi que M. Retzius l'a démontré chez l'homme.

On peut comparer le cément alvéolaire, tel que je le décris chez les musaraignes, au cortical osseux des molaires d'éléphant, dont la formation a été très-bien indiquée par G. Cuvier. (*Ossements fossiles*, t. I, p. 33, in-4°; Paris, 1821.) L'illustre auteur attribue cette formation à des replis de la membrane interne de la capsule.

Chez les animaux dont les dents croissent par le bas, à mesure que la couronne s'use par le haut, tels que les ruminants, le cheval, la membrane capsulaire subsiste même après que la couronne est sortie de l'alvéole, ainsi que l'a montré M. Flourens. (*Recherches sur le développement des os et des dents*, Archives du muséum, t. II, pl. II, fig. 1, 2 et 3; Paris, 1841.

choire, que j'ai observée de la manière la plus évidente, principalement à l'époque de la seconde dentition.

§ 16. VUE DU CÉMENT ALVÉOLAIRE DANS UNE COUPE VERTICALE ET LONGITUDINALE DE LA MÂCHOIRE INFÉRIEURE DE *SOREX DAUBENTONII*.

On aperçoit, dans cette coupe, les parties du cément qui sont entre les racines d'une même dent ou de deux dents différentes, et qui s'élèvent jusque sous leur couronne. Elles se présentent, dans ce cas, comme des productions en forme de massue, s'élevant d'une tige commune horizontale (la partie inférieure de l'organe du cément qui touche au canal dentaire) pour s'introduire, comme des chevilles, sous les dents ou entre elles, jusqu'au collet de leur couronne.

Seulement, il ne faudra pas oublier que, dans cette description, nous ne parlerons pas des portions de cément qui s'élèvent sur les côtes des racines, et qui ont été enlevées par les moyens employés pour amincir la lame soumise à l'observation.

Nous avons fait figurer cette lame, afin que l'on puisse suivre notre description au moyen de cette figure [1].

La première portion du cément que l'on aperçoit dans cette coupe de la mâchoire inférieure est celle qui appartient à l'incisive. Elle se présente comme une surface oblongue (pl. I, fig. 1, *a*), qui s'avance ici horizontalement jusqu'au niveau du bord antérieur de la première fausse molaire. Cette production du cément forme un crochet qui fait saillie, pour ainsi dire, dans la dent, et autour duquel la cavité du bulbe se replie avec ses parois dentaires. Ce crochet sert admirablement à assujettir cette grande dent, qui fait une longue saillie hors de la mâchoire, et résisterait, entre autres, parfaitement aux efforts directs qui tendraient à arracher cette incisive.

La seconde de ces productions alvéolaires du cément, qui appartient à la première fausse molaire, est bilobée. La branche

[1] Voir planche I, figure 1.

inférieure se place entre l'incisive, sur laquelle cette dent repose, et la très-courte racine antérieure de la première fausse molaire; l'autre lobe, et le pédicule dont ces lobes sont une division, remplissent exactement l'intervalle intercepté en avant par les deux racines et la couronne de cette dent, et, en arrière, par la racine postérieure et l'incisive sur laquelle elle est couchée.

La troisième de ces productions alvéolaires appartient à la seconde fausse molaire; elle a une forme analogue à la précédente. Son pédicule s'élève entre les racines postérieures des deux fausses molaires, s'élargit et se divise en deux lobes, dont le postérieur, de beaucoup le plus grand, remplit le vide que laisse la petite racine de cette dent en avant, la concavité de la couronne vers le haut et sa grande racine en arrière.

Une quatrième de ces productions alvéolaires garnit le petit espace qui sépare la racine postérieure de la seconde fausse molaire, de la racine antérieure de la première vraie molaire.

Vient ensuite la cinquième, qui remplit l'intervalle des deux racines et de la concavité inférieure de la couronne de cette dernière dent. Comme les précédentes, elle s'élargit à mesure, en s'élevant, pour s'adapter exactement aux contours du vide qu'elle doit combler.

Il y en a une sixième entre la première vraie molaire et la seconde. Une septième, un peu bilobée à son sommet, entre les deux racines et la couronne de cette seconde grosse molaire. Une huitième pour l'intervalle qui existe entre la deuxième vraie molaire et la troisième, et une neuvième pour le vide qu'interceptent les racines de cette dernière dent.

Toutes ces productions s'élèvent verticalement, ou plus ou moins obliquement en avant, d'une base horizontale de même nature, qui règne immédiatement au-dessus du canal dentaire [1].

Dans la chauve-souris et la taupe, la coupe longitudinale et

[1] Dans l'exemplaire qui a servi au dessin qui représente cette coupe du cément, il y a une large fente oblongue qui répond au canal dentaire, dont les parois ont été enlevées par l'amincissement de cette mâchoire.

verticale des mâchoires montre les productions du cément alvéolaire, sa disposition générale et la nature de sa substance comme très-analogues à celles que nous venons de décrire dans les musaraignes, dont la dentition est achevée ou ancienne.

§ 16. ASPECT DU CÉMENT ALVÉOLAIRE À LA FIN DE LA SECONDE DENTITION, LORSQUE LES COURONNES DES DENTS SONT ENCORE COUVERTES D'UNE MEMBRANE EXTÉRIEURE [1].

Je parlerai dans l'un des paragraphes suivants de cette seconde dentition des musaraignes et de la membrane capsulaire interieure en dedans de laquelle elle se passe. En ce moment, je la suppose existante, et j'en observe les effets dans la nature intime du cément alvéolaire. Au moment où les secondes dents viennent de se former, et où l'on trouve plusieurs de leurs racines, encore molles, dans une grande portion de leur étendue, ou n'enveloppant leur noyau pulpeux que d'un étui très-mince de substance tubuleuse, les productions du cément, qui s'enchevêtrent avec les racines qui les enveloppent de toutes parts, n'ont pas l'aspect que nous venons de décrire. Partout où elles touchent aux racines et à la couronne, leur coupe montre [2] celle de la membrane qui recouvre le cément comme une ligne épaisse de couleur jaunâtre, semblable à celle du noyau pulpeux des dents.

De cette ligne ou de cette membrane épaisse qui sépare le cément et ses productions de la dent dont elle enveloppe les racines, partent des lignes plus étroites de la même membrane, qui vont transversalement d'un côté à l'autre d'une de ces productions du cément, qui s'élèvent entre deux racines d'une même dent ou de deux dents. Dans les productions les plus larges, elles aboutissent à un vaisseau principal que l'on observe dans l'axe de ces productions.

[1] La mâchoire a été usée verticalement et longitudinalement; elle appartenait à un *sorex carinatus*, HERM. ou *Daubentonii*, ERXL.

[2] Dans une mâchoire inférieure amincie, verre A des préparations.

Dans une autre mâchoire inférieure de *sorex Daubentonii*, Erxl. dont la deuxième dentition était vers sa fin (verre B de mes préparations, figurée pl. I, fig. 3), les corpuscules osseux ne forment encore que des taches nuageuses mal terminées, donnant au fond de la substance du cément une couleur brune ou noirâtre non uniforme, mais piquetée de différentes nuances de ces teintes brunes ou noires.

Vues par transparence, à un grossissement plus considérable de trois cents diamètres, les parties assez amincies des productions du cément montrent ces corpuscules comme des amas de granules assez inégaux en volume, irréguliers pour la forme, qui s'approche cependant de la ronde ou de l'ovale, dont la substance est de couleur jaunâtre, et semble circonscrite par une ligne extrêmement fine, de couleur plus foncée, qui paraît la coupe de leur enveloppe membraneuse.

Ces corpuscules sont dans une gangue de couleur plus claire.

§ 17. Aspect du cément alvéolaire à l'instant où la seconde dentition vient de se terminer.

(Même coupe que la précédente.)

Dans une mâchoire (verre A des préparations) qui a appartenu à un individu dont la seconde dentition venait de se terminer, à en juger par les pointes extrêmement acérées de ses dents, et parce qu'elles étaient à découvert, j'ai trouvé le cément, ainsi que je le présumais d'avance, proportionnément plus avancé dans son ossification. Les parties de ce cément, qui semblent comme séparées dans des cases particulières par des cloisons, ou des branches et des rameaux vasculaires, sont comme sous-divisées en petites masses globuleuses, ayant l'apparence d'un poudingue, et dans ces petites masses s'aperçoivent les corpuscules rayonnés, ou les petites cellules qui viennent de se former.

Il en résulte que l'aire que présente la coupe des productions du cément, dans le sens latéral, est comme divisé par des cloisons en petites loges, dans lesquelles se dépose la matière cartilagineuse, puis osseuse, qui est encore ici brillante et transparente.

A mesure que l'ossification de ces bulbes du cément avance, la membrane, sans doute très-vasculaire, qui enveloppe toutes les productions du cément, et ses divisions qui traversent ces productions, s'amincissent, se rapetissent considérablement, et finissent par prendre l'aspect vasculaire ou celui d'une gaze, tel que nous l'avons annoncé en premier lieu.

§ 18. VUE DU CÉMENT ALVÉOLAIRE DANS UNE COUPE VERTICALE ET LONGITUDINALE DE LA MÂCHOIRE SUPÉRIEURE DE *SOREX TETRAGONURUS, HERM.*

Les dents de la mâchoire supérieure ayant d'autres formes et d'autres dispositions relativement aux os maxillaires et intermaxillaires, les productions du cément alvéolaire qui doit les assujettir sont aussi très-différentes.

Elles se présentent encore plus évidemment dans une coupe verticale et longitudinale, comme des branches qui s'élèvent d'une tige commune. Il y en a une première entre la longue racine antérieure et la très-courte racine postérieure de l'incisive bifurquée.

Une autre vient se placer en arrière de la racine postérieure de cette incisive, sous la couronne de la première petite dent intermédiaire. Elle est bornée, d'un autre côté, par la racine unique de cette petite dent qui s'élève en forme d'*s* de la partie la plus reculée de la couronne.

Une troisième de ces productions descend à la rencontre de la couronne de la seconde de ces petites dents; elle est entre la racine de la première et sa propre racine, qui est courte.

Les trois autres petites dents suivantes, qui n'ont pas de racine, présentent une simple concavité à leur face adhérente,

que ces productions alvéolaires, qui sont ici très-courtes, viennent remplir.

Celle de ces productions qui descend à la rencontre de la cinquième de ces dents, qui est rudimentaire, sert en même temps de limite antérieure et de moyen d'adhésion pour la première racine de la molaire principale et le crochet que la couronne fait en avant de cette racine.

Vient ensuite une large production, un peu festonnée à son extrémité, qui descend à la rencontre de la couronne de cette molaire principale et remplit l'intervalle de ses deux racines, dont la dernière est courte.

Les trois molaires en ont dans leurs intervalles et contre la concavité adhérente de leur couronne, entre leurs courtes racines. Celles de la dernière molaire sont très-peu saillantes et proportionnées à la très-grande brièveté des racines.

La dernière de ces productions est un petit lobe arrondi, qui vient se placer dans une partie rentrante que fait un crochet postérieur de la couronne avec la seconde racine.

Au reste, il ne faut pas oublier que ces descriptions détaillées sont faites d'après des coupes ou sur des lames amincies, et produites par le frottement et l'usure des deux côtés des mâchoires, et que, les dents de la supérieure n'étant pas sur un même plan, elles peuvent montrer des différences suivant le degré d'usure d'un côté ou d'un autre.

Dans une mâchoire dont les pointes des dents sont très-aiguës, et m'ont fait présumer d'avance que j'avais sous les yeux un exemple de seconde dentition récente, il y a deux de ces productions alvéolaires qui descendent très-bas, entre les couronnes de la deuxième et de la troisième, entre celle-ci et la quatrième vraies molaires. Ces productions sont ovales, se terminent par une pointe très-aiguë et tiennent par un pédicule étroit qui pénètre à travers le petit intervalle que laissent entre elles les bases des couronnes de ces dents : ce sont des parties libres de la gencive.

§ 19. VUE DU CÉMENT ALVÉOLAIRE DANS UNE MÂCHOIRE INFÉRIEURE USÉE HORIZONTALEMENT PAR LE HAUT ET PAR LE BAS[1].

Coupe inférieure.

Après l'incisive dont le bulbe a été mis à découvert dans une grande partie de sa longueur, on voit successivement la coupe de huit racines de différentes formes.

Au milieu de chaque racine, se voit le disque ou la coupe du noyau pulpeux, qui se présente comme une substance jaune, uniforme. Dans la troisième de ces racines, le noyau pulpeux est entouré d'un premier cercle très-étroit qui, vu par transparence, est transparent lui-même. Dans toutes les autres, chaque disque central qui appartient au bulbe est dans un anneau assez large de substance dentaire qui, vue par réflexion, a un aspect bleuâtre.

Cet anneau, qui montre l'épaisseur de la substance dentaire, est enchâssé dans un anneau blanchâtre, inégalement épais dans son pourtour, qui répond à la membrane du cément qui le circonscrit du côté de la dent. Ces derniers anneaux se continuent sur les côtés avec un ruban de la même membrane, qui limite le même cément sur les côtés de la mâchoire.

C'est dans cette poche générale, ainsi circonscrite du coté des dents et du côté de la grande cavité alvéolaire de la mâchoire, dans laquelle elle est enchâssée, que se forme la matière osseuse du cément. Tout le vide de cette poche membraneuse se remplit successivement, et à mesure du progrès de l'ossification, de cette matière osseuse; en même temps la membrane du cément diminue d'épaisseur, et finit par devenir extrêmement mince.

[1] Cette mâchoire appartient à une musaraigne qui venait d'achever sa seconde dentition, la même dont nous avons décrit le cément dans le paragraphe précédent, tel qu'il se présente dans une coupe verticale et longitudinale.

Dans la mâchoire que nous avons sous les yeux, et dont l'ossification n'est pas terminée, cette membrane du cément est très-épaisse, et le cément qu'elle renferme dans ses replis forme des bandes qui ne sont pas plus larges; elles s'en distinguent nettement par leur transparence, qui indique la présence des sels calcaires dont leur substance est pénétrée.

Nous avons décrit dans l'incisive une production ovale de cément qui la pénètre, ou du moins autour de laquelle sa racine se replie. Cette production se montre ici comme une surface ovale composée d'une partie centrale de cette forme, qui est la substance osseuse du cément et de la membrane qui l'entoure. Il y a d'ailleurs une ligne colorée très-étroite entre la membrane du cément et le cément lui-même, qui distingue la limite extrême de cette membrane de sa substance même, ou du reste de son épaisseur, dont la coupe est d'une autre couleur et homogène.

La vue de la coupe supérieure de cette même mâchoire montre celle de la membrane du cément qui règne parallèlement au côté interne de la mâchoire, entre la lame osseuse de cette mâchoire en dehors et une couche de cément en dedans. Celle-ci se continue avec les productions transversales qui pénètrent entre les dents, et qui sont sécrétées par les fourreaux de la membrane du cément qui entoure les racines.

Toutes les parties osseuses du cément montrent ici les petites taches noires qui les caractérisent; ces taches sont oblongues, irrégulières, avec un prolongement en forme de queue, dans une gangue homogène blanche : on dirait voir une fourrure d'hermine.

D'ailleurs la même lame qui conserve plusieurs couches de ces taches, en montre de très-apparentes, ce sont les superficielles, et, de plus, il y en a de moins prononcées dans la profondeur.

Comparées immédiatement à celles du tissu de la mâchoire inférieure, on n'y voit aucune différence essentielle : ces dernières ont absolument le même aspect. Ces taches répondent

évidemment à ce que MM. Purkinje et Deutsch ont appelé corpuscules osseux.

Le fond dans lequel ces corpuscules sont comme dispersés et se dessinent est clair et transparent; mais cette transparence n'est pas pure; on y voit comme des granulations ou même un réseau foncé, dans la pièce que j'ai sous les yeux.

Dans une lame plus amincie, ces taches de la mâchoire inférieure sont moins nombreuses et le fond plus clair.

Leur aspect général est absolument le même, seulement elles paraissent plus isolées de leur gangue, et l'on ne remarque pas la moindre trace de liaison vasculaire entre elles, ni avec cette gangue.

De grosses branches vasculaires pénètrent ce tissu avec une sorte de régularité.

En se rappelant que nous avons vu toute la gangue du cément s'élever au-dessus du canal dentaire et des troncs vasculaires qui le parcourent, on se représentera facilement des branches partant de ce tronc et s'avançant perpendiculairement au milieu des productions du cément, comme celles qui pénètrent dans les racines et les bulbes. Il en part, dans une direction transversale, des rameaux qui vont, dans ce dernier cas, d'un bord de ces productions à l'autre, qui se rendent de ce même pourtour dans la branche centrale, et ces derniers rameaux se divisent peu.

Les parois de ces troncs vasculaires et de leurs divisions semblent une gaze noire, sans doute, en partie, parce que ces vaisseaux se confondent avec la membrane vasculaire qui circonscrit et enveloppe le cément de toutes parts. Tous les contours du cément qui sont en contact avec les racines ou la base des couronnes sont garnis et recouverts de cette apparence de gaze. On la voit même envoyer des productions libres entre les crochets correspondants de deux couronnes. L'enveloppe vasculaire du cément est donc évidemment l'organe producteur de la gencive, au-dessous de la muqueuse buccale. Après avoir servi à lier le cément à la racine, cette enveloppe se continue autour

de la couronne et se présente à découvert autour d'elle ou entre plusieurs couronnes.

Cette enveloppe vasculaire, cette membrane qui circonscrit le cément et le sépare de la dent, sert-elle à le lier à cette dent d'une manière organique? Je n'en doute pas.

C'est sans doute cette membrane, ainsi que nous l'avons dit, qui dépose sur les racines les couches de cément dentaire, signalées dans un certain nombre de mammifères et même chez l'homme.

Chez les musaraignes, j'ai vu ce cortical osseux ou ce cément dentaire à l'extrémité des racines. Il y a dans ce cas des ramuscules extrêmement fins qui partent de la face externe de la membrane du cément.

On en voit aussi, par-ci par-là, sous la couronne. Dans ce dernier cas, les corpuscules me paraissaient liés entre eux par un réseau vasculaire, composé de canaux d'une finesse extrême.

Le cément alvéolaire est séparé de la mâchoire par le périoste de la cavité générale qui le renferme; j'en trouve la preuve dans le renouvellement de ce cément à l'époque de la seconde dentition.

Mais la membrane du cément et le périoste étant de même nature, à en juger par leurs produits, ces deux membranes doivent se souder et se confondre avec le temps. C'est sans doute ce qui arrive à toute la portion inférieure de la membrane du cément alvéolaire qui est en contact avec le périoste de la grande cavité alvéolaire de la mâchoire, qui reçoit la masse cémentaire ou la gangue de toutes les dents.

§ 20. COUPE VERTICALE ET TRANSVERSALE DU CÉMENT ALVÉOLAIRE DANS UNE BRANCHE DE MÂCHOIRE INFÉRIEURE DE *SOREX DAUBENTONII*, DONT LA SECONDE DENTITION ÉTAIT TERMINÉE.

C'est dans ces coupes, qui donnent à la fois l'épaisseur des dents, du cément et de la mâchoire, à l'époque du moins de la

seconde dentition, qu'on peut le mieux saisir les rapports du cément alvéolaire avec la rainure alvéolaire de la mâchoire.

Mais pour se faire, de cette manière, une idée juste de ces rapports, il faudrait multiplier ces coupes et les comparer aux différentes époques de la première et de la seconde dentition, et lorsque la dentition est achevée.

Je vais en décrire trois, en premier lieu, telles qu'elles se montrent par leur face antérieure; elles appartiennent à une[1] mâchoire inférieure dont la dentition est achevée.

Dans une coupe faite dans le point qui répond à la lettre (*a*) de la figure 1, planche I, on voit celle du prolongement du cément autour duquel se replie l'incisive.

C'est un véritable engrenage de cette production ovalaire du cément dans une rainure de cette dent, qui se replie sur elle-même, en formant les deux tiers d'un anneau. La cavité du noyau pulpeux dessine le même arc dans l'intérieur de la substance dentaire. Quant à la production du cément, elle est entourée d'une bande brune, vue par transparence, qui répond au périoste du cément.

Cette bande est très-épaisse dans toute sa portion en contact avec la dent; elle est très-mince dans celle qui est en contact avec la mâchoire, dont le procédé de préparation ne montre ici qu'une lame très-mince. Le périoste du cément se distingue à peine de celui de la mâchoire.

Le noyau du cément, que cette bande membraneuse circonscrit, se montre, vu par réflexion, à un grossissement de quatre-vingts diamètres, comme une pulpe blanchâtre; vue par réfraction, sa substance est demi-transparente, avec une apparence de cellule opaque dans son axe. Cette cellule est oblongue, transversale, et de sa circonférence rayonnent des traits obscurs qui s'étendent vers la circonférence du cément: c'est sans doute la coupe d'un vaisseau principal qui fait à peu près son axe, s'y ramifie et se dessine en noir sur ce fond demi-transparent.

[1] Voir leur préparation n^os^ 13, 14, 15 et 16, verre D.

On voit d'ailleurs très-bien, dans cette coupe, comment la dent déborde la mâchoire et recouvre son extrême bord.

Une seconde coupe a été faite plus en arrière dans l'espace marqué par un *y* dans la figure 1, planche I; elle montre à la fois la pointe principale de la première vraie molaire, sa racine et la coupe de la racine de l'incisive.

La couronne de la molaire montre, par sa couleur blanche, qu'elle était complétement durcie; mais sa racine, qui est encore d'un blanc-jaunâtre, est moins chargée de sels calcaires.

La couronne déborde la mâchoire d'une manière évidente, en faisant un crochet en dehors de la paroi externe de celle-ci.

La coupe de la racine de l'incisive montre, au centre, le disque assez réduit de son bulbe opaque et de couleur foncée; un anneau épais, blanc de perle, demi-transparent, qui est la coupe de la dent; un anneau extérieur opaque, brun, qui est la coupe du périoste du cément. Ce périoste touche extérieurement à celui de la mâchoire et supérieurement à celui qui entoure l'extrémité de la racine de la première vraie molaire. Ce dernier périoste entoure la racine jusqu'à la couronne, se replie sous celle-ci, sous ses crochets qui débordent la mâchoire et devient contigu au périoste externe de celle-ci, avec lequel on dirait même qu'il se continue.

Des ramifications vasculaires partent comme des rayons de la circonférence du périoste de l'incisive, et se divisent dans le cément et la substance osseuse de la mâchoire, qui sont ici réunis et confondus en une seule substance osseuse : toute limite séparant le cément et la substance osseuse de la mâchoire a disparu.

Dans une troisième coupe, qui répond à la seconde vraie molaire et qui montre une partie de sa racine postérieure à son origine, puis, un peu plus loin, dans toute sa largeur, on voit un trou à l'extrémité de cette racine, qui répond au canal dentaire.

Ici je crois apercevoir encore la trace, par la présence et la

direction de troncs en apparence vasculaires, de la séparation du cément alvéolaire et de la substance de la mâchoire. Ces deux organes se distinguent par une nuance de couleur vus par réflexion, ou par le degré de transparence vus par transparence.

§ 21. COUPE VERTICALE ET TRANSVERSALE D'UNE MÂCHOIRE INFÉRIEURE À LA HAUTEUR DE LA DERNIÈRE MOLAIRE, À L'ÉPOQUE DE LA SECONDE DENTITION.

Si l'on compare les coupes d'une dentition achevée, sinon ancienne, dans lesquelles le cément alvéolaire et la substance osseuse de la mâchoire sont presque confondus ou très-peu distincts, avec celles d'une seconde dentition qui est près de son terme, mais dont la membrane capsulaire, qui recouvre les dents à l'extérieur, existe encore, on verra des circonstances pleines d'intérêt dans les limites précises et le degré de durcissement du cément alvéolaire.

Je les ai décrites, entre autres, d'après une coupe verticale et longitudinale de la dernière molaire de la même mâchoire inférieure de *sorex Daubentonii* (Erxl), dont j'ai fait préparer le reste pour en observer la coupe longitudinale et verticale.

La figure 4, planche I, montre cette coupe d'un côté.

La racine visible de cette molaire se dessine dans toute son étendue et dans toute sa forme.

On la voit même se dilater vers son extrémité, et en dedans de cette dilatation elle montre une échancrure, dans laquelle il y a une tache rouge qui pourrait répondre aux vaisseaux du canal dentaire. Il y a plus bas et autour de cette racine une membrane blanche que je regarde comme l'enveloppe du cément alvéolaire, qui d'ailleurs est encore autour de la racine et empêche de voir sa coupe.

Le cément alvéolaire se distingue très-bien de la substance de la mâchoire par les taches transparentes qui sont les premières parties de ce cément chargées de sels calcaires, et par un trait

coloré indiquant la coupe de la membrane qui le sépare de la mâchoire. Ce trait doit comprendre à la fois le périoste interne de la mâchoire et le périoste externe du cément alvéolaire, celui qui est en rapport avec les parois de la grande cavité qui reçoit le cément alvéolaire et les dents.

La substance de la mâchoire a, sous ce grossissement, une apparence opaque, homogène, grisâtre; elle est recouverte extérieurement par une ligne rouge qui appartient à la lame interne de son périoste externe, tandis que la lame externe est grise. On voit des lambeaux de ces deux lames dans la préparation que je décris et dans la figure 4, qui la représente.

§ 22. RÉSUMÉ SUR LA STRUCTURE INTIME DU CÉMENT ALVÉOLAIRE.

Les détails descriptifs, pour ainsi dire minutieux, dans lesquels nous venons d'entrer, nous permettront de résumer succinctement ce que nous avons à dire pour remplir le titre de ce paragraphe.

La structure intime du cément alvéolaire est analogue à celle des os des mâchoires.

Sa substance se compose de petites cellules[1] qui se présentent comme de petites taches de forme irrégulière, rarement rondes, plutôt ovales ou oblongues, se prolongeant aux deux bouts par un ou plusieurs filets.

Dans quelques exemplaires, ces taches paraissent noires, avec un contour formé d'une ligne blanche transparente; dans d'autres,

[1] M. Retzius a bien connu ces petites cellules. Il dit avoir pu observer, sans indiquer dans quel animal, les canaux des os, leurs communications avec les canaux médullaires, les réseaux que forment leurs anastomoses et leur terminaison dans les petites cellules que MM. Purkinje et Dentch avaient appelées corpuscules, mais qui sont, ajoute-t-il, des cavités creusées dans la substance du cartilage ou de l'os, et qui renferment, en partie, un fluide transparent, en partie, un dépôt de sels calcaires. Pour parvenir à cette intuition, M. Retzius avait coupé des tranches assez minces des dents en position dans leur alvéole. (Ouvrage cité, page 556, note, année 1837.) MM. Serres et Doyère ont mis hors de doute, par leurs expériences, la structure celluleuse de ces prétendus corpuscules. (*Compte rendu de la séance de l'Académie des sciences, du 25 février 1842*, p. 7.)

leur contour est une ligne noire et l'intérieur est blanc. Ces différences dépendent sans doute des degrés d'ossification, qui font disparaître ou laissent subsister leurs parois membraneuses.

Dans quelques cas, on voit rayonner de leur contour beaucoup de très-fins traits qui leur donnent une apparence étoilée, et elles paraissent au milieu d'un réseau extrêmement fin, dont on n'aperçoit les cordons noirs, très-déliés, qu'avec beaucoup d'attention, au moyen d'un grossissement considérable.

Dans une dentition ancienne, ou du moins bien terminée, le cément alvéolaire est soudé et confondu avec la substance osseuse des mâchoires, et sa propre substance s'en distingue difficilement. Les petites taches qui répondent aux cellules de Retzius m'ont paru peut-être moins nombreuses et plus allongées.

La membrane du cément, sorte de périoste, est mince, noire dans cette dentition terminée, et semble se continuer, dans plusieurs cas, avec les ramifications vasculaires qui partent de cette membrane ou viennent y aboutir. Le cément alvéolaire est évidemment pénétré par des branches vasculaires qui partent des vaisseaux du canal dentaire; mais la membrane qui revêt de toutes parts ce cément, m'a paru être le principal centre de l'activité nutritive des productions du cément, et le point de départ ou l'aboutissant de ses principaux vaisseaux.

Je dirai, dans une prochaine lecture, en parlant du renouvellement de ce cément alvéolaire chez les musaraignes, à l'époque du renouvellement simultané de toutes les dents, qu'il se forme et se durcit, pour ainsi dire, à la manière d'un bois de cerf.

Les détails dans lesquels je suis entré, au sujet de sa disposition générale et de sa structure comparées aux différentes époques que j'ai signalées, dans ma lecture d'aujourd'hui, d'une dentition achevée, d'une dentition usée et d'une dentition qui se renouvelle, pourront déjà faire comprendre cette proposition.

§ 23. DES RAPPORTS DES DENTS AVEC LES MÂCHOIRES.

Je ne parlerai pas de ces rapports, comme moyens mécaniques plus ou moins favorables à la préhension et à la mastication des aliments; mais comme servant à expliquer l'évolution, les adhérences et la succession des dents.

On trouve déjà quelques données sur ce sujet dans le mémoire de Daubenton sur les musaraignes, communiqué à l'Académie des sciences en 1756[1]. La description des dents que comprend ce mémoire montre l'observateur exact et judicieux qui sait pénétrer dans les plus minutieux détails, après avoir reconnu l'importance dont ils sont susceptibles.

La planche II donne la figure du système de dentition du *sorex araneus* fortement grossie.

C'est peut-être le premier exemple d'une représentation exacte et très-instructive de système dentaire d'un mammifère, accompagné d'une description très-circonstanciée.

Selon Daubenton, aucune de ces dents ne mérite le nom d'incisives ni de canines; il préfère les désigner par numéros, en commençant par la plus avancée.

Il compare les molaires aux mâchelières des chats et des chiens, et fait remarquer leur adhérence extraordinaire. Cependant, selon Daubenton, les plus grosses dents de la mâchoire supérieure n'auraient point de racines : ce sont les trois premières vraies molaires, tandis que la dernière en aurait; mais il a reconnu des racines dans les six dents de chaque branche mandibulaire.

Enfin Daubenton a trouvé de l'analogie entre les grosses dents antérieures de la mâchoire inférieure et les incisives des rongeurs. Si je fais cette dernière citation, qui n'est fondée que sur une apparence de forme assez éloignée, c'est pour montrer que Daubenton aussi avait cru saisir quelques rapports entre les insectivores et les rongeurs.

[1] Cité dans ma première communication.

J'avais été frappé, dès mes premières observations sur les dents des musaraignes, de ce qu'elles ont l'apparence d'avoir été surajoutées ou appliquées aux os, et non de sortir d'une cavité étroite, leur alvéole, dont le rebord continuerait de les enchâsser jusqu'au collet, ainsi que cela a lieu généralement chez les mammifères.

Toutes les dents, au contraire, à l'exception des incisives moyennes supérieures, dépassent le bord alvéolaire et le recouvrent un peu.

En réfléchissant sur cette apparence, j'ai dû en chercher la cause dans l'évolution de ces organes, et voir si elle se ferait différemment que dans les autres mammifères.

J'avais méconnu, comme Daubenton, une partie de leurs racines; mais j'avais distingué, quoique d'une manière incomplète, le cément dont celles que j'avais vues étaient enveloppées. C'était, d'après ces premières observations et ma première manière de voir, un tissu cellulaire osseux, auquel les racines adhéraient de toutes parts comme par soudure.

Ce que j'ai dit du cément alvéolaire, dans ma dernière communication, fera comprendre que ce tissu cellulaire osseux est ce même cément par l'intermédiaire duquel les dents adhèrent aux mâchoires. Ce ne sont donc pas les dents qui se soudent aux os proprement dits, mais bien le cément qui les enveloppe par leurs racines et qui touche à leur couronne. Ces racines existent réellement dans toutes les dents; elles prennent même de très-bonne heure, et avant leur durcissement, la forme, les dimensions et la position qu'elles doivent conserver. Il en résulte que les dents des musaraignes croissent et durcissent à la place qu'elles occupent durant toute leur existence, et non dans une fosse osseuse profonde, d'où elles seraient poussées au dehors.

Nous reviendrons d'ailleurs sur ces circonstances dans les paragraphes suivants.

L'étude circonstanciée que j'ai faite du cément alvéolaire, au moyen du microscope, et celle des deux substances qui entrent

dans la composition des dents des musaraignes, me permettent d'expliquer et de préciser ce que j'avais remarqué, sans le secours du microscope, dans mes précédentes observations. J'avais cru voir dans l'adhérence des dents des musaraignes quelque chose d'analogue à ce que G. Cuvier a démontré dans certains poissons, entre autres dans l'anarrhique loup, où le bulbe, dit-il, finit par s'ossifier et par se souder aux mâchoires.

Ce quelque chose d'analogue est la substance, beaucoup plus spongieuse que le reste de l'os maxillaire, indiquée par G. Cuvier dans l'anarrhique, sur laquelle, dit-il, les dents reposent, et qui leur sert de moyen d'union. Cette substance est évidemment l'analogue de celle que je nomme, dans les musaraignes, cément alvéolaire [1], et que j'ai d'ailleurs également observée dans la chauve-souris commune et dans la taupe.

§ 24. DÉVELOPPEMENT DES DENTS EN GÉNÉRAL.

État actuel de la science.

Avant d'exposer les caractères si remarquables qui distinguent, chez les musaraignes, la première dentition et celle qui lui succède, nous commencerons par rappeler les connaissances acquises, au temps actuel, sur le développement des dents, en général, et sur leur accroissement, en ayant plus particulièrement en vue les dents des mammifères.

Le germe de la dent future, qu'elle soit simple ou composée, est toujours une petite capsule, qu'on appelle aussi follicule, dont la première apparition, la position relative, la composition et le développement sont intéressants à étudier.

On trouve, sous ces différents points de vue, mais sur la dentition de l'homme seulement, un utile résumé des connaissances

[1] Sans doute l'absence des racines chez les poissons et leur présence chez les musaraignes établissent une différence sensible entre l'anarrhique et ces mammifères; aussi n'ai-je pas prétendu qu'il y eût une ressemblance parfaite, comme M. Nathusius me le fait dire, mais seulement quelque chose d'analogue, et je le prouve en ce moment.

acquises à ce sujet, ainsi que des observations nombreuses propres à l'auteur, dans l'ouvrage que M. Serres a publié, en 1817, sous le titre d'*Essai sur l'anatomie et la physiologie des dents.* (Paris, 1817.) Déjà, à la vérité, en 1798, avait paru à Édimbourg une intéressante dissertation inaugurale du Dr Blake, sur le développement et la structure des dents de l'homme et de divers animaux, avec de bonnes figures, dissertation que nous avons déjà citée plusieurs fois.

Dix années après la publication de M. Serres, en 1827, M. le Dr Em. Rousseau, chef des travaux anatomiques au Muséum d'histoire naturelle, a facilité cette étude par la publication des belles planches de son Anatomie du système dentaire. Ces planches montrent, entre autres, la position relative des germes de la première et de la seconde dentition dans les principales familles de mammifères. Les figures en ont été dessinées, d'après des préparations exécutées par l'auteur, à l'invitation de G. Cuvier, et déposées dans les galeries d'anatomie comparée du muséum d'histoire naturelle, où le public savant peut facilement les étudier.

Blake avait vu les germes de toutes les dents de lait dans un fœtus de quatre mois et ceux des premières molaires permanentes. (Voir la pl. I, fig. 2, de son ouvrage.)

M. Serres a fait connaître, entre autres, qu'un fœtus à terme avait dans ses mâchoires, non-seulement les germes de toutes ses dents de lait, mais encore ceux de ses dents de remplacement, sans en excepter la dernière molaire, dite dent de sagesse, dont le volume ne surpasse pas, à cette époque, une grosse tête d'épingle.

Les capsules ou les sacs dentaires, suivant le même auteur, quoique unis à la partie inférieure de la gencive, n'en sont pas un prolongement, ainsi qu'on l'avait pensé; ils peuvent être séparés l'un de l'autre sans lésion.

Dans ces dernières années, MM. Purkinje et Raschkow, qui ont publié sur l'évolution des dents des mammifères des obser-

vations très-circonstanciées, sont parvenus aux mêmes résultats en découvrant que le follicule dentaire n'est pas adhérent à la gencive dans le premier temps de la vie fœtale; mais que ce follicule est entièrement libre dans sa partie qui répond à la couronne; que ce n'est donc pas, comme on a voulu le dire, une portion rentrante de la muqueuse de la bouche [1].

Déjà, en 1805, G. Cuvier publiait, dans les Leçons d'anatomie comparée, les résultats de ses belles observations sur le développement des molaires de l'éléphant. Il y démontre que la capsule dentaire, cet organe producteur général des dents, est unique pour une dent composée comme pour une dent simple : seulement, dans le premier cas, la capsule est un organe plus compliqué.

Elle l'est nécessairement davantage, suivant F. Cuvier, toutes les fois que la dent doit se composer de trois substances, l'ivoire, l'émail et le cément, chacune de ces substances ayant son organe producteur particulier dans la capsule dentaire.

Celui de la substance principale est, ainsi que nous l'avons dit, le bulbe qui est adhérent à la base de cette capsule. Il est revêtu d'une membrane qui lui est propre, en dedans de laquelle il s'ossifie, et qui se voit encore, après ce durcissement, entre l'émail et la substance principale [2].

La membrane émaillante, autre partie de la même capsule, suit tous les contours de la couronne de la dent, en dehors du bulbe, et revêt cette couronne des différentes couches d'émail.

Dans les dents simples, dont la formation s'accomplit rapidement, la membrane émaillante n'a qu'une fonction rapide et passagère, après laquelle elle s'atrophie.

Dans les dents demi-composées, celles des ruminants, par exemple, et du cheval, qui prennent tard leurs racines, et dont le fût croît assez longtemps par l'extrémité inférieure, à mesure

[1] J. Raschkow, *Meletemata circa mammalium dentium evolutionem, præside professore Purkinje*; Vratisl. 1835.

[2] *Recherches sur les ossements fossiles, etc.* t. I, p. 33 et 34.

que la supérieure s'use par la trituration, la membrane émaillante qui subsiste continue de produire de l'émail et d'en revêtir la dent.

Son existence est encore plus durable chez les rongeurs, dans la capsule dentaire des incisives, dont elle recouvre d'émail la face inférieure pendant leur accroissement viager.

Le troisième organe de sécrétion de la capsule dentaire, la membrane du cément, n'a été considéré jusqu'ici que comme la face interne, il fallait dire comme la lame interne, de cette capsule, puisqu'elle a un développement bien différent de la lame externe, qui est une poche simple, tandis que cette lame interne suit tous les contours d'une dent demi-composée, ou pénètre toutes les divisions d'une dent composée, pour se changer comme un bulbe en cette substance osseuse [1], ou du moins pour en revêtir la dent, quand son action doit être prolongée avec celle de la membrane émaillante, ainsi que cela se voit chez le cheval et les ruminants.

Le développement de l'organe producteur des dents, je veux dire de la capsule dentaire, a été étudié et décrit, avec un soin tout particulier, par MM. Purkinje et Raschkow, dans la dissertation que nous avons déjà citée. Cette description, très-circonstanciée, nous paraît si intéressante, que nous croyons bien faire, pour compléter notre historique sur l'état actuel de la science, de donner la traduction de l'extrait qui en a paru (déjà en 1836) dans les Archives de J. Müller [2]. « Dans les premiers temps de la vie fœtale, la lame externe de la capsule n'est pas fibreuse, mais de structure floconneuse. Intérieurement le follicule dentaire est revêtu d'une membrane séreuse : c'est de son plancher que germe le bulbe de la dent. Avant l'apparition de ce germe dentaire, la cavité du follicule renferme un noyau sphérique, qui se compose probablement, dans le principe, de la substance

[1] Voir F. Cuvier, ouvrage cité, p. xxiv.

[2] *Archives d'anatomie* de J. Müller pour 1836; *Histoire des progrès de la science en 1835*, p. 172.

granuleuse organisable ordinaire; mais qui, dans tous les cas, montre, de plus en plus évidemment, dans son intérieur, des granules anguleux, réunis par des fils très-déliés de tissu cellulaire.

« Entre ce noyau, que Raschkow regarde comme l'organe de l'émail et les parois du follicule, se voit un liquide transparent.

« A mesure que le bulbe dentaire croît, il s'imprime contre l'organe de l'émail, qui se développe de plus en plus; de telle sorte que ce dernier organe finit par ne plus être qu'une membrane mince qui entoure le bulbe.

« Cette membrane, qui est séparée des parois du follicule et du bulbe par le liquide transparent dont nous avons parlé, se lie à la capsule dentaire, au moins dans la suite, par des vaisseaux.

« Sur la face interne de l'organe de l'émail entourant le germe dentaire, on remarque à présent une couche, qui consiste en fibres courtes, égales, perpendiculaires. Bientôt cette couche se sépare du reste de la substance de l'organe de l'émail et devient une membrane propre, la membrane émaillante, laquelle ne montre ni vaisseaux ni nerfs [1].

« Le parenchyme du germe dentaire consiste, dans le principe, en globules; plus tard, on y découvre des vaisseaux, et, longtemps après, des nerfs. Dès le commencemant, on peut y reconnaître deux substances : la pulpe intérieure et une membrane particulière, transparente, inorganique, qui enveloppe la pulpe, et sous laquelle commence la formation de la substance dentaire proprement dite : c'est à cause de cela que Raschkow l'appelle membrane préformative (*præformativa*).

« Dans le voisinage de cette membrane, les granules de la pulpe se montrent arrangés avec plus de régularité, et se propagent dans le sens de la longueur.

« De la surface de cette membrane s'élèvent de petites collines

[1] Je n'y ai jamais vu de vaisseaux, dit F. Cuvier, ouvrage cité, p. XXIII.

que l'on remarque encore dans les dents toutes formées, pour servir de points d'adhésion aux fibres de l'émail [1].

« C'est donc sous cette membrane qu'a lieu la formation de la substance dentaire proprement dite, qui a toujours son point de départ au sommet de la couronne.

« La substance dentaire consiste, au commencement, en fibres infléchies dans bien des sens, qui se touchent et se soudent par leurs parties convexes. A la pointe de la dent, les fibres vont, dans toutes les directions, vers la surface; mais la direction en longueur l'emporte, en ce que les fibres vont du sommet de la couronne vers la racine; en même temps la membrane préformative prend la dureté de la pierre.

« L'accroissement de la substance dentaire, en épaisseur, a lieu de la même manière que sa première formation; en sorte que le dépôt des fibres dentaires se continue du dehors en dedans, à mesure que le parenchyme du germe dentaire du bulbe en fournit les matériaux.

« L'organe pour la formation de l'émail est la membrane émaillante, dont les fibres courtes, perpendiculaires, séparent chacune les filets d'émail correspondants. La sécrétion de l'émail commence avec celle de la substance dentaire principale.

« L'organe sécréteur du cément serait, suivant que le présume M. Raschkow, la lame extérieure de l'organe primitif de l'émail. »

Cette histoire intéressante du développement d'une capsule dentaire et de la production d'une dent de mammifère, en général, confirme, de la manière la plus satisfaisante, plusieurs points essentiels de ce développement ou de cette formation découverts par G. Cuvier et par son frère.

1° L'existence de cette membrane particulière au bulbe, que M. Raschkow appelle *membrana præformativa,* sous laquelle et près de laquelle paraissent les premiers points d'ossification de celui-ci;

[1] Tome XV, page 504, des Comptes rendus, je dis : c'est à M. Retzius que l'on doit cette dernière observation; il faut lire : c'est à MM. Parkinje et Raschkow.

2° l'existence de la membrane émaillante distinguée, pour la première fois, par F. Cuvier, et dont M. Raschkow décrit le développement si remarquable.

Pour compléter cette esquisse historique sur le développement et l'accroissement des dents, en général, il me resterait à ajouter quelques réflexions sur la manière dont G. Cuvier et ceux qui l'ont suivi ont envisagé le durcissement de la substance principale produite par le bulbe dentaire.

G. Cuvier décrit, à la vérité, la formation de cette substance comme une transsudation du bulbe, par couches successives qui s'emboîtent les unes dans les autres; mais il ne faut pas oublier qu'il a reconnu que ces couches se forment en dedans de la membrane extérieure du bulbe. Il ne faut pas perdre de vue que G. Cuvier a découvert que ce bulbe (dans un poisson, à la vérité, l'anarrhique loup), composé, dit-il, de fibres ou de tubes[1], s'ossifie tout entier, et que les dents composées des poissons, telles que celles en forme de pavé, des « raies, sont formées d'une infinité de tubes parallèles, qui vont se terminer à la surface émailleuse. » Il n'y avait plus qu'un pas à faire pour arriver à la théorie actuelle; car, ce bulbe se durcissant en dedans de sa membrane extérieure, ou devait avoir une seconde membrane pour sécréter à sa surface les couches successives d'ivoire, ce qu'il aurait fallu démontrer; ou bien il devait se composer d'un canevas intérieur, tel que le font concevoir les tubes simples ou divisés dont on a découvert l'existence dans la substance principale, au moyen du microscope.

L'accroissement de la substance tubulée par couches successives est encore adopté par M. J. Müller, pour la plupart des cas; quoique ce physiologiste si distingué ait reconnu, dès 1837, peut-être à la suite de l'indication de G. Cuvier, sur les dents composées des raies, que nous venons de citer, et qui avait pu fixer son attention, que quelques poissons font évidemment exception à cette manière de voir.

[1] *Leçons d'anatomie comparée*, 2e édit. t. IV, part. 1, p. 210 et 211.

Après avoir rappelé, comme G. Cuvier l'avait fait dès 1806, l'observation de J. Hunter, qui a vu, chez les animaux nourris par la garance, que la substance des dents, une fois formée, ne se colorait pas, mais bien la couche la plus intérieure de la dent qui venait d'être déposée, M. J. Müller ajoute [1] :

« Quoiqu'il soit vraisemblable que les dents de la plupart des animaux croissent par juxta-position, quelques poissons cartilagineux présentent cependant une exception à cette règle.

« Je trouve, par exemple, que les dents aplaties des myliobates et des rhinoptères, parmi les raies, ont déjà toute leur grosseur avant d'être ossifiées, et lorsqu'elles ne se composent encore que de parties molles membraneuses ; elles contiennent, dans cet état, beaucoup de tubes à large diamètre, qui se roidiront plus tard par l'ossification de leurs parois, et dont le vide diminuera à mesure que leurs parois s'épaissiront. On voit ces changements dans les dents les plus reculées qui se forment successivement. »

Il était réservé à M. Owen de donner à cette observation particulière de G. Cuvier et de J. Müller, par les observations nombreuses qu'il y a jointes, tout le développement, toute l'extension qui permettent d'en déduire une nouvelle théorie sur l'accroissement et le durcissement de la substance dentaire principale [2].

Un compatriote de M. Owen, M. Nasmyth, membre du collége des chirurgiens de Londres, a remis à M. Serres vingt-sept préparations des dents de l'homme ou de divers animaux, à l'appui d'un mémoire manuscrit qu'il a soumis au jugement de l'Académie. Ce mémoire, autant que j'ai pu en juger, est un court résumé des publications de M. Nasmyth, qui ont paru dans divers journaux scientifiques [3], et dans un ouvrage particulier qui a pour titre : *Recherches sur le développement, la structure et les maladies des dents* [4].

[1] *Manuel de physiologie de l'homme, etc.* t. I, part. 1, p. 388, 3e édit. allemande ; Coblentz, 1837.

[2] Voir son mémoire déjà cité et son grand ouvrage ayant pour titre : *Odontography, etc.*

[3] *Athenæum*, du 17 sept. et *Literary Gazette*, of 21 sept. 1839.

[4] Alexander Nasmyth, *Researches of the developement, structure and diseases of the teeth ;*

La partie de cet ouvrage publiée en 1839 ne comprend encore qu'une introduction historique, par ordre chronologique, des principaux traités sur les dents, connus de M. Nasmyth à l'époque de sa publication.

Il y a, à la vérité, quatre planches originales dont les figures représentent des coupes de dents d'ornithorhynque, d'orycterope, de morse, d'éléphant et de *ptychodus*.

M. Serres a bien voulu nous permettre d'examiner avec lui les préparations de M. Nasmyth jeudi dernier, 18 août 1842.

Nous en rapportons en note la liste détaillée [1].

Si je ne me trompe, M. Nasmyth a eu pour but, dans ces exemples de quelques portions très-minimes de grandes dents, 1° de démontrer que le bulbe a une structure vésiculeuse, et

London, 1839; in-8° de 165 pages, comprenant une introduction sur l'histoire de la science.

Trois planches (A 1, A 2, A 3) sont copiées du mémoire de Retzius.

La série C des quatre autres planches me paraît comprendre des figures faites d'après des préparations originales.

La planche C 1, figure 1, est une coupe transversale des dents de l'*ornithorhynchus paradoxus*. (Blum.)

Les figures 2 et 3 concernent les dents de l'*anarrhichos lupus*, et représentent le bulbe changé en dent, et les tubes de celle-ci se dirigeant de la base ou du centre vers la circonférence.

Les figures 4, 8 et 6 sont de l'*orycteropus*.

La planche C 2 concerne le *ptychodus polygyrus*.

La planche C 3, figure 1, représente une section verticale d'une dent de morse.

La planche C 3, figure 2, est une section d'une dent d'éléphant.

La planche C 4 représente des coupes du cément des mêmes dents.

[1] Neuf de ces préparations concernent les dents de l'homme, quinze autres appartiennent à des espèces vivantes de mammifères; il y en a trois qui concernent des espèces fossiles, une de *megatherium* (n° 25), une de lamna fossile (n° 2), une d'*ichtiosaurus* (n° 25), et la troisième de *megaliothis*.

Les numéros 11, 21, 22, 23, 24 et 25 sont des préparations du noyau pulpeux de l'homme.

Les numéros 9, 10 sont faits pour montrer la structure de l'émail des dents de l'homme, et le numéro 18 celle de l'ivoire.

Les numéros 5, 6 et 7 sont des portions de dents de papion, de cynocéphale et de galéopithèque.

Le numéro 17 est une préparation de dent d'éléphant.

Les numéros 27, 26 concernent la membrane du cément du cheval et du bœuf.

Les numéros 12, 13, 14 et 15 ont pour but de démontrer la structure celluleuse ou vésiculaire du noyau pulpeux dans le veau, et le numéro 16 le point d'ossification d'une molaire de cerf.

Enfin les numéros 1, 3 et 8 sont des fragments de dents d'élan, de cachalot et de dasyure.

que cette structure vésiculeuse ou celluleuse se retrouve dans ce qu'il appelle, le plus souvent, la substance interfibreuse, qui est cette sorte de gangue, homogène dans son apparence générale, dans laquelle se voient les tubes de la substance principale. M. Retzius y décrit aussi, à la vérité, mais seulement près de l'émail, quelques cellules, et dans quelques espèces seulement.

Par ses trois préparations de dents fossiles, M. Nasmyth a voulu sans doute faire pressentir l'intérêt que pourrait avoir cette étude, pour la détermination des restes fossiles appartenant à des dents de vertébrés. L'observation des différences que présentent les dents dans leur structure intime peut-elle donner l'espoir fondé de parvenir un jour à reconnaître la classe, l'ordre, et peut-être la famille et le genre auxquels aurait appartenu un fragment fossile de ces organes, trop petits pour que la forme puisse servir dans ce but?

Le bel ouvrage, déjà cité, de M. Owen, dont les lithographies parfaites représentent des préparations qui doivent être d'une perfection proportionnée, nous semble devoir ouvrir une nouvelle voie pour ce sujet intéressant, qui peut devenir très-utile à la paléontologie.

Quant aux vues scientifiques de M. Nasmyth et aux préparations sur lesquelles il croit pouvoir les fonder, l'Académie entendra sans doute bientôt, s'il y a lieu, le jugement qu'en auront porté ses commissaires.

Enfin, plus récemment encore, le 16 mai 1840, M. Flourens a communiqué à l'Académie ses nouvelles recherches sur l'action de la garance sur les dents.

Il en résulte évidemment, comme l'avaient vu Fougeroux, J. Hunter, etc. que, dans les jeunes animaux (de jeunes porcs) nourris par la garance, les dents se colorent par les couches les plus rapprochées du bulbe; que, chez ces mêmes animaux, les couches qui succèdent à celles ainsi colorées, sont blanches, si on cesse de mêler de la garance à leurs aliments.

Une autre circonstance plus difficile à expliquer, c'est la déco-

loration presque complète, après six mois d'un régime ordinaire, de l'anneau coloré par un mois d'alimentation avec la garance. Y aurait-il donc un mouvement moléculaire intérieur dans cette substance tubulée des dents, même dans la partie durcie par les sels calcaires, qui en changerait la composition? C'est ce que croit pouvoir admettre M. Flourens, d'après les expériences qu'il rapporte et qui nous paraissent démonstratives.

Relativement aux fonctions de l'organe producteur de la substance principale des dents, ce que nous avons dit dans notre paragraphe 3 se rapproche beaucoup de la manière de voir de M. Flourens, qui s'était exprimé à ce sujet ainsi qu'il suit : « Ce n'est pas le bulbe qui s'ossifie, mais le cartilage sécrété par le bulbe[1] qui se forme autour du bulbe. »

Seulement mes conclusions, déduites de la structure intime de cet organe et de la substance dentaire principale qu'il produit, pouvaient être par cela même, et sont peut-être, en effet, encore plus explicites.

Lorsque, d'un côté, la voie des expériences physiologiques dans lesquelles on fait varier le jeu des instruments de la vie, et, de l'autre, celle de l'observation directe du mécanisme le plus intime de ces instruments, conduisent à des théories analogues, on peut en conclure qu'on est, de part et d'autre, dans le chemin de la vérité.

§ 25. DÉVELOPPEMENT DES PREMIÈRES DENTS CHEZ LES MUSARAIGNES.

La difficulté d'avoir de jeunes animaux de tout âge ne m'a pas permis de multiplier mes observations sur ce point intéressant de leur dentition, autant que je l'aurais désiré; cependant, je crois avoir découvert, à ce sujet, plusieurs circonstances qui me paraissent devoir contribuer à avancer la science de l'organisation. Une partie se trouve déjà énoncée dans mon premier travail;

[1] *Compte rendu des séances de l'Académie des sciences*, séance du 16 mars 1840, t. X, p. 434, note 3.

ces circonstances concernent l'évolution des dents, qui comprend l'indication des différences entre le lieu où elles se développent et celui où elles se fixent pour armer les mâchoires.

Les musaraignes ne m'avaient montré aucune différence sensible à cet égard; aucun déplacement remarquable dans la dent qui se forme, et dans celle qui est formée et fixée définitivement.

J'ai, en effet, constaté sur des jeunes de ces animaux de plusieurs espèces et de plusieurs âges, dont les plus petits n'étaient pas encore couverts de poils, que le développement, l'accroissement et le durcissement des dents se font à la place qu'elles doivent occuper toute la vie, c'est-à-dire sur le bord des mâchoires.

Je renvoie pour les détails de ces premières observations, très-circonstanciées, aux pages 26 à 29 de mes Fragments.

La membrane extérieure de la capsule dentaire, ayant beaucoup de ressemblance apparente avec le périoste des mâchoires, m'avait paru une continuation de ce périoste. C'est à tort que je les avais confondus : telle est du moins mon opinion actuelle.

J'avais aussi méconnu le développement simultané de la couronne et des racines.

On sait que ce développement est successif dans beaucoup de mammifères, et que celui de la couronne ou du fût de la dent, entre autres chez les ruminants et le cheval, précède de beaucoup celui des racines.

Dans mes nouvelles observations, j'ai constaté le développement simultané, sinon le durcissement de toutes les parties d'une même dent chez les musaraignes.

Je reviendrai sur le développement simultané de toutes les dents d'une même mâchoire, en parlant de la dentition qui succède à la première; mais je dois faire remarquer, dès ce moment, que c'est à cette circonstance qu'il faut attribuer le durcissement de la dent à la place qu'elle doit conserver. En effet, le développement de la racine, qui succède à celui de la couronne dans les cas où la dent fait éruption au dehors, n'ayant pas lieu chez les

musaraignes, les dents y devaient prendre tout d'abord leur place définitive.

Sur une jeune musette de $0^m,038$ de long, depuis le bout du museau à la naissance de la queue, le bord des mâchoires est creusé d'une dépression ou rainure, dans laquelle les dents sont enfoncées par leur racine; celles-ci y sont enveloppées de leur cément, lequel a l'apparence d'une pulpe granuleuse qui remplit l'intervalle d'une racine à l'autre. La couronne fait saillie en dehors de cette rainure; elle n'a encore que ses pointes un peu durcies dans les vraies molaires, ou sa pointe unique dans l'incisive moyenne et celle qui la suit.

Ces deux dernières dents, à la mâchoire supérieure, m'ont paru n'avoir qu'une capsule commune, dans laquelle se développeront plus tard les deux petites incisives suivantes.

Les molaires vraies et fausses étaient renfermées de même dans une seule capsule. Un léger débris de cloison membraneuse semble marquer leur place particulière dans la rainure qui les recevait lorsqu'on les a enlevées : ce débris est une trace de périoste du cément alvéolaire qui doit remplir leurs intervalles.

Dans de plus jeunes musettes, dont la peau n'a encore aucun poil et dont le corps a $0^m,030$ de long, la capsule des molaires de la mâchoire inférieure surmonte le bord libre de cette mâchoire, comme une vessie allongée qui lui serait ajoutée.

Dans une autre mâchoire ayant appartenu à un exemplaire plus jeune encore, tout est moins distinct, et la capsule, et la mâchoire, et le périoste de celle-ci. La capsule des molaires de la mâchoire inférieure ne se distingue du périoste de cette dernière que par un ruban du bord libre de cette capsule, que l'on dirait gonflé par une pulpe homogène, et dont la partie inférieure, qui semble se continuer avec le périoste, paraît indiquer, par les festons qu'elle dessine, les divisions des dents.

Cette dernière observation montre donc, de très-bonne heure,

les traces des germes des dents sur le bord alvéolaire où leur couronne doit se développer.

Nous avons fait remarquer, depuis longtemps, que le durcissement des dents précédait, chez les musaraignes, celui des mâchoires; qu'il était plus avancé, à certaine époque, que celui des os auxquels les dents doivent adhérer.

Cela me conduit à expliquer en passant, par le développement et l'ossification relative des mâchoires et des dents chez l'homme, le changement de position apparente des germes de dents, selon l'âge du fœtus et du nouveau-né, et l'éruption possible de celles-ci.

Si les germes dentaires, de superficiels qu'ils étaient d'abord, paraissent s'enfoncer dans les mâchoires, à la suite de leur développement ultérieur, c'est que le bord des mâchoires s'est élevé pour l'inférieure, ou abaissé pour la supérieure, à la suite du développement et de l'ossification de leur cartilage marginal.

En effet, la partie de la mâchoire qui s'ossifie la première est celle qui est au-dessous du canal dentaire pour la mâchoire inférieure. Lorsque le cartilage marginal des mâchoires existe encore, la rainure alvéolaire qui renferme les germes des dents est superficielle; mais une fois que ce cartilage s'est ossifié, qu'il a étendu les parois de cette rainure, tout en élargissant les mâchoires, et qu'il l'a rendue par là même plus profonde, les germes des dents, que cette rainure renferme, semblent être descendus.

Le développement successif de leur couronne et de leurs racines les forcent, plus tard, de s'élever et de sortir de cette profondeur.

§ 26. SUCCESSION DES DENTS CHEZ LES MUSARAIGNES.

Je renvoie, pour la partie historique de ce paragraphe, aux Leçons d'anatomie comparée (1805 et 1835) et aux ouvrages de J. Hunter (1778), de R. Blake (1798) et de M. Serres (1817), pour la dentition de l'homme en particulier, et à celui de M. Owen

(1840 et 1841), pour celle des reptiles et des poissons, et j'arrive immédiatement au dernier point qui me reste à traiter dans ce mémoire, la succession des dents chez les musaraignes.

J'avais constaté dans mes premières observations que les jeunes musaraignes ont de très-bonne heure toutes les dents des adultes; que ces dents se développent et durcissent, pour ainsi dire, à la surface des mâchoires, dans des capsules extérieures; qu'elles semblent plus adhérentes chez les musaraignes qui ont leur taille que chez les autres mammifères; que ces premières dents ont la forme et le volume qu'elles montrent à toutes les époques de la vie.

Toutes ces circonstances m'avaient fait présumer que ces animaux n'ont pas de dents de lait, ni conséquemment de dents de remplacement; j'avais raison et tort tout à la fois.

Les musaraignes n'ont pas de dents de lait, ni conséquemment de dents de remplacement proprement dites, en ce sens qu'il n'y a aucune différence ni pour le nombre, ni pour la forme des dents, entre la première dentition et les dentitions qui lui succèdent.

Mais j'ai constaté, dès l'année dernière, et je puis l'affirmer en ce moment, par plusieurs exemples très-remarquables, qu'elles ont, au moins, une seconde dentition.

Et ce qu'il y a de bien singulier, de tout à fait particulier à ces animaux, du moins jusqu'à présent, c'est que toutes les dents se renouvellent à la fois.

On se rappellera que les substances dont elles se composent sont tellement minces, que le noyau pulpeux, qui occupe leur axe, s'aperçoit parfaitement à travers les parois de la cavité qui le renferme et qui constituent toute l'épaisseur de ces dents.

Aussi leurs pointes s'émoussent-elles très-promptement; de telle sorte que je suis parvenu à conclure avec certitude, lorsque j'aperçois des pointes intactes, longues et acérées, que des dents aussi évidemment entières sont de formation récente.

Cette circonstance de la facilité avec laquelle leurs pointes

s'émoussent et s'usent, coïncide d'une manière frappante avec leur mode de renouvellement.

Le cément ancien, qui maintenait les dents auxquelles il appartient, disparaît avec elles, détaché sans doute par le développement, au fond de la rainure alvéolaire, de la série des dents nouvelles et de leur cément.

J'ai plusieurs exemples de musaraignes adultes, prises au mois de juillet de l'année dernière et de cette année, dans lesquelles le durcissement de nouvelles dents est bien près d'être terminé, ainsi que celui du nouveau cément.

J'ai décrit assez longuement, dans les paragraphes concernant le cément alvéolaire, les changements successifs qu'éprouve cette substance, depuis son état bulbeux jusqu'à celui d'os. Ces changements doivent être si rapides que je ne puis les comparer qu'à ceux du bois de cerf. Cette comparaison me paraît d'autant plus juste que le cément alvéolaire, dans son état de développement, est entouré et pénétré de vaisseaux sanguins considérables.

Les dents des musaraignes se renouvellent, lorsque les anciennes sont tombées, comme elles se développent pour la première fois, je veux dire à la place précise qu'elles doivent occuper durant leur activité. Elles y sont recouvertes de leur capsule, en dedans de laquelle on aperçoit, à travers ses parois transparentes, la membrane émaillante, surtout quand celle-ci est rouge et doit teindre de la même couleur des portions plus ou moins étendues de ces dents.

C'est dans les détails de ce renouvellement total des dents de musaraignes, à l'âge adulte, que j'ai pu étudier les rapports véritables des dents avec les mâchoires.

Cette rainure, cette dépression, dans laquelle les dents sont reçues avec leur cément et se renouvellent, est au-dessus du canal dentaire pour celles de la mâchoire inférieure.

La position de ce canal, sur lequel M. Serres a déjà fixé, depuis longtemps, l'attention des physiologistes, en annonçant qu'il en avait découvert chez l'homme un second renfermant les vais-

seaux nécessaires à la deuxième dentition au-dessous du premier, qui protége les vaisseaux qui appartiennent aux premières dents; la position de ce canal, dis-je, est la limite des phénomènes de la dentition. Ces phénomènes se passent d'ailleurs, ainsi que je l'ai déjà exprimé, en dehors du périoste, qui se trouve déprimé avec la mâchoire et se continue dans sa rainure alvéolaire.

Les dents des musaraignes ne se renouvellent-elles qu'une fois? Cette sorte de mue de tout leur système dentaire aurait-elle lieu, comme je le soupçonne, plusieurs fois dans la vie?

Des observations ultérieures, très-difficiles à faire, pourront répondre à ces questions.

Quelle est la durée de ce renouvellement? Autre question importante à résoudre.

Les musaraignes jeûnent-elles durant ce temps? Il n'est guère probable qu'elles puissent saisir une proie avec des dents couvertes de leur capsule membraneuse et mal affermies par leur cément alvéolaire encore mou. Il en résulterait des lésions qui nuiraient à l'achèvement de cette mue dentaire.

J'ai voulu voir jusqu'à quel point je trouverais des traces de cette crise dans le reste de leur organisme. Tous les os du crâne m'ont paru ramollis ou moins solides que dans l'état ordinaire de santé, et se disloquant facilement. L'estomac et le canal intestinal étaient absolument vides d'aliments ou de résidus alimentaires; le foie était mou et en apparence très-huileux.

Sans doute, il y aura beaucoup à ajouter à ces premières observations sur ce phénomène, à la fois si particulier et si singulier, du renouvellement des dents.

Après l'avoir étudié longtemps et après avoir médité sur les circonstances qui l'accompagnent, après avoir réfléchi sur les causes d'erreur qui auraient pu me faire illusion, j'ai été enfin convaincu de sa réalité.

Dès lors j'ai dû chercher à lier cette dentition si remarquable aux principales connaissances que la science possède, en ce moment, sur l'anatomie et la physiologie des dents en général, de

celles des mammifères en particulier : tel a été le but des communications que l'Académie a bien voulu entendre.

Mes observations, anciennes et nouvelles, sur la première dentition et sur les dentitions subséquentes m'ont d'ailleurs conduit, si je ne me trompe, aux résultats suivants sur le développement et la succession des dents des musaraignes.

1° Le développement des dents a lieu dans une rainure superficielle ou profonde des mâchoires, à la place précise qu'elles doivent occuper pendant leur usage.

2° La capsule, qui en est pour ainsi dire l'agent, ou du moins dans laquelle ce travail organisateur se passe, est extérieure et fait saillie dans la cavité buccale, pour toute la partie de cette capsule qui répond à la couronne de la dent.

3° Le germe de ces dents comprend non-seulement la couronne, mais encore les racines.

4° Celles-ci sont déjà enveloppées du cément alvéolaire, à l'état pulpeux, dans cette capsule dentaire très-compliquée.

5° Je dis capsule dentaire très-compliquée, parce qu'une de ces capsules renferme à la fois plusieurs dents et leur cément (toutes les molaires d'un côté), et qu'en cela elle est comparable à la capsule d'une dent composée, d'une molaire d'éléphant ou de cabiai.

6° Quoique toutes les parties d'une même dent m'aient paru développées à la fois et atteindre ensemble le volume qu'elles doivent avoir, la couronne est celle de ces parties qui durcit la première et la racine la dernière.

7° Celle-ci durcit par lames ou couches insensibles de l'extérieur à l'intérieur dans toute sa longueur, et non par cônes qui s'emboîteraient les uns dans les autres, et qui s'allongeraient successivement du collet de la dent vers l'extrémité de sa racine.

8° Le durcissement de la dent, de l'extérieur à l'intérieur, comparativement à celui de l'os, qui a lieu de l'intérieur à l'extérieur, s'explique par la position relative, différente de l'organe producteur, de l'un et de l'autre.

Dans l'os, la position extérieure du périoste nécessitait ce dur-

cissement, à commencer du point le plus éloigné de cet organe d'ossification, afin de conserver au périoste toute sa puissance d'action nutritive sur la partie non encore ossifiée, laquelle puissance aurait été entravée si l'ossification eût commencé par les parties les plus rapprochées de cette membrane.

C'est, au contraire, dans l'axe de la dent et non à la surface de la substance dentaire principale que siége l'organe producteur de cette substance principale; c'était donc par le côté opposé, c'est-à-dire par la surface extérieure, que devait commencer son encombrement de sels calcaires, et par suite son durcissement, afin de conserver la perméabilité nécessaire aux canaux qui devaient porter ces sels dans les parties toujours les plus éloignées du centre d'action nutritive.

9° La circonstance bien constatée par nous, dans la seconde dentition, que les racines atteignent avant de durcir le plus haut degré de leur accroissement, et qu'elles ne durcissent que postérieurement, de la manière que nous venons d'indiquer, est une manifestation évidente de la transformation d'une partie du bulbe, formant le canevas encore mou de la substance principale, en cette substance durcie. L'idée de sa simple transsudation à la surface du bulbe ne s'accorderait pas aussi bien avec cette circonstance.

Comment supposer, en effet, que la surface organisée du bulbe en se resserrant, en se contractant successivement, à mesure qu'elle s'envelopperait de nouvelles couches calcaires, ne fermerait pas les pores de cette surface ainsi resserrée?

10° Les tubes de la substance principale nous ont présenté dans plusieurs cas, dans leur diamètre relatif, leurs divisions, leurs anastomoses, les réseaux que forment leurs dernières ramifications, suivant qu'on les observe près de leur orgine, autour des parois de la cavité du noyau pulpeux, dans leur trajet à travers la gangue homogène, qui constitue avec ces tubes toute la substance principale, jusqu'à la dernière limite de cette substance, des différences considérables.

Ces différences sont encore un puissant motif pour ne pas admettre que la substance tubulée ou principale puisse être transsudée par couches successives qui se formeraient à la surface du bulbe. Il en résulterait nécessairement une uniformité, dans les dimensions et la disposition des tubes, de toute l'épaisseur de cette substance, qui n'existe pas en réalité; enfin, à mesure que le bulbe se rétrécit et que sa surface diminue d'étendue, celle-ci devrait produire des tubes d'un moindre diamètre si elle en était le moule, si elle les formait à sa surface : c'est le contraire que l'on observe; les troncs de ces tubes ou de ces canaux sont toujours très-sensiblement plus gros à leur naissance, autour des parois du noyau pulpeux et avant de s'être divisés.

11° Le cément alvéolaire, destiné à souder les dents entre elles et aux mâchoires, croît et durcit simultanément avec leurs racines.

12° Tous ces phénomènes se passent en dehors du périoste propre de la mâchoire, qui m'a paru bien évidemment exister dans la rainure ou dépression des os intermaxillaires, maxillaires et mandibulaires, dans laquelle les dents sont placées.

13° Les dents des musaraignes se renouvellent à la fois comme par une sorte de mue partielle [1].

14° Ce renouvellement paraît avoir lieu au mois de juillet dans nos climats.

15° Il doit se faire en peu de temps, l'animal étant probablement dans l'impossibilité de saisir une proie et de la dévorer aussi longtemps qu'il dure.

Ce n'est encore qu'avec doute que j'énonce ces deux dernières propositions, qui devront être constatées ou qui pourront être infirmées par des observations ultérieures, que mon travail ne peut manquer de provoquer.

[1] Cette sorte de mue des dents semblerait confirmer, entre autres, une vue de M. de Blainville, dans laquelle les dents sont comparées aux poils ou aux autres productions des téguments. (*Bulletin de la société philomatique pour 1815*, p. 193; — *Organisation des animaux*, t. I, p. 38; Paris, 1822.)

Ce travail montre combien était sage la réserve dans laquelle mon intime ami F. Cuvier avait cru devoir se tenir, en terminant, dans son Discours préliminaire sur la structure et le développement des dents, qui date de 1821, les paragraphes concernant la capsule dentaire et les substances dont les dents des mammifères sont formées.

« On n'a guère étudié, dit-il, que les dents de l'homme, celles de quelques carnassiers, de quelques rongeurs et de quelques ruminants, celles des chevaux et de l'éléphant des Indes.

« Il est donc à présumer qu'une étude particulière des autres dents portera à étendre ou à restreindre quelques-unes des propositions que je viens d'établir[1]. »

J'ai eu l'occasion de faire cette étude particulière de quelques autres dents, et de montrer que, dans les sciences d'observations, plus celles-ci sont multipliées, plus ces sciences acquièrent de solidité, soit par la confirmation de vérités déjà reconnues, soit par le redressement des erreurs ou l'établissement de vérités nouvelles, soit en donnant aux propositions de la science des limites ou une extension qu'elles n'avaient pas encore.

J'espère que les singularités apparentes concernant la dentition des musaraignes, que comprend ce mémoire, fixeront l'attention des physiologistes, et qu'ils les rattacheront facilement, ainsi que j'ai tenté de le faire, aux phénomènes de la dentition des mammifères, et même à ceux de la dentition des vertébrés.

Ces singularités apparentes serviront, si je ne me trompe, à lier ces phénomènes dans les différentes classes et à montrer, entre autres, moins de différences et même une sorte de transition dans le développement et la succession des dents des mammifères, des reptiles et des poissons.

[1] *Des dents des mammifères*, p. 30; Paris, 1825.

SUPPLÉMENT HISTORIQUE

COMMUNIQUÉ À L'ACADÉMIE DANS SA SÉANCE DU 28 NOVEMBRE 1842.

J'ai pris connaissance, depuis peu de temps, et seulement après mon retour à Paris, de la nouvelle communication faite à l'Académie, le 3 octobre dernier, par M. Alexandre Nasmyth, sur la structure intime des dents. Cette lecture m'a suggéré quelques réflexions qui pourront servir de supplément à la partie historique des mémoires que j'ai eu l'honneur de lire à l'Académie, dans ses séances des 8 et 16 août et 5 septembre derniers, mémoires que j'ai désiré soumettre au jugement impartial de ses commissaires.

La communication de M. Nasmyth comprend deux propositions générales : la première est relative à la structure intime des dents, la seconde concerne leur accroissement et leur durcissement, et le rôle que joue, dans ces cas, le bulbe ou le noyau pulpeux.

La première proposition sur la structure intime des dents tend à établir que la pulpe dentaire, l'ivoire, l'émail et le cément, ont une même organisation celluleuse, avec des modifications particulières pour les deux dernières substances [1].

Ainsi les canalicules ou les tubules de l'ivoire (que j'appelle substance dentaire principale), ces fibres creuses, que MM. Purkinje et Frœnkel d'un côté, J. Müller de l'autre, ont injectées d'encre par leur capillarité; ces vaisseaux calcigères de M. R. Owen, dans lesquels J. Müller affirmait déjà, en 1836, avoir reconnu, par-ci par-là, des amas de sels calcaires, ne seraient qu'une illusion d'optique.

[1] Voir le texte de la page 578, tome XV, du Compte rendu des séances : *Mémoire sur la structure celluleuse des dents et de leur bulbe, etc.* par M. Alexandre Nasmyth.

En attendant que l'Académie vienne mettre dans la balance le poids de son expérience et de son jugement, par l'organe de ses commissaires, sur ce paisible débat scientifique, je crois devoir rappeler et compléter la liste chronologique des observateurs qui se seraient ainsi fait illusion dans leurs recherches multipliées; j'indiquerai en même temps, d'une manière générale, les sujets de ces recherches.

Ce tableau, qui ne sera à la vérité, en grande partie, qu'une répétition de ce que j'ai déjà dit dans mes mémoires précédents, aura cependant l'avantage d'être plus serré, plus facile à saisir dans son ensemble et plus complet, surtout sous le rapport de l'indication des sujets observés.

Je commencerai par rappeler que déjà Leeuwenhoeck annonçait, le 4 avril 1678, à la Société royale de Londres, qu'il avait découvert dans les dents de l'homme, de l'éléphant, du cheval, du cochon et de la vache, des tubes tellement fins, qu'il estime leur nombre à 120 dans $\frac{1}{45}$ de pouce, ce qui fait 5400 dans un pouce, 450 dans une ligne ou 200 dans un millimètre.

Leeuwenhoeck indique très-bien leur direction de l'intérieur de la dent vers la circonférence, et pense que la multitude de vaisseaux sanguins et autres qui se voient dans la cavité dentaire servent non-seulement à développer, mais encore à nourrir chaque tubule de la dent, aussi longtemps qu'elle est saine [1].

Il est remarquable que R. Blake, dans son excellente Dissertation inaugurale, soutenue à Édimbourg en 1798, exprime l'opinion que la partie durcie des dents se nourrit et éprouve des changements au moyen de vaisseaux absorbants, etc. comme les autres parties du corps humain. A la vérité, cette opinion sur la vascularité de la substance dentaire principale était dé-

[1] *Continuatio Epistolarum, etc.* Lugduni Batavorum, 1715.

Cette lettre, comprise dans le tome I des œuvres de cet auteur, est accompagnée de plusieurs figures, dont une représente ces tubes comme des traits parallèles : ce sont ceux d'une portion de molaire d'homme.

duite *a priori*, de raisonnements très-fondés, plutôt qu'*a posteriori* ou d'observations directes.

Le premier des anatomistes actuels qui ait repris la découverte de Leeuwenhoeck, sur la structure tubuleuse de l'ivoire des dents, est, sans contredit, le professeur Purkinje et son disciple, M. Frœnkel. Leur nouvelle doctrine a été publiée à Breslaw en 1835. Suivant ces auteurs, la substance dentaire principale ou l'ivoire n'aurait pas d'analogie, même éloignée, avec les os, et se composerait de fibres creuses ou de tubes, et d'une substance homogène, inorganique, qui serait comme la gangue de ces tubes.

En rendant compte de la découverte de MM. Purkinje et Frœnkel, dans ses Archives de 1836, M. J. Müller ajoute que ces tubes ont des parois propres, et qu'il a vu, par-ci par-là, leur canal rempli de sels calcaires.

Dans la même année 1836, M. Retzius communiquait à l'académie royale des sciences de Stockholm ses nombreuses recherches sur la structure intime des dents des vertébrés. Ce travail, dont l'auteur ne donne qu'un premier aperçu dans sa lettre communiquée à l'Académie des sciences de Paris, le 5 septembre 1836, n'a été imprimé en entier qu'en 1837, soit parmi les mémoires de l'académie royale des sciences de Stockholm, en suédois, soit dans les archives allemandes de J. Müller.

M. Retzius a étudié les dents de l'homme, de dix-neuf espèces de mammifères, de plusieurs reptiles et de quelques poissons. L'ivoire de toutes ces dents lui a montré une structure tubuleuse. Ces tubules ou ces canalicules diminuent de diamètre, quand il se ramifient, après s'être ramifiés. La gangue qu'ils traversent n'est pas toujours homogène ; on y aperçoit, dans quelques espèces, surtout près de la surface de la dent, de très-petites cellules analogues aux cellules osseuses, dans lesquelles les derniers ramuscules des tubes semblent se terminer.

Dès le mois de décembre 1836, M. Dujardin, qui ne connaissait encore les travaux de MM. Purkinje et Frœnkel et de

J. Müller, que par les Archives publiées par ce dernier, et ceux de M. Retzius, que par sa lettre à M. Flourens, en date du 5 septembre précédent, communiquait à l'Académie le résultat de ses propres recherches. Ce résultat était conforme, pour ce qui est de la structure tubulée ou canaliculée de l'ivoire, à celui annoncé par les quatre anatomistes que je viens de nommer. Seulement, M. Dujardin n'admettait pas que ces tubes ou ces canaux eussent des parois propres; il les considérait comme des lacunes creusées dans la gangue homogène qui constitue la partie principale de l'ivoire. « Ils ont, ajoute ce savant, presque les mêmes dimensions dans l'homme, l'éléphant, le babiroussa, le cochon, le bœuf, le lapin, chez lesquels je les ai observés[1]. »

En 1833, deux anatomistes anglais ont reconnu la vascularité de l'ivoire : M. Jones Tomes, qui a publié, dans la Gazette médicale de Londres, ses recherches sur beaucoup de vertébrés, et M. Richard Owen, qui annonçait cette structure, pour les dents de poissons, dans ses communications à l'Académie, des 16 décembre 1839 et 13 janvier 1840. Elle se trouve d'ailleurs démontrée par de très-belles figures, qui représentent un assez grand nombre de dents de poissons et de reptiles et de quelques mammifères. Ces figures ont paru en 1840 et 1841, avec un texte explicatif pour les deux premières classes seulement, dans les livraisons successives de l'*Odontography*, publiée par ce membre célèbre de la société royale de Londres.

Il faut ajouter à cette liste des anatomistes qui ont publié des travaux sur la structure tubuleuse de l'ivoire des dents, M. le docteur Erdl. Les mémoires de l'Académie royale des sciences de Munich comprennent un travail important de ce jeune anatomiste, travail qui a paru en 1841, et qui a pour titre : *Recherches sur la structure des dents chez les vertébrés, et particulièrement chez les rongeurs.*

M. Erdl confirme, par ses propres observations, la présence de

[1] *Annales françaises et étrangères d'anatomie et de physiologie*, t. I, p. 154, et *Compte rendu des séances de l'Académie des sciences*, de décembre 1836, t. III, p. 394.

canaux nombreux dans la substance dentaire principale, qui pénètrent la gangue, le plus souvent homogène, dont elle se compose. Dans un cas cependant, celui des dents de tatoux, qui ne sont composées que d'ivoire, ainsi que l'avait déjà remarqué M. Retzius, cette gangue montre des stries extrêmement fines, pressées les unes contre les autres, et lui donnant l'apparence de l'émail.

M. Erdl décrit fort en détail la disposition générale et la direction des tubules de l'ivoire dans les dents de tatou à six bandes, de paresseux tridactyle et dans les incisives de cheval; il indique ensuite ce qui distingue cette même disposition, en général, dans les arrière-molaires de l'homme et des mammifères, et plus particulièrement du veau et des carnivores.

Enfin, il entre dans les détails du sujet plus particulier de ses recherches : la forme, la composition et la structure intime des dents de rongeurs. Les figures des douze planches annexées à ce mémoire représentent, entre autres, des coupes tranversales ou longitudinales des molaires d'écureuil d'Europe, de *ptosomys nitidus*, de rat, de castor, de lièvre, de rat d'eau, de veau, dans lesquelles les tubes calcigères sont représentés avec beaucoup de netteté.

Dans la partie de mes trois mémoires concernant le même sujet, la structure intime de l'ivoire ou de la substance dentaire principale, je démontre que cette structure est évidemment tubulée ou vasculaire, d'après des observations multipliées, faites sur toutes les dents de trois espèces de musaraignes et de deux autres insectivores, la taupe et la chauve-souris commune, et plus particulièrement sur les incisives ou les molaires de campagnol, de rat d'eau, de lièvre et de cochon d'Inde, parmi les rongeurs. Je décris avec détail les embouchures de ces tubes dans la paroi qui renferme le noyaux pulpeux, leur marche flexueuse ou directe de ce point d'origine vers la surface de la dent, leurs divisions immédiates ou tardives, les anastomoses de celles-ci, la diminution de leur diamètre à mesure des divi-

sions des troncs principaux. Dans plusieurs cas, j'ai cru pouvoir distinguer leurs parois propres, et j'ai admis l'existence de celles-ci avec J. Müller. Leur terminaison vers la surface de la substance dentaire principale m'a paru souvent former comme un réseau; quelquefois un certain nombre de ces tubes m'ont paru pénétrer jusque dans l'émail, à travers la membrane qui revêt l'ivoire et la sépare de cette dernière substance.

Enfin j'ai étudié avec soin leur direction, parce que cette direction, ainsi que je l'exprime, montre celle de l'impulsion nutritive que reçoivent les fluides qui viennent nourrir l'ivoire et le faire croître en densité.

Ainsi, outre Leeuwenhoeck, le premier auteur de la découverte de la structure tubulée de la substance principale des dents, MM. Purkinje et Frœnkel, J. Müller, Retzius, Dujardin, John Tomes, Richard Owen, Erdl et moi, nous avons constaté cette structure dans un assez grand nombre d'animaux vertébrés, avec des circonstances plus ou moins détaillées, qui démontrent, il me le semble, qu'il n'y a pas eu d'illusion dans ce résultat général.

Quant à la seconde proposition du dernier mémoire de M. Nasmyth, sur l'accroissement et l'ossification de l'ivoire, après avoir admis, comme moi, qu'aucun vaisseau sanguin ne pénètre cette substance, il explique[1] ces deux actes fonctionnels par l'exosmose d'un fluide apporté par les vaisseaux sanguins, qui se trouvent en contact immédiat avec les parois des cellules. L'ivoire n'est donc, pour cet anatomiste, qu'une portion de la pulpe ossifiée[2].

Afin de mettre à même de juger ce que cette seconde proposition renferme de nouveau pour la science, je vais résumer, sous le point de vue historique, les deux théories sur l'accroissement et le durcissement des dents, et plus particulièrement de la substance dentaire principale ou de l'ivoire, théories qui partagent les physiologistes.

[1] *Compte rendu des séances de l'Académie des sciences*, de décembre 1836, t. III, p. 68.
[2] *Ibid.* p. 680.

L'une veut que la substance dentaire principale soit transsudée à la surface du bulbe par couches successives juxta-posées les unes dans les autres.

L'autre admet que c'est le bulbe lui-même qui se durcit par intussusception et se transforme ainsi en cette substance dentaire principale.

Hunter et Cuvier, et tous les anatomistes ou les physiologistes qui ont écrit sur les dents, jusqu'à 1839, ont soutenu et adopté la première théorie, même MM. Purkinje et Frœnkel, Retzius et J. Müller, malgré leur découverte ou leur connaissance approfondie de la structure tubulée ou vasculaire de l'ivoire. Ce dernier ne reconnaît d'exception à l'accroissement des dents par juxtaposition que dans les dents de quelques poissons.

Ce sont précisément les dents des poissons sélaciens dont l'étude a conduit M. R. Owen à la théorie du durcissement du bulbe par intussusception, au moyen des tubes calcigères dont il se compose, et à la proposition que ce bulbe se transforme ainsi tout entier en substance dentaire principale.

Cette théorie positive a été exposée, ainsi que nous l'avons dit, devant l'Académie des sciences, en décembre 1839 et en janvier 1840; mais l'opinion que les dents croissent par intussusception, que ce ne sont pas des corps inertes et sans vie, remonte encore à Leeuwenhoek. Il avait observé dans le bulbe une multitude de vaisseaux sanguins et autres, au moyen desquels, disait-il, chaque tubule de la dent se développe non-seulement, mais encore se nourrit aussi longtemps que cette dent est saine. Il avait même l'opinion, sans doute erronée, mais qui montre sa théorie, que les tubules de la dent communiquent à sa surface avec les vaisseaux sanguins des gencives.

La plupart des praticiens qui ont observé la marche des maladies des dents ne pouvaient comprendre, sans un mouvement intérieur de fluides, les altérations de la substance dentaire principale.

Déjà en 1798, R. Blake, dans sa Dissertation inaugurale, con-

clut de ses observations d'exostoses et autres, que la dent se nourrit et éprouve des changements intérieurs de composition moléculaire, par des vaisseaux absorbants, comme toutes les autres parties du corps[1].

Ce mouvement intérieur moléculaire est rendu évident par les expériences de M. Flourens sur la coloration et la décoloration de zones dentaires de l'ivoire, à la suite d'une alimentation mêlée de garance ou sans mélange de cette substance colorante[2].

A peu près à la même époque que M. Owen, M. Nasmyth trouvait une conformité organique dans le bulbe et la substance dentaire principale qui devait le conduire à une théorie semblable; du moins, dans sa première communication à l'Académie des sciences, en 1840, et dans ses publications de l'année précédente, il admet que l'ivoire a la même structure vésiculeuse ou celluleuse que la pulpe dentaire; mais je n'ai pas vu positivement, dans ces publications, qu'il en tirât la conclusion, bien naturelle sans doute, que l'ivoire n'est conséquemment que la pulpe durcie, que la pulpe transformée en dent.

Entre les premières publications de M. Nasmyth, qui datent de 1839 et 1840, et sa dernière communication à l'Académie, le 3 octobre dernier, viennent se placer celles que j'ai faites au même corps savant les 8 et 16 août et 5 septembre 1842.

Ce n'est pas à moi à juger en ce moment des rapports qui existent entre ces différents travaux, en tant qu'ils doivent être signalés comme ayant fait faire des progrès réels à l'anatomie et à la physiologie des dents.

[1] ..... *Partem dentis osseam nutriri, mutationesque per vasa resorbentia, etc. subire eodem modo ac omnis alia corporis pars concludere videtur.* (*Disputatio de dentium formatione et structura*, p. 109. A. R. Blake; Edinburgi, 1798.)

[2] Voir le mémoire de M. Flourens, inséré par extrait dans les Comptes rendus de l'Académie, t. X, p. 429 et suiv. et en totalité dans les Archives du muséum d'hist. nat. de Paris, t. II; Paris, 1841.

DEUXIÈME SUPPLÉMENT

COMMUNIQUÉ À L'ACADÉMIE DANS SA SÉANCE DU 17 JUILLET 1843.

Le paragraphe troisième de mon mémoire sur les dents des musaraignes, etc. est consacré à la description du bulbe ou du noyau pulpeux.

J'exprime au commencement de ce paragraphe que chaque dent simple, dont il est l'organe producteur, du moins pour la substance dentaire principale ou l'ivoire, lui doit sa forme et ses dimensions; j'ajoute que, dans les dents des musaraignes, qui sont très-favorables pour étudier les rapports de forme entre le bulbe et la dent, on voit cet organe, à travers l'émail et l'ivoire, répéter en dedans la forme extérieure de cette dent.

Relativement à sa structure et à ses fonctions, j'exprime que « ce bulbe se compose de deux parties distinctes, ayant chacune une fonction particulière :

« L'une, en rapport immédiat avec les vaisseaux sanguins et les nerfs qui la pénètrent, est une sorte de follicule, dont les parois sécrètent et versent dans la cavité de ce follicule, ou du noyau pulpeux, les matériaux de la substance tubuleuse : c'est à la fois l'organe préparateur et le réservoir de ces matériaux.

« L'autre partie du bulbe, qui enveloppe la première, est le canevas de la substance tubuleuse de la dent, lequel se durcit à mesure que les tubes capillaires dont il se compose reçoivent et absorbent les matériaux préparés par l'organe sécréteur de ce bulbe. »

Cet exposé est sans doute assez clair, assez précis, pour que l'on puisse facilement comparer ma manière de voir, sur la na-

ture organique du noyau pulpeux et sur ses fonctions, avec ce qu'en ont publié mes prédécesseurs dans cette carrière.

Cependant, ayant pu reprendre mes études sur ce sujet intéressant, malgré la fatigue et les altérations que celles de l'an dernier ont produites sur mes yeux, je suis à même de développer cette doctrine et de la démontrer par de nouvelles préparations et de nouveaux dessins.

Nul doute que MM. Owen et Nasmyth n'aient abandonné les premiers la doctrine de la formation de l'ivoire par transsudation des couches successives de sels calcaires à la surface du bulbe, lesquelles auraient été sécrétées par ce bulbe et moulées par sa surface.

Nul doute encore que c'est à Rau[1], cité par l'honorable rapporteur du travail de M. Nasmyth, que l'on pourrait faire remonter la doctrine de la formation de l'ivoire par transsudation ou par sécrétion d'une membrane. Cette membrane, selon cet auteur, serait purement glanduleuse.

C'est dans la cavité située entre sa duplicature que les orifices excréteurs des glandes dont elle se compose versent les couches successives du suc dentifice[2]. (*Thèse XVI.*)

Il est même très-remarquable que Rau n'hésite pas de supposer que ce même organe de sécrétion peut produire successivement la substance dentaire principale et l'émail, cette partie que le célèbre Malpighi, ajoute-t-il, appelle l'enveloppe extérieure de la dent.

La manière dont il explique cette différence de produit, par la compression des glandes de la membrane extérieure, prouve

[1] *Disputatio inauguralis de ortu et regeneratione dentium, quam examini subjecit J. Suc. Rau, ad diem 11 maii.* Lugduni Batavorum, 1694.

[2] *Vasa uno eodemque ordine alveolas ingrediuntur, in ipsis membranam constituunt mere glandulosam; hæc rursus duas efformat lamellas uni eidem usui destinatas, scilicet dum separant a sanguine succum dentificum.*

Hanc membranam primam dentium statuo rudimentum, quæ basis dentis formam obtinens, succum dentificum ab ea separatum inter suas lamellas, sive duplicaturam recipit, ubi in lamellam tenuissimam basim dentis describentem coagulatur. (Thèse XVI.)

du moins, à ce qu'il me semble, qu'il comprenait par cette désignation la capsule dentaire, et que ce bulbe était pour lui la duplicature de cette membrane extérieure. (*Thèse XVII.*)

Rau n'ayant pas, selon toute probabilité, de microscope, comme Leeuwenhoek, ne rechercha pas la structure de ce suc dentaire coagulé et déposé par couches successives entre la duplicature de la poche membraneuse et glanduleuse qui le sécrète.

Il ne paraît rien savoir de la découverte de Leeuwenhoeck, faite à Delft, et si près de Leide, seize années auparavant. Cela tiendrait-il au peu de crédit qu'avaient à cette époque les observations microscopiques?

La partie superficielle du bulbe dentaire en contact avec les parois de la cavité qui le renferme, se compose, dans ma manière de voir, de l'origine des tubes membraneux qui constituent le canevas de l'ivoire : c'est l'organe de transformation du bulbe.

On voit ces tubes former comme une frange autour du bulbe lorsqu'on prépare une tranche de celui-ci dans un bulbe d'incisive de rongeur, où cet organe est toujours en activité.

L'ivoire ne se composerait que de ces tubes durcis ou de leurs divisions. A peine existe-t-il entre eux, selon moi, une légère couche de substance intermédiaire que leurs parois auraient transsudée. Cette substance intermédiaire, qui paraît en plus grande proportion dans les parties de l'ivoire les plus anciennes, en même temps que les troncs vasculaires y semblent moins nombreux, tirerait son origine de ces troncs ou de ces tubes, et de leurs ramifications.

Les uns et les autres s'y trouvent durcis et pétrifiés si complétement que leurs parois ont disparu, et qu'il n'y a plus de différence dans leur densité, dans celle de leur contenu, ni dans celle de la légère couche de sels calcaires qui a pu transsuder de leurs parois, ni enfin dans celle des tubes les plus rapprochés et remplis également de sels calcaires. Toutes ces parties, ainsi dur-

cies et pénétrées de sels calcaires, ne forment plus, en apparence, qu'un tissu homogène ou à peu près.

Telle est la dernière conclusion que je crois pouvoir tirer, d'un côté, de l'étude de la partie superficielle du bulbe, que je regarde comme le seul organe de transformation de ce bulbe; d'un autre côté, de l'observation de l'ivoire dans sa structure intime, et des différences que présentent les tubes dont il se compose, dans leur aspect, leur nombre et les intervalles qui les séparent, suivant les parties d'une même dent où on les observe, et suivant qu'on choisit pour ces observations des dents anciennes ou récentes.

Quant à l'organe de sécrétion, qui formerait la partie centrale de ce noyau pulpeux, mes dernières observations, faites postérieurement à mes lectures du mois d'août et du mois de septembre derniers, d'après des préparations que M. le Dr Maissiat a continué d'exécuter, à ma prière, selon mes vues et sous mes yeux, avec une grande perfection, m'ont confirmé dans l'idée que cette partie est en effet un follicule, ainsi que je l'avais exprimé, mais un follicule très-multiple et très-compliqué.

Pour mieux étudier cette partie glanduleuse du bulbe dentaire, j'ai cru devoir choisir de préférence les incisives de rongeurs, chez lesquels ce bulbe est constamment en activité.

Des tranches minces, fraîches ou desséchées de ce bulbe, m'ont fait voir un grand nombre de petits corps pyriformes, ovales, anguleux, ronds, ayant des filets ou des tubes qui partent, en rayonnant, de leurs angles ou de leurs parties aiguës, quand leur contour en présente, et qui se joignent par ces filets à d'autres de ces corps. On dirait voir, dans quelques cas, des corpuscules osseux [1], du moins pour la forme; dans d'autres, ce sont des apparences de petites poches rondes ou pyriformes; souvent

[1] Qui se changent sans doute, avec le temps, en ces granulations blanches ayant, en quelque sorte, l'apparence de grains de fécule, que j'ai signalées dans le bulbe d'une incisive de lapin (p. 351).

leur ensemble se présente comme un réseau à mailles et à cordons très-irréguliers, très-inégaux.

Mes observations à ce sujet ont beaucoup de conformité avec celles de MM. Owen et Nasmyth, répétées et confirmées par l'honorable rapporteur du travail de ce dernier anatomiste.

C'est dans ce tissu glanduleux que pénètrent les vaisseaux sanguins qui lui apportent le fluide nourricier ou les matériaux de sa sécrétion, et que viennent se diviser les nerfs qui animent cet organe et le rendent si sensible dans l'état anomal. Je ne puis décider si ces filets ou tubes de l'organe glanduleux se continuent directement avec les tubes que nous avons dit former comme des franges à la surface du bulbe, et constituer le canevas de l'ivoire ou l'organe de transformation du bulbe; mais je suis porté à le croire, et j'avoue qu'il est très-difficile de démontrer les limites entre l'organe de sécrétion et celui de transformation du bulbe.

En revoyant, après cette étude du bulbe dentaire des incisives de rongeurs, le bulbe des musaraignes, je lui ai trouvé la même complication organique; celui des molaires de ruminants (veau, chevreau, agneau) ne m'a pas montré de différence importante.

Cette doctrine diffère essentiellement, à ce qu'il me semble, des doctrines des anatomistes ou des physiologistes qui m'ont précédé, sous le double point de vue, 1° de la composition et de la transformation du bulbe; 2° et de la composition de l'ivoire.

L'ivoire, ou la substance dentaire principale se composerait originairement, je le répète, de tubes ou de vaisseaux calcigères, et il n'y aurait de substance intermédiaire qu'après la pétrification complète d'une partie de ces tubes, qui disparaîtraient successivement à mesure de cette entière pétrification. Le bulbe n'aurait que la partie superficielle qui serait destinée à se transformer en ivoire et en formerait le canevas tubulé; sa partie centrale, véritable organe de sécrétion et non de transformation, ne se changerait jamais en ivoire.

Elle se pétrifie cependant quelquefois; mais alors son tissu reproduit en partie, et d'une manière plus ou moins évidente, son organisation première. On peut, entre autres, l'observer dans la petite incisive supérieure de lapin ou de lièvre qui est située derrière la grande. Le bulbe de cette petite incisive se durcit ou se pétrifie de très-bonne heure, et limite, par cette transformation, l'accroissement de cette dent.

On y remarque encore assez bien les filets et les follicules qui constituent l'organisation de ce bulbe dans l'état frais.

Cette petite incisive nous a offert une autre singularité très-remarquable : c'est qu'au lieu de n'avoir d'émail que du côté supérieur, comme la grande incisive dans la même espèce et celle de tous les autres rongeurs, elle en a aussi du côté opposé.

On voit encore cette sorte de pétrification du bulbe dans les défenses du morse, ainsi que je l'ai observé et consigné dans la seconde édition des Leçons d'anatomie comparée [1].

Ma manière de comprendre et d'expliquer la formation de l'ivoire s'accorde avec celle de MM. Owen et Nasmyth, en ce que je considère le bulbe, ainsi que ces anatomistes, comme un organe de transformation qui doit se changer en ivoire; mais elle s'en écarte immédiatement en ceci, que le bulbe tout entier ne se tranformerait pas en ivoire et qu'il n'y aurait que le canevas de cette substance, composant la partie extérieure du bulbe, qui subirait cette transformation.

Un autre point essentiel de divergence entre ma manière de voir et celle de M. Nasmyth, c'est que cet anatomiste ne reconnaît dans le bulbe et dans l'ivoire qu'un tissu aréolaire, et qu'il nie l'existence des tubes de Leeuwenhœck ou des canaux dans cette dernière substance.

Cette lacune dans le travail de M. Nasmyth, signalée, avec cette expression, par M. le Rapporteur, est, il me le semble du moins, de la plus grande importance. En effet, s'il est prouvé, par l'ins-

[1] T. IV, p. 204 et 209.

pection même des préparations de M Nasmyth[1], que l'ivoire se compose de tubes ou de canaux plus ou moins ramifiés, ayant leurs parois propres; si les préparations que je puis soumettre à MM. les commissaires de l'Académie le démontrent de la manière la plus indubitable, il faut en conclure que M. Nasmyth n'a pas reconnu la véritable structure de l'ivoire, ou du moins la partie la plus essentielle, selon nous, de cette structure.

Quant à la portion intervasculaire de l'ivoire, que les uns regardent comme une substance homogène, amorphe; dans laquelle ces canaux se creuseraient comme des lacunes, d'après une autre opinion; qui serait, au contraire, selon M. Nasmyth, essentiellement composée de cellules et d'un tissu aréolaire analogue à celui du bulbe; ce n'est, pour moi, ainsi que je viens de l'exposer, qu'une dépendance de la partie vasculaire de l'ivoire, laquelle est composée des ramifications les plus fines des canaux de cette substance, et d'une partie de ceux-ci, qui ont subi les premiers la pétrification.

J'ai cependant vu, dans quelques cas, ainsi que je l'annonce déjà dans mon premier travail, vers la surface de l'ivoire seulement, et conséquemment dans la portion la plus ancienne, une apparence de tissu aréolaire avec de petites granulations ou de petites taches noires irrégulières, dans les préparations vues en transparence, à un grossissement de deux à trois cents diamètres. Ce tissu aréolaire est un réseau vasculaire très-fin, et je suis tenté de regarder ces taches irrégulières noires comme des débris de la membrane qui limite de ce côté la substance de l'ivoire.

Je suis loin de les regarder comme les analogues des cellules osseuses. Dans une préparation d'incisive de cheval, où l'on peut étudier, comme l'a fait M. Retzius, ces taches de la surface de l'ivoire, et, simultanément, les cellules osseuses du cément, on peut voir la différence qui existe entre la forme, la disposition assez régulière de celles-ci, leur grandeur relative, et la forme,

[1] T. IV, p. 1060.

la disposition irrégulière et la petitesse relative de ces apparences de taches.

Je ne reviendrai pas ici sur ce que j'ai dit du cément et de sa formation. Je crois l'avoir envisagé sous un point de vue tout nouveau, d'après des faits incontestables, faciles à observer, et que j'ai eu le bonheur de découvrir.

La présence des corpuscules osseux de Deutsch, qui caractérisent cette substance ainsi que celle des os, et que M. Retzius considère comme des cellules ou des capsules, rend indubitable la structure celluleuse du cément.

Quant à l'émail et à sa composition celluleuse, j'avais dit, dans ma seconde lecture à l'Académie : « Je suis bien tenté de regarder, avec M. Retzius, les molécules, souvent de forme évidemment cubique, dont des séries composent un prisme ou une fibre d'émail, comme formées d'une petite poche membraneuse contenant la substance inorganique de l'émail; et je comparerais volontiers ces petites capsules aux cellules de l'épiderme[1]. »

M. le rapporteur du mémoire de M. Nasmyth a également proposé ces mêmes analogies, sous forme de doute et avec la réserve qui convenait à un jugement aussi solennel que celui d'un rapport à l'Académie : « Ces cellules de la membrane émaillante ne sont-elles pas les petites poches vésiculeuses dans lesquelles M. Retzius suppose que sont renfermées les molécules élémentaires de l'émail? Ne sont-elles pas analogues à celles de l'épiderme[2]? »

Au reste, j'aurai l'occasion, dans la suite de mes recherches, qui sont loin d'être terminées, de revenir sur ces divers points de structure de l'ivoire, de l'émail et du cément.

Je dirai seulement, au sujet de l'émail, que cette substance, ainsi que je l'ai déjà exprimé dans mon précédent travail, est loin de se présenter sous un seul et même aspect, même dans les dents d'une même espèce; que cet aspect varie suivant les

[1] *Comptes rendus*, t. LV, p. 308.
[2] *Ibid.* p. 1069.

coupes et les portions de dent où on l'observe; qu'il varie surtout jusqu'à un certain point d'une espèce à l'autre, et bien davantage encore d'une classe à l'autre.

L'ivoire et l'émail ne passent pas insensiblement de l'une dans l'autre, comme l'a prétendu Rau pour expliquer leur formation successive par une seule et même membrane.

Il y a, le plus souvent, des limites bien tranchées entre ces deux substances.

D'autres fois on voit, ainsi que je l'ai dit dans mon premier travail, « les tubes de la substance principale ou leurs dernières divisions, se continuer dans l'émail et se perdre entre ses fibres, en formant comme des apparences de franges [1]. »

Nous avons des préparations où l'apparence tubuleuse de l'émail est telle, qu'on serait tenté de croire que ces tubes prétendus sont la continuation de ceux de l'ivoire, s'ils n'avaient pas une tout autre direction.

Ces observations prouvent qu'il faut encore les multiplier beaucoup, au moyen de préparations on ne peut plus variées, pour arriver à la connaissance de vérités incontestables sur la structure et le développement des dents. J'espère pouvoir y contribuer pour ma part, en persévérant dans mes recherches.

Nous terminerons ce travail par un dernier résumé, en quatorze paragraphes, de ses principaux résultats.

Si nous ne nous faisons pas illusion, les résultats exprimés dans les paragraphes 3, 5 et 7 à 14 sont entièrement nouveaux. Les autres se rapportent à des découvertes faites en Allemagne, en Suède et en Angleterre, par des anatomistes célèbres que nous avons eu soin de citer dans la partie historique de nos mémoires. Mais il nous semble que nous avons démontré en France, pour la première fois, avec détail, par des préparations d'un mérite incontestable, ces découvertes, et que nous les avons présentées sous de nouveaux points de vue, indiqués entre autres dans les paragraphes 1^er^, 2, 4 et 6 de ce résumé.

[1] *Comptes rendus*, p. 307.

J'espère donc avoir démontré, dans la suite de mes communications à l'Académie,

1° L'absence des vaisseaux sanguins dans l'ivoire, que je désigne dans ces mémoires sous le nom de substance principale;

2° L'embouchure des tubes de l'ivoire dans les parois de la cavité du noyau pulpeux et leur disposition variée dans leur trajet, depuis leur embouchure jusqu'à la surface de l'ivoire;

3° Leur direction, assez généralement par le chemin le plus court, vers cette surface, où ils se terminent;

4° Leurs divisions plus nombreuses, et même leurs anastomoses apparentes, dans quelques cas, vers cette surface;

5° La diminution sensible de leur nombre avec l'âge;

6° Le rôle que joue le bulbe ou le noyau pulpeux, cet organe producteur de la substance principale, dont il fournit à la fois le canevas et les sucs nutritifs qu'il sécrète du sang que lui apportent les vaisseaux sanguins bien connus qui se distribuent dans ce bulbe;

7° La distinction du cément dentaire et du cément alvéolaire;

8° Le renouvellement de celui-ci dans la seconde dentition; son état mou et pulpeux au moment du développement des dents dans la première comme dans la seconde dentition, et son passage de l'état pulpeux à l'état d'os, dans un temps probablement très-court;

9° Le développement simultané de la racine et de la couronne chez les musaraignes, au contraire de ce qui a lieu chez la plupart des mammifères;

10° L'explication, par cette circonstance, de la position extérieure que les dents des musaraignes occupent dès le principe de leur développement, du moins par leur couronne;

11° La démonstration que les phénomènes de la dentition se passent dans une rainure des mâchoires en dehors de leur périoste;

12° Le développement et le durcissement chez les musa-

raignes des dents d'un côté d'une même mâchoire, dans une capsule commune, renfermant aussi ce cément;

13° La position libre dans la cavité buccale de cette capsule pour la partie qui enveloppe la couronne;

14° L'existence bien constatée d'une membrane émaillante qui recouvre immédiatement toutes les parties de la couronne qu'elle doit revêtir d'émail, et qui est colorée aux endroits où les dents des musaraignes doivent être colorées.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

Fig. 1. Branche droite de la mâchoire inférieure de *sorex araneus*, amincie par l'usure, pour montrer toutes ses dents en position, avec leurs racines et le cément qui les maintient en place.

6 est l'incisive. On voit en *a* une sorte de cheville fournie par ce cément qui traverse la dent et rendrait impossible l'arrachement de cette dent; aussi, lorsqu'elle tombe, le cément tombe avec elle.

k et *l* sont une portion de la cavité du bulbe, de la couronne et de la racine.

1 et 2 sont les deux petites molaires; 3, 4 et 5, les trois grosses molaires.

On voit en *b*, *c*, *e*, *g*, *i*, le cément qui est entre les racines de ces cinq molaires, et, en *d*, *f*, *h*, celui qui sépare les quatre dernières molaires l'une de l'autre.

5′ et 5″ sont les racines de la cinquième molaire; 3′ et 3″, celles de la troisième.

On distinguera facilement, par ces indications, les racines des autres molaires.

La racine antérieure *m*, de la première petite molaire, est rudimentaire et disposée horizontalement.

n portion de cément qui se glisse entre elle et l'incisive pour la souder à celle-ci.

La figure 2 montre, entre autres, la coupe de la cavité du noyau pulpeux de la première grosse molaire du *sorex Daubentonii* (Erxl.).

Les lettres *e*, *e*, *e* indiquent la coupe de la couronne; *h*, celle d'une racine, et *g*, celle de l'autre. On voit encore la direction des tubes calcigères des racines.

Cette figure est surtout destinée à faire voir la structure intime du cément alvéolaire durci, ossifié, pour la comparer à la structure intime

de la mâchoire et à celle du cément non encore durci, tel qu'on le voit dans les figures 3 et 4.

a est la partie antérieure de la dent, et *b* son côté postérieur. Elle est vue par un autre côté que la dent correspondante de la figure 1.

Les bandes noires *c*, *c*, *c*, ayant du moins cette apparence au microscope, qui contournent les racines et bordent la couronne en dessous, indiquent la membrane du cément qui vient doubler en *c'* la muqueuse des gencives.

d est une portion du canal dentaire.

La ligne *h*, *h* est celle de soudure entre la mâchoire et le cément alvéolaire.

Le cément alvéolaire, 2, qui sépare cette première grosse molaire de la seconde petite molaire; celui, 3, qui remplit, sous la couronne, l'intervalle des deux racines; la portion, 4, de celui qui est entre la seconde grosse molaire et celle-ci, montrent de nombreux corpuscules osseux. Ce cément est traversé par de gros vaisseaux sanguins. Les corpuscules sont plus effacés, moins prononcés dans la mâchoire 1; ils y ont d'ailleurs la même apparence.

La figure 3 représente une branche de la mâchoire inférieure du *sorex Daubentonii* (Erxleb.) ou *carinatus* (Herm.) au moment d'une nouvelle dentition; toutes les dents se renouvellent à la fois.

Le peu de consistance de ces dents et du cément a empêché d'amincir assez cette mâchoire pour la voir par transparence; c'est par réflexion que nous avons dû l'étudier.

Toutes les couronnes des dents sont recouvertes de leur émail.

a, *a*, *a*, *a* est la capsule commune à toutes ces dents et au cément.

b, *b*, *b* est la membrane émaillante qui coiffait chaque couronne, mais qui en a été détachée; elle s'aperçoit à travers la capsule dont elle est aussi détachée. Cette membrane est colorée aux endroits où l'émail qu'elle a déposé sur la couronne correspondante est coloré.

Les racines de ces dents ont toutes leurs dimensions et leur forme; il en est de même de leur couronne; cependant la substance principale des unes et des autres n'est pas encore durcie complétement par les sels calcaires qui les pénètrent successivement.

La ligne *c* est le fond de la rainure de l'os mandibulaire dans lequel parviennent les racines *d*, *d*, *d*.

On voit en *e* l'extrémité de la racine de l'incisive.

Le cément *f*, qui est entre les racines d'une même dent ou celui, *g*, qui sépare une molaire de l'autre, est encore mou et sans corpuscules osseux distincts. Le dessinateur a fait une dentelure vers l'extrémité de la dent, qui n'existe pas dans l'original.

La figure 4 montre, sous un grossissement de 80/1 diamètres une coupe verticale et transversale de la mâchoire inférieure d'un *sorex Daubentonii*, qui était à l'époque de la seconde dentition. Cette coupe est faite contre la dernière molaire, dans la mâchoire représentée figure 3, où cette dent manque, étant comprise dans la préparation de la figure actuelle.

On voit en *h* une portion du bulbe de la couronne.

Toute la racine, dont on n'aperçoit ni la substance, ni le bulbe, se montre recouverte par la membrane productrice du cément, qui se replie autour d'elle, et qui se prolonge en *c* sous la couronne.

En *b*, *b*, l'extrémité durcie de la racine est comme bifurquée.

La coupe du cément *a*, *a*, *a*, en est très-distincte; son aspect est jaune; sa substance est par-ci par-là marquée de taches rondes ou ovales, brillantes. Ce sont les points où il devient cartilagineux et se durcit par la présence des sels calcaires.

On voit en *d* la membrane productrice qui le sépare de la mâchoire. La coupe de celle-ci est gris-rougeâtre, homogène en apparence, et revêtue extérieurement d'un périoste, dont la lame interne est rouge et l'externe grise tirant sur le rouge. Les lambeaux *f*, *f* appartiennent à la lame externe et le lambeau *g*, en partie, à l'interne.

En comparant le cément, dans les figures 2 et 4, qui sont en regard, on aura une idée de l'aspect qu'il présente dans une dentition achevée et dans une dentition en travail de solidification.

PLANCHE II.

Fig. 1. Grosse molaire de *sorex tetragonurus* (Herm.) considérablement amincie par le frottement, dans le sens vertical et longitudinal; la pointe principale, *a*, a été ébréchée par cette opération, ainsi que la bande externe, *b*, d'une des deux racines.

La bande interne, *c*, subsiste en partie; mais ces deux bandes, *b'* et *c'*, sont plus entières dans l'autre racine.

d et *d'* sont les cavités du bulbe de ces racines. Elles se prolongent l'une et l'autre en *e* et en *e'* dans la cavité du bulbe de la couronne.

On voit les tubes de l'ivoire de la couronne se diriger de la paroi du bulbe vers la surface de la dent, sans presque se ramifier, si ce n'est près de cette surface, où ils forment un réseau fin et très-compliqué, dont les ramuscules semblent s'anastomoser entre eux.

L'émail est coloré en rouge jaunâtre dans presque toute son étendue, et cette couleur a pénétré dans une partie des tubes de l'ivoire, dans la partie où la bande colorée est la plus large. Cette bande d'émail est blanche et décolorée depuis *h* et *h'*, et va en s'amincissant jusqu'en *g* et *g'*, où elle se termine.

On remarquera la direction transversale des tubes des racines, leurs flexuosités et leurs ramifications, qui commencent plutôt, à partir de leur origine dans la paroi du bulbe.

La liaison du réseau superficiel des tubes de l'ivoire avec les stries de l'émail est bien rendue de *h* en *i*.

Dans la dentelure indiquée par *h'*, *i'* et *i'''*, il semblerait que les tubes de l'ivoire se prolongent dans l'émail.

Fig. 2. Deuxième grosse molaire de *sorex leucodon* (Herm.).

Fig. 2'. Portion de cette même dent marquée par un rond, dans la figure précédente, qui indique le champ du microscope.

b est une portion du bulbe qui pénètre dans la principale pointe de la dent. On voit à travers cette portion amincie quelques tubes qui appartiennent à la paroi opposée de l'ivoire.

c, *c*, *c* sont les tubes de l'ivoire ou de la substance principale.

a, *a*, ruban de l'émail. On remarquera la direction différente des apparences de tubes, ou des fibres de cette substance, de celle des tubes de l'ivoire.

Fig. 3 et 3'. Cette dernière figure représente la portion de racine comprise dans le rond de la figure 3, qui est celle d'une grosse molaire de *sorex leucodon* (Herm.).

Elle montre la direction transversale des tubes de l'ivoire, leur origine dans la paroi du bulbe, et leurs nombreuses ramifications à la surface.

b, *b* est le bulbe.

a, *a* et *a'*, *a'* sont les deux bandes de la racine séparées par la cavité du bulbe de cette racine.

c, *c*, *c* et *d*, *d*, *d* sont des portions du cément dans lequel cette racine est implantée.

PLANCHE III.

La figure 1 de cette planche est un autre aspect de la figure 3 de la planche II.

Les limites et la structure vasculaire des bandes d'ivoire *a*, *a* et *a'*, *a'* sont mieux tranchées et mieux distinguées de la cavité du bulbe *b*, *b*.

Le cément qui entoure ces bandes en *c*, *c*, *c* et *d*, *d*, *d*, avec ses corpuscules osseux, est mieux marqué dans sa structure.

La figure 2 représente une incisive inférieure de chauve-souris commune (*vespertilio murinus*, L.).

La figure 2' est une portion de la racine comprise dans le rond de la figure 2, et grossie de 250 diamètres.

a est la paroi de la cavité du bulbe de cette racine.

b, l'axe de la racine du côté inférieur.

c, *c* et *c'*, *c'*, les vaisseaux ou les tubes ramifiés de l'ivoire de cette racine. Les tubes disparaissent avant d'arriver à la surface, par suite de leur durcissement et de leur pétrification, qui les confond avec la substance intertubulaire.

La figure 3 est une coupe longitudinale de petite incisive de lapin, celle qui est placée derrière la grande.

J'ai toujours trouvé pétrifié le bulbe *a* de cette dent; c'est à cette pétrification précoce que j'attribue, en partie, son peu de développement : elle a d'ailleurs une bande d'émail sur les deux faces *b* et *b'*.

Les ondulations *c*, *c*, *c*, qui se remarquent dans les tubes de l'ivoire, semblent indiquer son durcissement successif.

Les figures 4 et 5 sont des coupes d'incisive de l'homme.

La figure 4 est une coupe verticale à distance de l'axe et parallèle au plan médian du corps. Le rectangle marqué en *a* indique la portion de cette dent grossie de 250 diamètres, que l'on voit fig. 4'.

Dans cette figure, *a* est l'émail et *b* l'ivoire. Les tubes de l'ivoire sont rares, flexueux, à peu près parallèles.

Vers la face extérieure, l'émail se compose de séries obliques, de petites chevilles qui, elles-mêmes, sont formées de séries de petits cubes.

Les deux substances sont d'ailleurs limitées par une ligne noire qui les sépare.

La figure 5 est une coupe horizontale d'une incisive d'homme.

Le rectangle *a* de cette figure indique la portion de cette dent vue à un grossissement de 250 diamètres dans la figure 5′.

Ici les tubes de l'ivoire, *b*, sont plus interrompus. Plusieurs semblent se prolonger dans l'émail *a*.

PLANCHE IV.

La figure 1 de cette planche est encore une étude de la même partie d'incisive de l'homme, représentée fig. 5 de la planche précédente.

Les séries ondulées de l'émail sont plus nombreuses, ainsi que les tubes de l'ivoire.

Fig. 2. Incisive inférieure du *sorex Daubentonii* mal disposée par le graveur, qui l'a mise sens dessus dessous.

On voit dans la figure 2′, à un grossissement de 250 diamètres, la portion de cette dent marquée par un rond dans la figure 2. Cette préparation est surtout pour montrer les tubes de l'ivoire et leurs ramifications nombreuses, à partir de la paroi *c*, de la cavité du bulbe *b*, en se dirigeant vers la surface *d*.

a est un espace vide que le bulbe a laissé en se retirant par la dessiccation.

La figure 3 est une coupe horizontale d'une première grosse molaire de la mâchoire inférieure du *sorex leucodon*, H.

On voit, fig 3′, la portion de cette dent indiquée par le rond de la figure 3 et grossie 250 fois.

i, *i*, *i*, *i* est l'ivoire, *e* l'émail, *b* la coupe du bulbe et de la cavité conduisant dans celle de la racine correspondante.

Les tubes ramifiés de l'ivoire et leur direction des parois de la cavité du bulbe, où ils prennent leur origine, vers la surface de la dent, ont été assez bien rendus par le dessinateur; seulement, l'origine des troncs est un peu grosse : les stries de l'émail étaient ici obscures.

Fig. 4. Pointe d'une molaire de chauve-souris commune, vue à un grossissement de 250 diamètres.

i, *i* est la substance principale; elle n'est plus recouverte d'émail en *i′ i′*, où cette substance a disparu par l'usure.

b et *b'*. Réseau très-fin dans lequel se terminent, à la surface de l'ivoire, les tubes de cette substance.

l, *l*. Ligne noire en chaînette qui reste de la membrane qui circonscrit de ce côté la substance tubulée, et sur laquelle les premières molécules d'émail sont déposées.

e et *e'*. Large ruban d'émail, évidemment composé de filets, qui sont d'abord très-arqués, en partant de la ligne noire en chaînette, se redressent ensuite, et prennent une direction oblique de dedans en dehors et vers le sommet de la dent. (Préparation K).

Fig. 5. Portion d'incisive inférieure de rat d'eau. C'est une lame qui est au-dessous de la cavité du noyau pulpeux dont on voit une bande étroite en *a*, *a*.

b est la substance tubuleuse du côté postérieur, et *b'* du côté antérieur de la dent.

d et *d'* est la bande d'émail qui revêt la dent du côté inférieur.

e et *e'* est la ligne noire, présumée membraneuse, qui sépare la substance tubulée de l'émail. (Préparation G).

Fig. 6. Lame verticale et longitudinale complète de cette même incisive, dans laquelle on voit, dans la même position que la précédente :

b, *b*, une coupe de la substance tubuleuse inférieure à la cavité du noyau pulpeux ;

d, *d'*, la bande d'émail qui la revêt en bas ;

e, *e'*, la ligne noire qui sépare les deux substances ;

c, *c'*, le commencement des troncs vasculaires de la substance tubuleuse.

a et *a'*. Portion des parois de la cavité du noyau pulpeux encore colorée par le bulbe.

i. Bande où la préparation de cette lame par l'usure a enlevé une partie des parois de la cavité du noyau pulpeux.

f, *f*. Partie de cette cavité criblée de trous, qui sont les orifices des tubes de la partie supérieure à la cavité du noyau pulpeux de la substance tubulée *g* et *g'*. Un peu plus haut, en *k* et *k'*, les tubes de cette substance ont été coupés obliquement.

h et *h'* est le bord supérieur de la dent où les tubes de l'ivoire viennent se terminer. (Préparation H.)

La figure 7 montre ce qu'on peut apercevoir, dans le champ du microscope, à un grossissement de 250 diamètres, de la paroi interne

de la cavité du noyau pulpeux, dans une lame verticale et longitudinale d'incisive de cochon d'Inde.

Cette lame est extrêmement amincie. Les points noirs sont les nombreux orifices capillaires des troncs de la substance tubuleuse ou principale, qui prennent leur origine dans cette paroi. (Préparation J.)

Fig. 8. Portion du bulbe d'une incisive de lapin.

Les ramifications sont celles des vaisseaux sanguins; les nombreux corpuscules ovales, ou pyriformes ou ronds, avec un prolongement caudal, sont les follicules du bulbe. (Préparation W).

RECHERCHES

EXPÉRIMENTALES

SUR LE MOUVEMENT DES LIQUIDES

DANS LES TUBES DE TRÈS-PETITS DIAMÈTRES[1],

PAR LE Dr POISEUILLE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Les physiologistes et les pathologistes se sont beaucoup occupés à rechercher les causes pour lesquelles tel viscère recevait plus de sang que tel autre; ils ont invoqué tour à tour l'influence nerveuse, une action propre des vaisseaux capillaires, un mouvement spontané attribué aux globules du sang. Dans notre mémoire sur les causes du mouvement du sang dans les vaisseaux capillaires, nous avons démontré que ces deux dernières causes étaient tout à fait imaginaires. Quelques auteurs ont fait entrer en scène, mais dans des limites très-resserrées, c'est-à-dire seulement pour les gros vaisseaux, les circonstances qui pouvaient naître de leurs dimensions. Cependant, si on examine au microscope les divers organes de l'homme et ceux des quatre classes des animaux vertébrés, on reconnaît aussi de grandes différences dans leurs systèmes capillaires, sous le rapport de l'étendue et du diamètre des petits vaisseaux qui les composent; si, en outre, on remarque que la pression du sang, déterminée par l'action du cœur, varie suivant l'intensité des contractions de cet organe, et

[1] Voir le rapport dans les Comptes rendus, séance du 26 décembre 1842.

que les parties du corps, par suite de leurs dispositions et de nos usages, sont soumises à des températures diverses, nous serons conduit à étudier, pour éclairer la question qui nous occupe, l'influence que peuvent avoir, sur la quantité de sang qui traverse les vaisseaux capillaires, 1° la pression; 2° leur étendue en longueur; 3° leur diamètre; 4° la température.

Nous avons d'abord examiné, sous ces quatre points de vue, l'écoulement de l'eau distillée dans des tubes inertes, des tubes de verre de très-petits diamètres, comparables à ceux de nos vaisseaux capillaires. Cette étude fait l'objet du mémoire que nous avons l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie. Nous avons ensuite considéré l'écoulement dans des tubes organisés, et nous avons recherché l'influence de la composition chimique des liquides sur leur écoulement, toujours à travers des tubes de très-petits diamètres, soit inertes, soit organisés.

DU MOUVEMENT DE L'EAU DISTILLÉE DANS LES TUBES DE TRÈS-PETITS DIAMÈTRES.

M. de Prony, en s'appuyant sur des expériences de Bossut, Couplet et Dubuat, faites sur des tuyaux de conduite dont les diamètres varient de 27 à 490 millimètres, et les longueurs de 9 à 2280 mètres, a établi une formule d'écoulement qui satisfait aux besoins de l'hydrodynamique. Mais, si les hydrauliciens peuvent négliger l'examen du mouvement des liquides dans des tubes de diamètres beaucoup plus petits, il n'en est pas de même des physiologistes, qui doivent considérer le passage des liquides à travers des tubes d'environ 0,01 de millimètre de diamètre. Cependant, quelques auteurs, Dubuat, Gerstner et M. Girard, se sont occupés du mouvement des fluides dans des tubes de calibre bien moindre que celui des tuyaux auxquels se rapporte la formule de M. de Prony; mais les plus petits diamètres des tubes sur lesquels ils ont agi sont encore beaucoup trop grands, puisqu'ils excèdent un millimètre. Il était donc nécessaire d'étu-

dier l'écoulement des liquides dans des tubes dont la capacité approchât de celle des vaisseaux capillaires de l'économie, en cherchant à découvrir les phénomènes qui leur appartiennent exclusivement. A la vérité, M. Navier, en partant d'hypothèses faites *a priori* sur les actions réciproques des molécules fluides en mouvement, est parvenu, à l'aide de l'analyse, à une équation du mouvement des liquides dans des tuyaux de diamètre extrêmement petit; mais cette formule, qui coïncide d'ailleurs avec celle que M. Girard avait déjà considérée, quoique ses propres expériences ne vinssent pas la confirmer, devait, pour être légitime, s'accorder avec les résultats obtenus expérimentalement.

Nous allons d'abord exposer, dans tous ses détails, le mode d'expérimentation que nous avons employé; nous rapporterons ensuite les expériences qui appartiennent à chacun des quatre chapitres qui forment la division naturelle de ce mémoire, et qui traiteront respectivement de l'influence de la pression, de la longueur du tube, de son diamètre et de la température.

1. Le sang qui se rend des artères aux capillaires a une pression de 2000 millimètres environ de ce liquide, ou 150 millimètres de mercure[1]. Cette pression est due, non à une charge du même liquide, mais à l'intensité des contractions du cœur, comme il arriverait si le sang se mouvait sous les efforts d'un piston dont chaque point de la surface serait pressé par le poids d'une colonne de sang de 2000 millimètres de hauteur; c'est pourquoi nous avons dû emprunter notre pression à un manomètre à air libre, soit à eau, soit à mercure; mais les conditions dans lesquelles doit se trouver le liquide en expérience, la facilité de varier à volonté et instantanément la pression, une disposition indispensable de l'appareil et dont nous parlerons bientôt, nous auraient imposé la nécessité d'adopter ce mode de pression, s'il ne nous avait pas été suggéré, comme nous venons de le dire, par la nature même du sujet.

2. Le vase de verre M (fig. 1), qui, inférieurement, porte le

[1] Voyez notre mémoire sur la force de cœur aortique.

tube *d*, par lequel doit s'écouler le liquide, et que j'appellerai *fuseau*, à cause de sa forme, communique, par sa partie supérieure, avec un tuyau en cuivre, *abb'*, se rendant à un renflement L, d'où naissent trois branches, *c'*, *d'*, *e''* : l'une, *c'g*, est en rapport avec une pompe foulante *h* (ou aspirante au besoin) ; la seconde, *d'd''f*, dont les trois quarts inférieurs, *d''f*, sont en plomb, avec un manomètre à air libre, soit à eau, *i*, pour les faibles pressions, soit à mercure, *i'*, pour des pressions beaucoup plus considérables. A ces manomètres sont fixées des échelles en cuivre verticales, divisées en millimètres, dont le zéro est placé au milieu de la hauteur, et des curseurs portant chacun un *vernier*. La troisième branche, *e''l*, communique avec un réservoir d'air *p*, en cuivre de forte épaisseur, d'une capacité de 60 litres, et ayant résisté à une pression de vingt atmosphères.

Le tube en cuivre *a* est fixé sur la traverse horizontale d'un châssis en bois de hêtre *r t v s*. A la partie interne de chaque montant *rs*, *tv*, se trouvent des crémaillères propres à recevoir des tasseaux pour soutenir une tablette horizontale *q* à différentes hauteurs; le montant *rs* porte extérieurement deux règles en bois *xy*, taillées sur leur épaisseur en biseau à leur partie externe ; sur l'une d'elles est adaptée une règle en cuivre verticale, divisée en millimètres. Ces deux règles reçoivent un *microscope chercheur*, *o*, qui a la liberté de se mouvoir le long du montant, et aussi sur son support *m*, à l'aide d'une vis de rappel. La partie moyenne de ce montant est évidée dans presque toute sa hauteur pour donner passage au tube du microscope. En *n* est un *vernier* dont 10 divisions coïncident avec 9 divisions de millimètres tracées sur le support *m*. Ces dernières divisions correspondent à celles de la règle en cuivre dont il vient d'être question. (Voir, pour plus de détails, la description des figures.) Le fuseau M est garni à sa partie supérieure d'une pièce en cuivre offrant un écrou *a'*; cet écrou reçoit la vis qui termine inférieurement le tuyau *a*.

3. J'avais fait souder, à la partie inférieure du fuseau qui devait contenir le liquide, le tube *d*, sur lequel on devait expérimen-

ter; et, les choses ainsi disposées, l'écoulement avait lieu sous une pression déterminée par celle du manomètre, d'une part, et par la hauteur du liquide au-dessus de l'orifice du petit tube *d*, d'autre part. Mais je m'aperçus bientôt que cette disposition de l'appareil devait être rejetée. En effet, le liquide, malgré toutes les précautions qu'on pouvait prendre, recevait, avant que le fuseau fût vissé à la pièce *a*, les corpuscules en nombre infini qui se meuvent au sein de l'atmosphère : les uns restaient suspendus dans le liquide; d'autres, s'en imbibant, tombaient à la partie inférieure, conjointement avec quelques corpuscules d'un volume beaucoup plus considérable qui avaient pu échapper au nettoiement préalable du fuseau M; et les tubes *d*, dont les diamètres varient de 0,6 à 0,015 millimètre, se trouvaient bientôt bouchés, et l'écoulement était ou ralenti, ou arrêté.

4. Pour parer à cet inconvénient, j'ai fait fermer la partie inférieure du fuseau et pratiquer sur le côté une ouverture b'', où l'on souda un tube supplémentaire, $b''c$, recourbé à angle droit, dont l'extrémité inférieure se terminait par le petit tube *d* : alors les corpuscules s'accumulaient en e', et ne s'opposaient plus au passage du liquide dans le tube en expérience.

5. L'écoulement, dans quelques-uns des tubes dont nous nous sommes servi, donne à peine un centimètre cube en quelques heures. Nous avions pensé jauger la quantité de liquide qui sortait du tube, à l'aide d'éprouvettes graduées en $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{20}$ de centimètre cube, et ayant 5 à 10 millimètres de diamètre; l'extrémité du tube *d* étant en contact avec les parois de l'éprouvette, le liquide, qui sort goutte à goutte et non par jet, s'écoulait le long de ses parois et parvenait ainsi dans l'éprouvette. L'objectif du microscope chercheur *o* présentant deux fils, l'un vertical, l'autre horizontal, on faisait coïncider ce dernier avec une des divisions de l'éprouvette, et, au moment où ce fil et la division de l'éprouvette se trouvaient dans le plan tangent horizontal à la surface du ménisque formé par le liquide se rendant dans l'éprouvette, le point de départ de l'expérience était noté à l'aide d'un chrono-

mètre. Le même procédé était suivi lorsque le liquide parvenait à une division supérieure de l'éprouvette graduée : on obtenait ainsi le temps qu'avait exigé l'écoulement d'un certain nombre de centimètres cubes. C'est d'après ce mode d'expérimentation que je fis les expériences que j'ai communiquées à la société philomatique en 1838, et dont il sera bientôt question. Mais en répétant, dans le dessein de les vérifier, quelques-unes des expériences où l'écoulement est très-lent, c'est-à-dire beaucoup moins d'un centimètre cube en quelques heures, je ne pus jamais obtenir exactement le même temps, et cela, pour *les mêmes divisions de l'éprouvette.*

6. Ce défaut de concordance dans les résultats provenait des circonstances suivantes : le liquide s'écoulant le long des parois de l'éprouvette, lavée préalablement avec une solution de potasse, formait un filet fluide qui, tantôt prenait des directions différentes, tantôt s'arrêtait en route pour former une gouttelette dont le volume augmentait peu à peu, et ne tombait à la partie inférieure de l'éprouvette qu'au bout d'un certain temps. Il y avait donc intermittence dans l'arrivée du liquide dans l'éprouvette, il n'y parvenait pas d'une manière uniforme. En outre, le ménisque formé par le liquide de l'éprouvette était souvent irrégulier : ainsi il affectait quelquefois une forme plus ou moins concave. Dans le cas d'une concavité plus petite du ménisque à la fin de l'expérience, on avait alors un temps trop court; et le contraire avait lieu dans le cas où le ménisque était plus concave. D'autres fois, le liquide ne mouillait que d'un côté les parois de l'éprouvette; de là un ménisque irrégulièrement en partie concave et convexe, qui rendait tout à fait incertaine l'époque à laquelle devait se terminer l'expérience. Enfin, dans les écoulements dont la vitesse est extrêmement petite, le changement de niveau du ménisque se fait avec tant de lenteur, qu'il paraît pour ainsi dire immobile; et on est tout aussi embarrassé de déterminer exactement le point de départ de l'expérience que son point d'arrivée.

7. Sans parler ici des autres tentatives que nous avons faites

pour détruire ces diverses causes d'erreur, nous allons donner la disposition de l'appareil à laquelle nous nous sommes arrêté: cette disposition aura d'ailleurs, sur les précédentes, l'avantage de pouvoir donner facilement un écoulement à une température constante, tout à fait indépendant de la température ambiante; et on sait, d'après Dubuat, combien est grande, même pour des tubes dont le diamètre excède un millimètre, l'influence de la température sur la quantité de liquide qui les traverse.

8. Nous avons fait souffler des ampoules de verre, mAm_1B (fig. 3), de capacités diverses et aussi régulières que possible. En des points diamétralement opposés, on a soudé deux tubes dont le diamètre intérieur est d'environ trois quarts de millimètre. Sur ces tubes et à égale distance de l'ampoule, deux millimètres environ, on a tracé, à l'aide d'une lime, deux lignes ou *indices*, C et E perpendiculaires à leur axe. Le tube inférieur E G, d'une longueur de deux centimètres environ, et recourbé à angle droit, est terminé par un renflement sphéroïde G, auquel se trouve soudé le tube D en expérience. La soudure est faite de telle sorte que la cavité du tube D, se dilatant *ex abrupto*, est en rapport avec celle du renflement G. Cette disposition est indispensable pour pouvoir tenir compte de la longueur du tube D sur lequel on agit; ce qui n'aurait pas lieu si le tube D, d'un diamètre beaucoup plus petit que celui du tube E G, dans sa soudure avec ce dernier, se terminait en cône. Le tube supérieur C est soudé au tube supplémentaire b'' d'un plus grand diamètre, qui l'unit alors au fuseau M (fig. 1). Si nous supposons qu'on ait rempli de liquide l'ampoule et le tube qui la surmonte, jusqu'à l'indice supérieur c, le fuseau étant fixé au tuyau a, le fil horizontal du microscope chercheur o, en rapport successivement avec les indices c et e, indiquera le moment où commence l'expérience et celui où elle se termine, et, par conséquent le temps que mettra le liquide à aller de l'indice c à l'indice inférieur e; puisqu'ici, quelle que soit la lenteur de l'écoulement, eu égard au petit diamètre des tubes e et c, la vitesse des ménisques en c et en e sera toujours sensible.

9. On voit en outre que l'ampoule et le tube *d* pourront plonger dans un cylindre de verre ou récipient, CDFE, contenant de l'eau distillée. Cette eau étant maintenue à une température constante, on obtiendra un écoulement à une température indépendante de celle ambiante et déterminée *a priori*.

10. Un autre avantage naît encore de cette disposition du tube plongeant dans le récipient CDFE : c'est la régularité avec laquelle a lieu la sortie du liquide du tube *d*. Lorsqu'on se sert de l'éprouvette, l'extrémité du tube est en contact avec ses parois ; le liquide s'écoule, non par jet, mais par gouttelettes, ainsi que nous l'avons dit (5). Cette gouttelette unit l'extrémité du tube *d* à la paroi de l'éprouvette, par suite de l'affinité du verre pour l'eau; or il est rare que les rapports de position entre le tube et la paroi de l'éprouvette soient constamment les mêmes: de sorte que la gouttelette a une forme très-variable. Il arrive même souvent que, dans les petits mouvements qu'éprouvent le tube et l'éprouvette, en heurtant seulement le châssis *rtvs* (fig. 1), il s'établit entre eux un écartement tel, que la gouttelette formée à l'extrémité du tube *d* tombe dans l'éprouvette sans toucher les parois; alors, dans ce dernier cas, comme les tubes D (fig. 3), sur lesquels on expérimente, ont un diamètre extérieur de 3 à 4 millimètres, il s'établit, entre la surface qu'offre l'extrémité du tube D et le liquide qui en sort, une affinité qui retient à l'extrémité du tube chaque gouttelette au fur et à mesure de sa formation, et, par là, l'écoulement se trouve retardé. Les résultats des expériences suivantes viennent confirmer ce que nous avançons.

On cherche le temps que met une ampoule *d'une capacité d'environ dix centimètres cubes,* à se vider sous une certaine pression, le tube D ayant son extrémité constamment en contact avec les parois de l'éprouvette, et on a une durée marquée par 20′ 11″ 45‴. Dans les mêmes circonstances, c'est-à-dire à la même pression et à la même température, la même ampoule, lorsque le liquide tombe goutte à goutte de l'extrémité du tube,

exige, pour se vider, 20′ 21″, c'est-à-dire 9″ 15‴ de plus que dans le cas précédent.

On agit sous une pression plus faible, toutes choses étant égales d'ailleurs; la durée de l'écoulement, lorsque le liquide tombe goutte à goutte, surpasse le temps de l'écoulement, le tube touchant les parois de l'éprouvette, de 32″.

Ces irrégularités cessent par l'emploi du récipient CDFE (fig. 1), mais alors l'écoulement dont il est question aura lieu *dans des tubes de très-petits diamètres, servant de communication entre deux vases.*

11. Disons un mot de la préparation de l'eau distillée dont nous avons fait usage, et de la manière de charger les tubes.

L'eau distillée doit être tout à fait débarrassée de tous corpuscules étrangers. A cet effet, nous avons été conduit à la filtrer un grand nombre de fois, jusqu'à ce qu'enfin, mise entre l'œil et la lumière, il fût impossible d'y découvrir, après un examen attentif, aucun petit corps en suspension. Pour atteindre ce but, vingt cohobations sont souvent nécessaires. On pouvait craindre alors que quelques sels étrangers, provenant du papier à filtrer, ne fussent dissous par l'eau, ainsi filtrée un si grand nombre de fois; aussi, nous avons dû prendre le papier que la science doit à M. Berzélius, ou celui, plus résistant, préparé par M. Guérin. Ces papiers, étant incinérés, ne donnent pour résidu qu'une quantité inappréciable de sels, qui, combinés avec la matière végétale du papier, ne sont nullement enlevés par l'eau. L'eau distillée, ainsi préparée, est conservée dans des flacons bouchés à l'émeri.

12. Pour charger les tubes, nous avons fixé solidement à une table un support A (fig. 4), dont la partie supérieure est évidée de manière à recevoir le bord saillant de la garniture en cuivre du fuseau M; l'extrémité du tube *d* est introduite dans le flacon B, contenant l'eau distillée, et plonge dans le liquide; alors, à l'aide d'une pompe aspirante C, adaptée à la garniture en cuivre du fuseau, l'air du fuseau étant à peine raréfié, l'eau du flacon pénètre à travers le tube ainsi que dans l'ampoule. Dès que

le liquide est parvenu à l'indice supérieur *c*, on enlève la pompe et on retire le tube du flacon. Ce procédé ne peut être employé que pour des tubes de petits diamètres, car, pour le plus gros de nos tubes, d'environ 0,6 de millimètre de diamètre, dès qu'il est chargé, il faut le mettre aussitôt en expérience, sans quoi l'ampoule se vide bientôt par la pression seule du liquide au-dessus du tube *d*. Le temps que met ainsi à se remplir l'ampoule dépend du diamètre du tube *d;* aussi, quelquefois, faut-il attendre plusieurs heures pour charger un tube. On a donné à la partie supérieure du support A une inclinaison telle, qu'il ne reste pas d'air dans l'ampoule quand l'eau pénètre dans le petit tube qui la surmonte; sans cela, la partie de l'appareil comprise entre les indices *c* et *e* ne serait pas remplie d'eau seulement.

On a procédé de la même manière pour les appareils qui n'offrent pas d'ampoule.

13. Ces détails paraîtront peut-être bien minutieux, mais aucun n'est inutile; car, malgré tous ces soins, il arrive quelquefois, rarement à la vérité, que les tubes offrent un écoulement plus lent que celui qu'on doit obtenir; alors on est obligé de recommencer l'expérience, après, toutefois, avoir débouché le tube, et on ne cesse de la répéter que lorsque deux expériences, faites dans les mêmes circonstances, ont la même durée, c'est-à-dire le minimum du temps. Est-il nécessaire d'ajouter qu'un tube et son fuseau, sortant des mains de l'émailleur, ne peuvent servir qu'autant qu'on y a fait passer, et à plusieurs reprises, un courant d'eau distillée, toujours de l'extrémité du tube vers le fuseau; et encore doit-on s'assurer avec le plus grand soin, à l'aide d'une loupe, que l'ampoule et le tube ne contiennent aucun corpuscule étranger.

14. Nous allons maintenant nous occuper de l'évaluation de la pression, par suite de la disposition de l'appareil. On doit considérer d'abord la pression indiquée par le manomètre, qu'on obtient sur-le-champ; ensuite, celle d'une colonne de liquide dont la hauteur varie, pendant tout le cours de l'expérience, depuis *cd*

jusqu'à *ed* (fig. 1); et aussi la pression de l'eau du récipient. Il y a, en outre, une correction à faire au sujet de la capillarité des tubes *c* et *e*, de petit diamètre (8), et de l'ampoule, dont le diamètre, dans certains cas, n'excède pas 3 à 4 millimètres. Comme cette capillarité s'exerce incessamment depuis le point *c* jusqu'en *e*, et qu'elle agit en soulevant une certaine colonne de liquide, on comprend qu'une fois estimée, elle devra entrer par soustraction, comme celle du récipient, dans les pressions dont nous venons de parler. Nous rapporterons en leur lieu les expériences qui déterminent cette capillarité, qu'il est tout à fait impossible de négliger, surtout lorsqu'il s'agit de faibles pressions. Nous prendrons aussi en considération le poids de l'air de l'appareil qui pèse sur le liquide de l'ampoule, et les différences de pression de la part de l'atmosphère, quand on fait usage du manomètre à *eau*, et sur l'eau du récipient, et sur l'eau de la colonne ascendante du manomètre.

15. Quelques hydrauliciens admettent qu'un écoulement à travers un tube, ayant lieu d'une manière continue, si P et P′ représentent respectivement les charges ou pressions au commencement et à la fin de l'expérience, la pression à laquelle s'est écoulée la quantité de liquide obtenue, pendant un certain temps, est la moyenne des pressions P et P′, c'est-à-dire $\frac{P+P'}{2}$. Cette proposition, quand il s'agit de tubes de très-petits diamètres, n'est point exacte pour des charges P et P′ très-différentes l'une de l'autre par rapport à leurs grandeurs, ainsi que nous le verrons bientôt; mais elle l'est sensiblement lorsque les pressions P et P′, de quelques centaines de millimètres par exemple, diffèrent peu l'une de l'autre, seulement de quelques centimètres.

En effet, nous avons pris un tube cylindrique AB (fig. 5), de 1400 millimètres de longueur et d'un diamètre intérieur de 25 millimètres au moins, n'offrant, par conséquent, aucun phénomène de capillarité. On a soudé latéralement un tube supplémentaire C, terminé par le tube de très-petit diamètre D. On

remplit l'appareil, jusqu'en E, d'eau distillée, comme nous l'avons dit précédemment (12), et on le visse au tuyau *a* (fig. 1) pour lui donner une position verticale. L'extrémité du petit tube D est mise en contact avec les parois d'une éprouvette graduée en $\frac{1}{20}$ de millimètre cube; on détermine, à l'aide du microscope chercheur, la distance du niveau supérieur E de l'eau dans le grand tube à l'axe du tube horizontal D : on a ainsi la pression de 1330 millimètres, sous laquelle s'écoule le liquide. On note la pression de 1329 millimètres, quand il s'est écoulé un demi-centimètre cube. Le temps employé à cet écoulement est de 7′ 9″ au chronomètre : ainsi, à la pression de $1329^{mm},5$, il s'est écoulé un demi-centimètre cube en 7′ 9″. Dans une nouvelle expérience, faite, comme la précédente, à la même température, à la pression de $1317^{mm},5$, il s'est écoulé un demi-centimètre cube en 7′ 13″ 30‴. Une troisième expérience, à laquelle on procède de la même manière, mais à la pression de $1323^{mm},5$, donne un demi-centimètre cube en 7′ 11″. La moyenne entre les pressions des deux premières expériences est $1323^{mm},5$: elles donnent donc un centimètre cube en 14′ 22″ 30‴, et, par suite, un demi-centimètre cube en 7′ 11″ 15‴. C'est le temps obtenu dans la troisième expérience, faite à la pression moyenne de $1323^{mm},5$. Ainsi, le principe dont nous venons de parler est tout à fait applicable ici[1].

[1] Les grandes dimensions du fuseau AB (fig. 5) nous ont permis de vérifier, au sujet de l'écoulement qui nous occupe, si, la pression provenant en entier du liquide, ou en partie du liquide et d'un manomètre, par l'intermédiaire de l'air pressant sur le liquide, il y avait, toutes choses égales d'ailleurs, identité parfaite dans l'écoulement. Quelques hydrauliciens pensent qu'il ne doit y avoir aucune différence, même dans le cas de tuyaux de grands diamètres; d'autres, et M. Savart est du nombre, sans rien affirmer, ne reconnaissent pas *a priori* qu'il doive en être ainsi : nous avons donc été conduit à faire les expériences suivantes.

En procédant comme il vient d'être dit (15), nous avons obtenu, dans le cas d'une pression de $1325^{mm},5$, déterminée seulement par la hauteur du liquide, un temps égal à 28′ 14″, pour l'écoulement de 2 centimètres cubes. Lorsqu'au contraire l'eau distillée, au lieu d'être en E (fig. 5), n'était qu'en E′, nous avons emprunté à un manomètre à eau distillée ce qui manquait à la pression déterminée par la hauteur verticale E′D, pour égaler la précédente, $1325^{mm},5$; nous avons obtenu 28′ 12″, pour le temps correspondant à l'écoule-

On a eu le soin, dans ces expériences, de s'assurer que les ménisques de l'éprouvette, au point de départ et au point d'arrivée, étaient réguliers, et que le liquide, en tombant le long des parois de l'éprouvette, avait une marche uniforme; on s'est aussi astreint à remplir les mêmes dix divisions de l'éprouvette. D'ailleurs, il s'agit ici, eu égard à la pression et au diamètre du tube D, d'un écoulement assez vite; aussi l'ascension du ménisque ne donne aucune incertitude au sujet du moment où se termine l'expérience. Remarquons, en outre, que le peu de durée de chacune d'elles nous a permis de les faire à la même température ambiante (6) et (7).

16. Nous allons nous appuyer sur le principe précédent, pour déterminer la pression qui a lieu, lorsque le niveau du liquide va de l'indice C à l'indice E (fig. 3). Dans l'écoulement du liquide, depuis l'indice C jusqu'au plan médian horizontal AB, chaque tranche du fluide se meut sous une pression particulière qui lui est propre. Cette pression diminue au fur et à mesure que les tranches s'approchent du plan AB, et en même temps le nombre des molécules fluides qui les composent augmente, et ce nombre dépend essentiellement de la forme du vase mAm_1B. Les pressions, dans chaque tranche, doivent donc dépendre de cette forme; mais, comme la capacité mAm_1B n'est nullement géométrique, il serait difficile, pour ne pas dire impossible, de déter-

ment de 2 centimètres cubes. Nous avons une différence de deux secondes dans la durée de l'une et l'autre expérience; mais, si nous remarquons qu'ici nous faisons usage de l'éprouvette, et que, malgré les soins employés pour avoir la même température, les tubes étant au sein de l'atmosphère, peuvent, à cause de la chaleur qu'émet notre corps, avoir une température un peu différente, nous pensons qu'on peut regarder comme nulle cette différence, donnée par d'aussi grands nombres. Le tube D, qui donnait passage au liquide, avait $0^{mm},1$ environ de diamètre, et, comme le fuseau AB a environ 27 millimètres de diamètre, on voit que le mouvement de l'eau dans le fuseau est extrêmement lent. On conçoit alors le peu d'influence que peut avoir, dans ce cas d'une vitesse presque infiniment petite, la force accélératrice de la pesanteur. Ainsi, quoique nous ayons été conduit par la nature du sujet (1) à emprunter la plus grande partie de la pression à un manomètre, le genre d'écoulement que nous étudions se prête parfaitement à cette substitution; de telle sorte que les lois du mouvement obtenues par le mode d'expérimentation que nous avons adopté eussent été les mêmes, si on avait fait usage d'une pression fournie entièrement par la masse du liquide.

miner *analytiquement la pression totale.* Or, si nous remarquons qu'il y a, au-dessous du plan médian horizontal AB, autant de tranches qu'au-dessus, la pression totale, depuis C jusqu'en E, s'obtiendra facilement, en nous appuyant sur le résultat des expériences précédentes. En effet, le volume $CAEm_1Bm$ peut être regardé comme composé de cylindres égaux deux à deux, m, m_1; m', m_1'; m'', m_1''; m''', m_1''', etc. en nombre infiniment grand, et, chacun, d'une hauteur infiniment petite. Ces cylindres sont symétriquement placés par rapport au plan horizontal AB, passant par le centre O du volume CAEB. En supposant la distance $OF = H$ (le point F est sur la prolongation de l'axe du petit tube D), celles $OI = OI' = h$, et, H_1 la pression empruntée au manomètre à eau, par exemple, la pression sous laquelle s'écoulera le cylindre m' sera $H_1 + H + h$, celle de son symétrique m_1' sera $H_1 + H - h$; si t' représente le temps de l'écoulement du cylindre m', et t_1', celui du cylindre m_1', on aura, d'après ce qui précède, $m' + m_1'$ ou $2m'$, s'écoulant à la pression $\frac{H_1+H+h+H_1+H-h}{2}$ dans le temps $t' + t_1'$, ou $2m'$ à la pression $H_1 + H$ dans le temps $t' + t_1'$: de même, on aura $2m''$ à la pression $H_1 + H$ dans le temps $t'' + t_1''$; $2m'''$, à la pression $H_1 + H$, dans le temps $t''' + t_1'''$, et ainsi de suite : il viendra donc $2m + 2m' + 2m'' + 2m'''$, etc. à la pression $H_1 + H$, dans le temps $t + t_1 + t' + t_1' + t'' + t_1'' + t''' + t_1'''$, etc. c'est-à-dire le volume de l'ampoule CAE, écoulé à la pression $H_1 + H \left(H = \frac{CF + EF}{2} \right)$, et dans le temps qu'aura exigé la capacité CAEB à se vider.

17. Exposons, dans tous ses détails, la manière dont on a procédé pour déterminer la pression, le temps de l'écoulement à une température constante, dans chacune des expériences que nous rapporterons bientôt.

Un baquet GHIK (fig. 1), dont la capacité est d'environ 20 décimètres cubes, est rempli d'eau commune à 10° c. température que nous avons choisie pour la plupart des expériences où il ne s'agit que de la pression, de la longueur du tube et de

son diamètre [1]. Ce baquet reçoit le récipient CDFE, contenant de l'eau distillée, dont la température 10° c. est déterminée par un thermomètre T, indiquant des cinquièmes de degré, suspendu au sein de l'eau du récipient, de telle sorte que sa boule se trouve au niveau du petit tube *d* en expérience.

Le robinet R ayant été fermé, on fait jouer le piston de la pompe foulante *h*, jusqu'à ce que le manomètre marque la pression que l'on veut obtenir; on ferme alors le robinet R′. Le tube ayant été chargé, ainsi qu'il a été dit (12), le fuseau est vissé sur le tuyau *a* avec effort. Le tube *d*, l'ampoule et une partie du tube qui la surmonte plongent dans l'eau distillée du récipient. Si la température extérieure diffère beaucoup de 10°, on attend alors un certain temps pour qu'ils prennent la température du récipient, dont le niveau CD de l'eau qu'il contient surpasse de 1 millimètre celui de l'indice supérieur *c*.

Le fil horizontal du microscope étant au même niveau que l'indice *c*, on ouvre le robinet R; la pression du manomètre s'exerce alors sur l'eau de l'ampoule, et le liquide s'écoule dans le récipient. C'est au moment où le petit ménisque, formé par le liquide du tube qui surmonte l'ampoule, se trouve dans le plan déterminé par le fil horizontal du microscope et l'indice *c*, que l'expérience commence. Cette époque est indiquée par un chronomètre. On détermine, *en même temps*, la pression offerte par le manomètre, à l'aide des deux curseurs α et ϵ, qui se meuvent, ainsi qu'on l'a dit, sur une échelle en cuivre divisée en millimètres(2); on note la température de l'eau distillée du manomètre à l'aide du thermomètre t', placé dans une éprouvette à pied, $u'v'$. On a préalablement pris, au moyen du microscope chercheur, le niveau de l'eau du récipient au commencement de l'expérience, et aussi ceux des indices *c* et *e*. C'est au moment où le liquide de l'ampoule parvient à l'indice inférieur *e* que l'expérience est ter-

[1] Quand la température ambiante est plus grande que 10 degrés, l'eau du baquet est entretenue à une température un peu plus petite que 10 degrés, et, dans le cas contraire, elle a une température un peu supérieure.

minée : cette nouvelle époque est aussi indiquée par le chronomètre. On prend, immédiatement après, le niveau de l'eau, dans le récipient, car il a dû s'élever par l'arrivée de l'eau de l'ampoule; et on consulte aussi, sur-le-champ, les curseurs du manomètre, puisque la pression est généralement différente au commencement et à la fin de l'expérience, eu égard aux variations diurnes de la pression atmosphérique et de la température ambiante, qui agissent sur le réservoir d'air *p*, pendant tout le cours de l'expérience, et aussi à la variation du volume d'air du manomètre.

18. Spécimen d'une expérience.

Tube C, longueur $24^{mm},4$; capacité de l'ampoule $2^{c.\ cub.},1057$ à 10° c.

AU COMMENCEMENT DE L'EXPÉRIENCE :

Température du récipient 10° c.		
Curseur supérieur du manomètre à eau[1]...	$1016^{mm},5$	Température de l'eau
Curseur inférieur.....	1018 ,5	du manomètre 13°,7.
La pression au départ est.....	P = 2035 ,0	

À LA FIN DE L'EXPÉRIENCE :

Température du récipient 10° c.		
Curseur supérieur.....	$1015^{mm},5$	Température de l'eau
Curseur inférieur.....	1017 ,5	du manomètre 13°,8.
La pression à la fin est.....	P′ = 2033 ,0	

Le microscope donne les niveaux suivants; le zéro de l'échelle est placé en haut.

Niveau de l'eau du récipient au commencement de l'expérience.....	322 mill.
Niveau de l'indice supérieur *c*.....	323
Niveau de l'indice inférieur *e*.....	348
Niveau de l'eau du récipient à la fin de l'expérience.....	321 ,89
Temps de l'écoulement indiqué au chronomètre.....	43′ 18″ 30‴.

19. Évaluons la pression résultant de ces données.

[1] Les diamètres intérieurs des branches du manomètre à eau sont de 30 millimètres environ. Comme avec ces diamètres il n'y a pas de capillarité, la différence des niveaux dans les deux branches exprime bien la pression; ce qui n'aurait pas eu lieu si les deux branches eussent offert un moins grand diamètre, car alors la capillarité variait avec les diamètres, et on sait qu'il est impossible de trouver des tubes de verre de diamètres parfaitement égaux.

D'après ce qu'on a dit précédemment (16), il faut prendre la moyenne entre P et P' : on a donc, $P'' = 2034^{mm}$, à la température moyenne 13°,75; mais on ramène les pressions à la température constante de 10°. Cette colonne liquide de 2034^{mm} devient, ainsi réduite, $P_1 = 2033^{mm},16$. Telle est la pression provenant du manomètre.

On a pour la pression, en l'absence du récipient, K représentant la distance verticale de l'indice inférieur *e* au tube *d* (fig. 1) $2033,16 + \frac{348^{mm} - 323^{mm}}{2} + K$, dont il faut soustraire la pression due à l'eau du récipient, en ayant égard à ses niveaux au commencement et à la fin de l'expérience. Cette dernière pression est $\frac{348^{mm} - 322^{mm} + 348^{mm} - 321^{mm},89}{2} + K$. On a donc, pour la pression qui nous occupe,

$$2033^{mm},16 + \frac{348^{mm} - 323^{mm}}{2} + K - \frac{348^{mm} - 322^{mm} + 348^{mm} - 321^{mm},89}{2} - K,$$

ou

$$2033^{mm},16 + 12^{mm},500 - 26^{mm},055 = 2033^{mm},16 - 13^{mm},555 = 2019^{mm},605\,[1].$$

20. Telle n'est pas cependant la pression sous laquelle l'écoulement a lieu. Sans parler de la capillarité de l'ampoule, qui va bientôt nous occuper, nous avons d'abord à considérer (14) la pression inégale qu'exerce l'atmosphère sur la surface de l'eau du récipient et la surface S' (fig. 1) de l'eau de la branche ascendante du manomètre. La surface S' de l'eau du manomètre s'élève au-dessus de la surface de l'eau du récipient de 917,5 millimètres dans cette expérience. Cette colonne d'air donne une différence de pression qui, évaluée en eau, à la pression atmos-

[1] La quantité $13^{mm},555$, qui est soustraite de la pression $2033^{mm},16$ indiquée par le manomètre, est la même pour toutes les expériences faites avec la même ampoule, le niveau de l'eau du récipient surpassant toujours de 1 millimètre celui de l'indice supérieur *c*, au commencement de l'expérience.

phérique, est égale à $1^{mm},176$; elle doit être évidemment retranchée de $2019^{mm},605$ ci-dessus indiquée. Mais il faut, de plus, tenir compte des poids inégaux des colonnes d'air de même densité, comprises, l'une entre le sommet U du manomètre et la surface S de l'eau dans sa branche descendante, l'autre entre le même sommet U et la surface du liquide de l'ampoule. La première colonne a pour hauteur 2377^{mm}; la seconde, qui agit en faveur de la pression qu'on cherche, a 1260^{mm} : on a donc à évaluer le poids d'une colonne d'air de $2377^{mm} - 1260^{mm} = 1117^{mm}$ à une pression composée, de la pression ambiante 760^{mm}, et du poids de la colonne d'eau du manomètre, $2033^{mm},16$; c'est-à-dire $760^{mm} + \frac{2033^{mm},16}{13,57} = 909^{mm},82$ en mercure. Son poids à la pression atmosphérique serait de $1^{mm},432$ d'eau; mais à celle de $909^{mm},82$, il est de $1^{mm},714$ d'eau. Cette dernière quantité et la précédente $1^{mm},176$, entrant par soustraction dans la pression que nous voulons évaluer, il viendra alors

$$2019^{mm},605 - 1^{mm},176 - 1^{mm},714 = 2016^{mm},715.$$

21. Nous pouvons maintenant exposer la marche suivie pour déterminer la capillarité de l'ampoule. Cette capillarité doit encore être retranchée de $2016^{mm},715$. En effet, supposons que l'écoulement cesse en un instant donné : on aura la pression indiquée précédemment, moins la colonne de liquide qui est soulevée par suite de la capillarité du verre, dans le point de l'ampoule où le liquide s'est arrêté. Or, cette capillarité s'exerce incessamment pendant tout le temps de l'écoulement, avec une intensité variable depuis l'indice *c* jusqu'à l'indice *e;* c'est cette capillarité totale qu'il nous faut obtenir. Le tube *d* ayant été remplacé par un autre, afin que l'écoulement fût plus rapide, on a cherché le temps que mettait à s'écouler, à la température de 10° c. du récipient, l'eau de l'ampoule comprise entre *c* et *e;* on a obtenu $4'\ 18''\ 15'''$ sous la pression apparente de $647^{mm},485$ déterminée en procédant comme nous venons de le dire (18, 19, 20).

Les $2^{cc},1057$, qui représentent la capacité de l'ampoule, se sont écoulés, non sous la pression de $647^{mm},485$, mais à une pression égale à $647^{mm},485$, diminuée de la quantité qui exprime la capillarité totale de l'ampoule, depuis l'indice *c* jusqu'à *e*. Or, si l'ampoule, au lieu d'être un sphéroïde, était un cylindre, dont on peut *a priori* connaître la capillarité, nous aurions sur-le-champ la pression finale, en soustrayant de la pression apparente la capillarité du cylindre.

Nous avons fait souder à un cylindre gradué avec le plus grand soin, en dixièmes de centimètre cube, le petit tube qui a servi à l'écoulement dans l'expérience précédente, après l'avoir détaché de son ampoule en *e* (fig. 1), et nous avons cherché le temps qu'exigeaient à s'écouler 2 centimètres cubes de cette nouvelle ampoule cylindrique, toujours à la température du récipient 10°c. et à une pression voisine de $647^{mm},485$, par exemple, $648^{mm},36$; nous avons obtenu, pour la durée de l'écoulement des 2 centimètres cubes $244'',5$ et, par suite $257'',42$, pour le temps de l'écoulement de $2^{cc},1057$, capacité de l'ampoule sphéroïde. Comme la capillarité du cylindre gradué, déterminée *a priori*, est de 2 millimètres, nous sommes certain, alors, que la pression, dans cette dernière expérience, est exactement $648^{mm},36 - 2^{mm} = 646^{mm},36$.

Si nous connaissions la pression qu'il faudrait employer pour que l'écoulement des $2^{cc},1057$ se fît dans le même temps $258'',25$ de la première expérience, en soustrayant cette pression de celle indiquée dans cette expérience, nous aurions évidemment la capillarité totale de l'ampoule sphéroïde. A cet effet, nous allons nous appuyer sur une conséquence tirée des trois expériences faites précédemment (15), et d'après lesquelles on voit que les pressions sont en raison inverse des temps pour l'écoulement d'une même quantité de liquide. Nous verrons bientôt que cette proposition est générale, quant au genre d'écoulement qui nous occupe, et s'applique au petit tube qui donne passage au liquide dans les deux expériences que nous venons de rapporter; d'ailleurs, sans parler ici de la généralité de cette loi, on doit l'admettre,

du moins, pour des pressions très-voisines l'une de l'autre, comme il arrive dans les trois expériences qui viennent d'être rappelées. x étant la pression cherchée on aura alors $258'',25 : 257'',42 :: 646^{mm},36 : x = 644^{mm},282$: ainsi $2^{cc},1057$ s'écoulent en $258'',25$, sous la pression de $644^{mm},282$; mais, en employant l'ampoule sphéroïde, la même quantité de liquide s'écoule, dans le même temps, sous la pression apparente de $647^{mm},485$. La capillarité totale de cette ampoule est donc égale à $647^{mm},485 — 644^{mm},282 = 3^{mm},203$.

Cette quantité doit être retranchée de la pression indiquée plus haut (20), c'est-à-dire de $2016^{mm},715$, pour avoir enfin la pression à laquelle s'est faite l'expérience (18); on obtient $2013^{mm},512$, et en mercure $148^{mm},303$ à la température de 10°.

Des expériences analogues ont été faites pour la détermination de la capillarité de chaque ampoule : nous allons rapporter celles relatives à l'ampoule du tube *E*.

22. Capillarité de l'ampoule du tube *E*. La capacité de cette ampoule jusqu'aux indices *c* et *e* est de $0^{cc},125$ à 10°. Le temps que met cette ampoule à se vider à la température 10° du récipient, sous la pression apparente de $984^{mm},53$, déterminée ainsi qu'il a été dit (18, 19 et 20), est $7' 27'' 30'''$. A un cylindre gradué en vingtièmes de centimètre cube, et qui offre une capillarité de 2 millimètres, on fait souder le tube qui a servi dans l'expérience qui vient d'être citée; et, sous une pression voisine de la précédente, c'est-à-dire $984^{mm},62$, donnée par le manomètre, y compris toutes les corrections indiquées, on obtient, à la température 10° du récipient, $59' 10'' 30'''$ pour la durée de l'écoulement de 1 centimètre cube. Comme la capillarité de l'ampoule cylindrique est de 2 millimètres, la pression véritable est alors $982^{mm},62$. Par conséquent, $0^{cc},125$, capacité de l'ampoule, se serait écoulé, sous la même pression, en $7' 23'' 49'''$. Comme ce temps est différent de $7' 27'' 30'''$ obtenu dans la première expérience, nous cherchons sous quelle pression aurait dû être faite la seconde expérience pour avoir la même durée; nous aurons, en regardant les pressions en raison inverse des temps, comme

nous venons de le faire tout à l'heure (21), x représentant la pression cherchée

$$982^{mm},62 : x :: 7' 27'' 30''' : 7' 23'' 49''' ; x = 974^{mm},532.$$

Ainsi $0^{cc},125$, pour s'écouler en $7' 27'' 30'''$, exige la pression de 974^{mm}, 532, lorsque la même quantité de liquide s'écoule, mais en faisant usage de l'ampoule, dans le même temps et à la même température, sous la pression apparente de $984^{mm},53$: la capillarité de l'ampoule est donc égale à $984^{mm},53 - 974,532 = 9^{mm},998$ ou 10 millimètres. Cette capillarité est entrée dans toutes les expériences faites avec cette ampoule.

23. Les expériences propres à déterminer la capillarité de chaque ampoule exigent une très-grande précision dans leur exécution; aussi les a-t-on répétées un grand nombre de fois. On éviterait ces expériences, laborieuses par suite de l'exactitude qu'elles imposent, si l'on remplaçait l'ampoule par un cylindre gradué dont on connaîtrait *a priori* la capillarité, en ayant le soin surtout de ne prendre, dans les expériences successives, pour la quantité de liquide écoulé, que les mêmes divisions du tube gradué, comme nous l'avons fait quelquefois; mais dans le cas d'écoulements très-lents, il faudrait alors changer le cylindre, lui en substituer d'autres de diamètres de plus en plus petits (6) : ce qui est un inconvénient, puisque, dans la comparaison des expériences entre elles, sous le rapport de la pression, de la longueur des tubes, par exemple, on ne peut plus compter identiquement sur le même volume de liquide écoulé. Cet inconvénient n'a pas lieu par l'usage de l'ampoule.

24. Rapportons encore une expérience faite, non avec le manomètre à eau, mais avec le manomètre à mercure. Celui qui nous a communément servi ne surpassait pas une atmosphère de pression.

Tube *C*, longueur $24^{mm},4$; capacité de l'ampoule $2^{cc},1057$ à 10° c.

AU COMMENCEMENT DE L'EXPÉRIENCE :

Température du récipient 10° c.
Curseur supérieur du manomètre à mercure.. 191mm,7 } Température du mercure
Curseur inférieur..... 197 ,1 } du manomètre 13°.

La pression au départ est..... P = 388 ,8

À LA FIN DE L'EXPÉRIENCE :

Température du récipient 10° c.
Curseur supérieur..... 191mm,5 } Température du mercure
Curseur inférieur..... 196 ,9 } du manomètre 13°.

La pression à la fin est..... P′ = 388 ,4

Niveau de l'eau du récipient au commencement de l'expérience..... 322 mill.
Niveau de l'indice supérieur de l'ampoule..... 323
Niveau de l'indice inférieur..... 348
Niveau de l'eau du récipient à la fin de l'expérience..... 321 ,89
Le temps de l'expérience indiquée au chronomètre est..... 16′ 35″

25. Évaluation de la pression : la moyenne entre P et P′ est $P'' = 388^{mm},6$; mais, à la température de 13° c. Nous cherchons P″ à 10° c. et on a $P_1 = 388^{mm},39$: telle est la pression indiquée par le manomètre à 10°.

S'il s'agissait du manomètre à eau distillée, il faudrait soustraire, du nombre représentant la pression indiquée par le manomètre, $13^{mm},555$ d'eau (19), provenant du poids de l'eau de l'ampoule et de celle du récipient ; nous traduisons alors cette colonne d'eau à 10 degrés en colonne de mercure à la même température : il vient $0^{mm},998$, qui, retranché de P″, donne $387^{mm},392$.

Nous avons trouvé (21), pour la capillarité de l'ampoule $3^{mm},2$ d'eau à 10° c. Cette quantité, traduite en mercure toujours à 10 degrés, devient $0^{mm},235$, qu'il faut retrancher du nombre précédent : on a donc $387^{mm},392 - 0^{mm},235 = 387^{mm},157$ de mercure pour la pression à laquelle a eu lieu l'écoulement.

26. Ici, on ne tient pas compte, ainsi qu'on l'a fait pour le manomètre à eau, de la différence des pressions qu'exerce l'atmosphère, et sur l'eau du récipient, et sur la surface du mercure dans la branche ascendante du manomètre, ni de la différence

des colonnes d'air qui pressent l'eau de l'ampoule et le mercure dans la branche descendante du manomètre, attendu que ces différences, dans le cas du manomètre à mercure, sont très-petites. Nous remarquerons, d'ailleurs, que, quel que soit le soin qu'on ait apporté dans le choix des branches du manomètre à mercure, pour les avoir de même diamètre, il y a toujours quelque petite différence qui rend inégale la capillarité des deux branches, et, par conséquent, donne aux ménisques correspondants une forme qui n'est pas identiquement la même; aussi, les niveaux indiqués par les curseurs ne nous donnent-ils peut-être pas même la pression à moins de $0^{mm},1$ près (les branches de ce manomètre ont de 6 à 7 millimètres de diamètre). Cette petite erreur n'est pas à craindre pour le manomètre à eau, puisque ses branches ont près de 30 millimètres de diamètre.

27. Telle est la marche que nous avons suivie dans les expériences que nous rapporterons bientôt. Nous avons dû ne rien négliger, sous le rapport de l'exactitude, dans des écoulements où il ne s'agit que de quelques centimètres cubes, et quelquefois moins de $\frac{1}{10}$ de centimètre cube en quelques heures : des erreurs, même très-petites, en auraient produit de très-grandes, en en déduisant les dépenses pour des temps beaucoup plus considérables.

28. Disons quelques mots sur les tubes dont nous avons fait usage et sur la mesure de leur diamètre. Ces tubes sont en cristal et ont extérieurement 3 à 4 millimètres de diamètre. Quoiqu'il soit impossible de trouver des tubes rigoureusement cylindriques et circulaires; cependant, après avoir fait un choix parmi un très-grand nombre, nous en avons rencontré quelques-uns qu'on pouvait regarder comme circulaires et cylindriques, dans une étendue à la vérité peu considérable. Ce choix était absolument nécessaire pour déterminer l'influence que pouvaient avoir, sur l'écoulement, les longueurs des tubes et leurs diamètres.

29. Après avoir nettoyé le tube en y faisant passer du mercure à plusieurs reprises, on y introduit une petite quantité de ce liquide. A l'aide d'une pompe foulante ou aspirante, adaptée

à l'une de ses extrémités, on fait parcourir à cet index de mercure, dont la longueur ne surpasse pas quelques centimètres, toute l'étendue du tube, et on mesure la longueur de l'index chaque fois qu'il change de place. S'il conserve, pour une certaine portion du tube, à peu près la même longueur, on en conclut que cette partie du tube offre à peu près le même calibre en tous ses points; mais cette première opération, qu'on doit à M. Gay-Lussac, fait connaître seulement que le tube est cylindrique; il peut être ovalaire ou circulaire. Pour s'en assurer, il faut avoir recours au microscope. On fait user et doucir, à ses extrémités, une portion du tube de 2 ou 3 millimètres de longueur, de manière qu'elle soit coupée bien perpendiculairement à son axe; on fixe le petit tube à une lame de liége, offrant une ouverture propre à le recevoir à frottement, et on le place sous l'objectif du microscope. Par là, on voit sur-le-champ si la cavité du tube est circulaire ou ovalaire.

30. Pour déterminer les diamètres du tube, on adapte alors au microscope horizontal d'Amici la chambre claire horizonto-verticale; le pouvoir amplifiant du microscope étant connu *a priori*, on mesure, avec un compas, les diamètres de la cavité du tube dont la figure se trouve reportée sur la table horizontale du microscope, avec le soin de placer les pointes du compas en des points de l'image diamétralement opposés; on porte, sur une échelle divisée en millimètres, l'ouverture de compas qu'on vient d'obtenir, et, divisant le nombre de millimètres donné par l'échelle, par le pouvoir amplifiant des lentilles, 500 par exemple, on a ainsi les diamètres du tube.

31. En se servant ainsi de petites portions du tube, il y a des phénomènes de diffraction, de réflexion et de réfraction, qui peuvent donner lieu à quelques erreurs dans l'estimation des diamètres. Ces causes d'erreur disparaissent en faisant préparer de petits disques du tube d'environ 0,1 de millimètre d'épaisseur, avec la condition que les sections du tube soient toujours perpendiculaires à son axe. Ces disques, usés et doucis, sont mis

entre deux lames de verre, conjointement avec du baume de Canada, ensuite on chauffe légèrement; par là, le baume pénètre dans la cavité du tube. Le disque, ainsi préparé, et placé sous l'objectif du microscope, n'offre point les phénomènes de lumière dont on vient de parler; on ne découvre qu'une ligne légèrement opaque, indiquant le contour de la cavité du tube.

32. Un autre moyen pourrait aussi être employé, après s'être assuré que le tube est presque cylindrique et circulaire; il consiste à faire entrer dans le tube, à l'aide d'une pompe aspirante, une certaine quantité de mercure le remplissant en grande partie; à mesurer la longueur de cette colonne de mercure, et à la recueillir en se servant d'une pompe foulante. On fait entrer une nouvelle quantité de mercure, qu'on joint à la première après avoir aussi déterminé sa longueur; on répète cette manœuvre un grand nombre de fois; on ajoute entre elles les diverses longueurs obtenues : on a ainsi la hauteur d'un cylindre dont la base est la section normale du tube. On détermine ensuite le poids du mercure recueilli, et, par suite, son volume à la température ambiante; en divisant ce volume par la hauteur précédente, on a la section du tube, qui est $\frac{\Pi D^2}{4}$ (Π représentant le rapport de la circonférence au diamètre, et D le diamètre cherché), et par suite D, en supposant toutefois le tube cylindrique et circulaire. Nous avons opéré ainsi sur quatre tubes : pour l'un d'eux, la hauteur du cylindre de mercure a été de $11^{m},037$, son poids, de $0^{g},1665$; nous avons ainsi trouvé, pour le diamètre du tube, $0^{mm},0376$ à la température de 10 degrés, à laquelle on opérait : mais ce tube, mesuré à l'aide de la *camera lucida*, comme il vient d'être dit, était légèrement ovalaire; il a donné le grand diamètre $= 0^{mm},045$ et le petit diamètre $0,^{mm}0316$; si on le regarde comme parfaitement elliptique, le cercle équivalent à cette ellipse aurait pour diamètre $0^{mm},0377$. On voit donc que le résultat obtenu à l'aide de la *camera lucida* s'éloigne peu de celui donné par le dernier moyen.

Le mode de mensuration par la *camera lucida*, qui, seul, doit être employé dans le cas où le tube est ovalaire, ne demande qu'un temps fort court, comparé à celui qu'exige l'emploi du mercure; ainsi, on a été plus de douze heures pour obtenir les $11^{m},037$, qui représentaient la hauteur du cylindre de mercure. Cette circonstance, et les petites erreurs qui peuvent se glisser dans les mesures des nombreuses colonnes de mercure, nous ont fait préférer, toutes choses égales d'ailleurs, l'usage de la *camera lucida*.

On pourrait aussi, si on ne voulait pas se servir de compas, remplacer la *camera lucida* d'Amici par son miroir percé. Alors on se sert du microscope vertical; une mire est placée verticalement à une certaine distance du microscope et offre une échelle dont un certain nombre de divisions se trouvent occupées par l'image amplifiée du tube qu'on veut mesurer. En donnant au disque diverses positions sur la platine du microscope, on peut s'assurer si la cavité du tube est circulaire, et ensuite la mesurer avec un degré d'exactitude qui laisse peu de chose à désirer, en augmentant la distance de la mire au microscope. Ce moyen de mensuration est dû à M. Charles Chevalier.

33. Nous ferons, au sujet de la mesure des objets à l'aide de la *camera lucida* ou du miroir percé d'Amici, une remarque sur une erreur qui pourrait se glisser à l'insu de l'observateur et qui n'a pas fixé l'attention des micrographes. Si, pour mesurer le pouvoir amplifiant du microscope, le micromètre occupe un certain lieu du champ de la vision, il est évident que tout objet qui sera placé dans le même point sera également amplifié : de là, un moyen très-simple d'avoir la grandeur réelle de l'objet, ainsi que nous l'avons dit précédemment. Mais si le corps qu'on veut mesurer occupe un point du champ de la vision différent de celui qu'occupait le micromètre; si, par exemple, l'objet est près des bords du cercle de la vision, lorsque le micromètre, dans la mesure du pouvoir amplifiant du microscope, était au centre, alors, par suite de l'aberration de sphéricité, l'objet placé près des

bords du champ de la vision sera plus grossi ; et, en lui appliquant le pouvoir amplifiant du microscope donné par le micromètre, il aura alors des dimensions plus considérables que celles qu'il a réellement. Pour obvier à cet inconvénient, si grave touchant la mesure des diamètres de nos petits tubes, nous avons fait tracer, à l'aide d'un diamant, sur l'oculaire du microscope, quatre lignes perpendiculaires deux à deux (fig. 6), et alors c'est toujours dans la partie centrale ABCD, qu'avait occupée préalablement le micromètre, pour déterminer le pouvoir amplifiant du microscope, que se trouvent placés les objets qu'on veut mesurer : par là aucune erreur n'est à craindre. Cette disposition, qui est négligée par les micrographes, est, du reste, employée dans les télescopes, pour s'opposer à l'aberration de sphéricité.

CHAPITRE PREMIER.

INFLUENCE DE LA PRESSION SUR LA QUANTITÉ DE LIQUIDE QUI TRAVERSE LES TUBES DE TRÈS-PETITS DIAMÈTRES.

34. Lorsque nous avons commencé ce travail, nous n'avions en vue que l'influence de la pression dans des limites voisines de celle du sang dans nos vaisseaux; mais le manomètre à eau, que nous avions fait construire à cet effet, nous ayant donné, en variant les pressions, des résultats auxquels nous étions loin de nous attendre, nous avons voulu voir s'ils se maintiendraient pour des pressions plus élevées. Nous avons alors remplacé le manomètre à eau par un manomètre à mercure donnant une atmosphère de pression; enfin, M. Collardeau ayant bien voulu mettre à notre disposition son manomètre à air libre, qui va jusqu'à trente atmosphères, nous avons dû examiner si les résultats que nous avions obtenus précédemment, n'étaient pas modifiés pour des pressions s'élevant successivement jusqu'à huit atmosphères. Nous nous sommes arrêté à cette dernière pression; la rupture

d'un fuseau, qui fit explosion à dix atmosphères, nous empêcha de faire usage d'une pression plus considérable.

35. Des expériences que nous allons rapporter, les unes satisfont à une loi commune : elles font partie de la première série d'expériences ; les autres donnent lieu à des résultats différents : elles sont consignées dans une deuxième série, qui, comme la première, se compose de tableaux correspondants.

36. Le manomètre à haute pression ne nous ayant été confié que peu de temps, les trois derniers tableaux contiennent seuls les expériences faites à de hautes pressions.

37. Tout en faisant varier la pression, nous avons dû agir sur des tubes de même diamètre, mais de longueurs différentes. Ainsi, un tube ayant été monté comme il a été dit (8), après avoir fait avec ce tube un certain nombre d'expériences, à l'aide d'une lime, on enlève du tube, vers son extrémité libre, une certaine portion. Ramené à une longueur plus petite, on continue les expériences avec ce nouveau tube, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il n'ait plus que quelques millimètres de longueur. Tout tube étant légèrement conique, on a pris les diamètres à ses deux extrémités (30). Quant aux longueurs des tubes et à la capacité des ampoules relatées dans chaque tableau, leur détermination sera exposée dans les chapitres suivants. Outre l'indication du tube, de sa longueur, de ses diamètres et de la température 10° c. du récipient, chaque tableau est formé de trois colonnes : la première indique le numéro de l'expérience ; la seconde, la pression, ordinairement exprimée en mercure, à 10° c.[1] ; la troisième, le temps qu'a exigé l'écoulement du liquide de l'ampoule aux diverses pressions exprimées dans la colonne précédente.

[1] Toutes les fois que la pression a été moindre que 150 millimètres de mercure, on s'est servi du manomètre à eau : alors la colonne d'eau a été transformée en une colonne de mercure de même pression, et à la même température 10° c. dans le cas contraire, on a fait usage du manomètre à mercure.

1er TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE A.

Longueur du tube..... $l = 100^{mm},5$

Diamètres du tube..... Extrémité libre..... $d = 0,1395$; $D = 0,1415$

Extrémité opposée (voisine de l'ampoule)..... $d = 0,1405$; $D = 0,1430$

Température du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 13cc,34085 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$385^{mm},870$	$58' 25'' 45''' = 3505'',75$
2	739 ,114	$30\ 30\ 45 = 1830,75$
3	773 ,443	$29\ 10\ 0 = 1750,00$

38. L'examen des 1re et 3e expériences nous conduit à penser que les temps sont en raison inverse des pressions; et c'est en effet ce qui a lieu: ainsi, si nous calculons les temps des 2e et 3e expériences, en partant de la pression et du temps correspondants à la première, et supposant que les temps soient en raison inverse des pressions, nous avons pour le temps de la 2e expérience $1830'',25$, au lieu de $1830'',75$ donné expérimentalement, et pour celui de la troisième $1749'',01$, au lieu de $1750''$.

39. On enlève du tube précédent $24^{mm},7$; ainsi réduit à $75^{mm},8$ de longueur, on fait avec ce tube, que nous appelons A', les expériences qui donnent le tableau suivant.

2e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE A'.

Longueur du tube..... $l = 75^{mm},8$

Diamètres du tube..... Extrémité libre..... $d = 0,1400$; $D = 0,1420$

Extrémité opposée (voisine de l'ampoule)..... $d = 0,1405$; $D = 0,1430$

Température du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT. de 13cc,34085 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1 [1]	51mm,068	5h 34′ 45″ 00‴ = 20085″,0
2	97 ,764	2 52 41 00 = 10361 ,0
3	147 ,832	1 54 11 00 = 6851 ,0
4	193 ,632	1 27 13 00 = 5233 ,0
5	387 ,675	0 43 32 30 = 2612 ,5
6	738 ,715	0 22 52 30 = 1372 ,5
7	774 ,676	0 21 48 00 = 1308 ,0

Si, en nous appuyant sur les données de la deuxième expérience, nous calculons les temps des expériences suivantes d'après leurs pressions respectives, en supposant les pressions en raison inverse des temps, on a :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
6851″,91	6851″,0
5231 ,22	5233 ,0
2612 ,84	2612 ,5
1371 ,20	1372 ,5
1307 ,55	1308 ,0
19835 ,00	20085 ,0

[1] Pour cette expérience, la température du récipient, au lieu d'être 10° c. a été de 9°,67 : ainsi l'écoulement s'est fait à une température plus faible que dans les suivantes.

Le temps calculé de la 1re expérience diffère de celui obtenu expérimentalement de 250″ : mais cette expérience a été faite à 9°,67, au lieu de 10° c. et bientôt nous verrons que cette plus longue durée de 250″ tient à l'abaissement de la température, qui retarde considérablement l'écoulement dans ces tubes de très-petits diamètres.

40. On enlève du tube précédent une nouvelle portion, il est réduit à $51^{mm},1$: c'est le tube A″.

3e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE A″.

Longueur du tube..... $l = 51^{mm},1$

Diamètres du tube..... Extrémité libre..... $d = 0,1405$; $D = 0,1425$

Extrémité opposée..... $d = 0,1405$; $D = 0,1430$

Température du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 13cc,34085 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$98^{mm},404$	$1^h\,55'\,21'' = 6921''$
2	148 ,320	1 16 34 = 4594
3	193 ,421	0 58 35 = 3515
4	387 ,445	0 29 17 = 1757
5	774 ,810	0 14 38 = 878

Si, comme précédemment (39), nous partons des données de la première expérience pour déterminer les temps des suivantes, d'après leurs pressions respectives, nous avons :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
4591″,78	4594″
3521 ,00	3515
1757 ,80	1757
878 ,99	878

Les différences de quelques secondes, tantôt en plus, tantôt en moins, entre les temps calculés et ceux obtenus par l'expérience, sur des nombres aussi considérables, ne nous empêchent pas de regarder les pressions en raison inverse des temps, pour ce tube, dont la longueur est de $51^{mm},1$.

41. Nous attribuons ces petites différences, que, du reste, nous retrouverons souvent, aux petites variations de température (0,05 de degré environ) qu'offre l'eau du récipient; variations dont il est presque impossible de s'affranchir, lorsque l'expérience exige une assez longue durée, quelque soin qu'on prenne pour maintenir l'eau du récipient constamment à 10° (17), lors même que la température ambiante n'en diffère que de quelques degrés.

42. Le tube étant ramené aux longueurs $25^{mm},55$ et $15^{mm},75$, la relation précédente, entre les pressions et les temps, n'a plus lieu : aussi les expériences relatives à ces tubes font partie de la seconde série (35).

1er TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE A''' [1].

Longueur du tube..... $l = 25^{mm},55$

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $d = 0,1405$; $D = 0,1430$

Température du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $13^{cc},34085$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$387^{mm},520$	$14' 40'' = 880''$
2	774 ,895	$7\ 28 = 448$

[1] Le tube ayant été cassé par accident, il a été impossible d'obtenir les temps correspondants à des pressions inférieures à celles indiquées dans ce tableau : on a fait souder au tube supplémentaire de l'ampoule le bout qui restait; il n'avait plus que $15^{mm},75$; c'est A''''.

2e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE A'''.

Longueur du tube..... $l = 15^{mm},75$

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $d = 0,1405$; $D = 0,1430$

Température du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 13cc,34085 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$24^{mm},661$	$2^h\,24'\,6''\,00''' = 8646''$
2	49 ,591	1 12 35 00 = 4355
3	98 ,233	0 36 34 45 = 2194
4	148 ,233	0 24 15 30 = 1455
5	194 ,257	0 18 36 00 = 1116
6	388 ,000	0 9 31 00 = 571
7	775 ,160	0 4 58 00 = 298

En partant des données de la première expérience, et supposant les temps en raison inverse des pressions, on obtient :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
4299''	4355''
2170	2194
1438	1455
1097	1116
549	571
275	298

On voit que les temps donnés par l'expérience, pour des pressions plus grandes, sont tous supérieurs à ceux donnés par le calcul; il en serait de même si, au lieu de partir de la première expérience, l'on en avait considéré toute autre, et qu'on eût cher-

ché le temps correspondant à une pression plus considérable. Cette remarque s'applique aussi aux deux expériences faites avec le tube A‴.

43. Ce que nous venons de dire pour le tube réduit à $25^{mm},55$ et $15^{mm},75$, se présente aussi pour des longueurs de plus en plus petites, ainsi qu'on peut s'en convaincre en examinant les trois tableaux suivants.

3e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE A⁷.

Longueur du tube ..... $l = 9^{mm},55$

Diamètres du tube à ses deux extrémités ..... $d = 0,1405$; $D = 0,1430$

Température du récipient ..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $13^{cc},34085$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$23^{mm},638$	$1^h\,32'\,50''\,00''' = 5570''0$
2	49 ,185	0 44 59 00 = 2699,0
3	99 ,221	0 22 40 00 = 1360,0
4	148 ,623	0 15 18 30 = 918,5
5	193 ,315	0 11 58 00 = 718,0
6	387 ,737	0 6 21 00 = 381,0
7	774 ,620	0 3 27 00 = 207,0

4e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE A^{VI}.

Longueur du tube..... $l = 6^{mm},775$

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $d = 0\ ,1405$; $D = 0\ ,1430$

Température du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 13cc,34085 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	24mm,753	1h 3′ 48″ 45‴ = 3828,75
2	50 ,001	0 32 3 45 = 1923,75
3	99 ,343	0 16 34 00 = 994,00
4	148 ,618	0 11 22 00 = 682,00
5	193 ,010	0 8 57 45 = 537,75
6	387 ,887	0 4 51 30 = 291,50
7	773 ,790	0 2 45 45 = 165,75

5e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE A^{VII}.

Longueur du tube..... $l = 1^{mm}$?

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $d = 0\ ,1405$; $D = 0\ ,1430$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 13cc,34085 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	4mm,783	1h 5′ 26″ 45‴ = 3926″,75
2	6 ,204	0 51 12 00 = 3072,00
3	12 ,129	0 28 5 30 = 1685,50
4	24 ,003	0 16 14 15 = 974,25
5	49 ,040	0 9 31 45 = 571,75
6	98 ,832	0 5 48 45 = 348,75
7	148 ,475	0 4 27 00 = 267,00
8	193 ,501	0 3 44 00 = 224,00
9	387 ,972	0 2 24 45 = 144,00
10	773 ,717	0 1 35 00 = 95,00

44. Le mouvement des molécules fluides, dans les expériences faites avec le tube A^{VII}, d'une aussi petite étendue, 1 millimètre, est-il linéaire? Nous ne le pensons pas, surtout à cause du renflement G (fig. 3) qui précède le tube. Ainsi, nous avons examiné le cours du sang dans une branche de l'artère mésentérique d'une grenouille vivante. Cette petite artère naissait latéralement d'un tronc considérable, et offrait environ $0^{mm},15$ de diamètre. Tant que l'artère eut une longueur supérieure à 2 millimètres environ, le mouvement des globules du sang fut linéaire dans toute l'étendue du vaisseau, mais il cessa de l'être quand l'artériole n'eut plus qu'un millimètre de longueur.

45. Passons maintenant à un tube de plus petit diamètre que le tube précédent, c'est le tube B.

4e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE B.

Longueur du tube..... $l = 100^{mm},05$

Diamètres du tube..... Extrémité libre..... $d = 0,1117$; $D = 0,1135$

Extrémité opposée..... $d = 0,1125$; $D = 0,1145$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $6^{cc},4482$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$388^{mm},256$	$1^h\ 8'\ 23''\ 30''' = 4103'',5$
2	739 ,333	$0\ 35\ 56\ 00 = 2156,0$
3	773 ,863	$0\ 34\ 20\ 00 = 2060,0$

En s'appuyant sur les données de la première expérience, on a :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
2154″,92	2156″
2058 ,87	2060

Les pressions sont donc en raison inverse des temps.

46. On agit, à l'égard de ce tube, comme on vient de le voir pour le tube A; il offre alors successivement les longueurs $75^{mm},05$; $49^{mm},375$; $23^{mm},575$, qui donnent lieu aux tableaux suivants.

5e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE B'.

Longueur du tube..... $l = 75^{mm},05$

Diamètres du tube..... Extrémité libre..... $d = 0,1120$; $D = 0,1140$

Extrémité opposée..... $d = 0,1125$; $D = 0,1145$

Température du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 6cc,4482 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	55mm,286	5h 57′ 10″ 00‴ = 21430″,0
2	97 ,922	3 21 19 00 = 12079 ,0
3	148 ,275	2 13 1 30 = 7981 ,5
4	193 ,947	1 41 40 00 = 6100 ,0
5	387 ,695	0 50 52 00 = 3052 ,0
6	739 ,467	0 26 40 00 = 1600 ,0
7	774 ,891	0 25 26 30 = 1526 ,5

D'après les données de la quatrième expérience, par exemple, il vient :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
21399″,21	21430″,0
12081 ,82	12079 ,0
7978 ,93	7981 ,5
3051 ,56	3052 ,0
1599 ,90	1600 ,0
1526 ,76	1526 ,5

6e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE B″.

Longueur du tube ..... $l = 49^{mm},375$

Diamètres du tube ..... Extrémité libre ..... $d = 0,1122$; $D = 0,1142$

Extrémité opposée ..... $d = 0,1125$; $D = 0,1145$

Température du récipient ..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $6^{cc},4482$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$99^{mm},163$	$2^h\,10'\,4'' = 7804''$
2	149 ,679	$1\,26\,5 = 5165$
3	193 ,441	$1\,6\,37 = 3997$
4	387 ,130	$0\,33\,15 = 1995$
5	774 ,796	$0\,16\,39 = 999$

47. En se servant des données de la troisième expérience, on a :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
7797″,10	7804″
5165 ,61	5165
1997 ,21	1995
997 ,91	999

7e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE B‴.

Longueur du tube ..... $l = 23^{mm},575$

Diamètres du tube ..... Extrémité libre : $d = 0,1123$; $D = 0,1143$ — Extrémité opposée : $d = 0,1125$; $D = 0,1145$

Température du récipient ..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 6cc,4482 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$49^{mm},091$	$2^h\ 4'\ 31'' = 7471''$
2	98 ,315	1 2 9 = 3729
3	148 ,571	0 41 13 = 2473
4	193 ,877	0 31 32 = 1892
5	388 ,190	0 15 46 = 946
6	774 ,880	0 7 53 = 473

48. D'après la quatrième expérience, par exemple, il vient :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
$7472^{mm},14$	7471
3731 ,02	3729
2468 ,95	2473
944 ,93	946
473 ,38	473

Ce tube, de $23^{mm},575$ offre donc, ainsi que les tubes précédents B, B′, B″, les temps en raison inverse des pressions.

49. *Remarque.* Les tubes A, de $100^{mm},5$; $75^{mm},8$; $51^{mm},1$ de longueur, satisfont à cette loi (38, 39 et 40); mais il en est autrement pour les longueurs $25^{mm},55$; $15^{mm},75$; etc. (42, 43, etc.) Quant

au tube B, de plus petit diamètre que A, la loi se maintient encore pour la longueur de $23^{mm},575$; elle cesse d'exister pour 9 millimètres; $3^{mm},9$. On obtient, pour ces dernières longueurs, des résultats tout à fait analogues à ceux que nous a donnés le tube A, pour les longueurs $25^{mm},55$; $15^{mm},75$; etc. comme on peut s'en assurer en jetant un coup d'œil sur les deux tableaux suivants, qui font partie de la seconde série d'expériences.

6e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE B'''.

Longueur du tube ..... $l = 9^{mm},000$

Diamètres du tube ..... Extrémité libre. . $d = 0,1124$; $D = 0,1144$ — Extrémité opposée $d = 0,1125$; $D = 0,1145$

Température de l'eau du récipient ..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $6^{cc},4482$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$24^{mm},756$	$1^h\,32'\,23'' = 5543''$
2	49 ,857	$0\,46\,2 = 2762$
3	99 ,214	$0\,23\,20 = 1400$
4	149 ,082	$0\,15\,35 = 935$
5	193 ,194	$0\,12\,8 = 728$
6	387 ,024	$0\,6\,15 = 375$
7	774 ,540	$0\,3\,19 = 199$

7e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE Br.

Longueur du tube..... $l = 3^{mm},9$

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $d = 0\ ,1125$; $D = 0\ ,1145$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $6^{cc},4482$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$24^{mm},290$	$39' 46'' = 2386''$
2	49 ,578	$19\ 53 = 1193$
3	99 ,139	$10\ 21 = 621$
4	149 ,098	$7\ 8 = 428$
5	193 ,130	$5\ 40 = 340$
6	387 ,024	$3\ 9 = 189$
7	773 ,282	$1\ 50 = 110$

5o. Le tube C, qui va nous occuper, est d'un calibre plus petit que celui des tubes précédents. Procédant sur C, comme on l'a fait sur A et B, il donne lieu aux six tableaux qui suivent.

8e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE C.

Longueur du tube..... $l = 100^{mm},325$

Diamètres du tube..... Extrémité libre circulaire. $D = 0\ ,0845$; Extrémité opposée..... $d = 0\ ,0850$; $D = 0\ ,0860$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $2^{cc},1057$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$385^{mm},158$	$1^h\ 10'\ 10''\ 00''' = 4210'',0$
2	738 ,969	$0\ 36\ 32\ 00 = 2192,0$
3	774 ,030	$0\ 34\ 53\ 30 = 2093,5$

En partant des données de la première expérience, on a :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
2194″,29	2192″,0
2094 ,89	2093 ,5

9ᵉ TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE C′.

Longueur du tube..... $l = 74^{mm},95$

Diamètres du tube..... Extrémité libre.... $d = 0,0845$; $D = 0,0850$

Extrémité opposée.. $d = 0,0850$; $D = 0,0860$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 2ᶜᶜ,1057 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	52mm,257	6h 25′ 25″ 00‴ = 23125″,0
2	98 ,411	3 24 40 00 = 12280 ,0
3	149 ,241	2 14 58 00 = 8098 ,0
4	193 ,314	1 44 10 00 = 6250 ,0
5	387 ,562	0 51 58 00 = 3118 ,0
6	738 ,767	0 27 16 00 = 1636 ,0
7	774 ,757	0 26 0 30 = 1560 ,5

51. D'après les données de la quatrième expérience, par exemple, il vient :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
23120″,58	23125″
12277 ,20	12280
8095 ,71	8098
3117 ,46	3118
1635 ,44	1636
1559 ,47	1560

10e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE C''.

Longueur du tube..... $l = 49^{mm},7$

Diamètres du tube..... Extrémité libre... $d = 0,084$; $D = 0,085$ — Extrémité opposée. $d = 0,085$; $D = 0,086$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $2^{cc},1057$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$99^{mm},868$	$2^h\,13'\,17''\,00''' = 7997''$
2	149 ,034	$1\,29\,22\,00 = 5362$
3	193 ,867	$1\,8\,37\,00 = 4117$
4	386 ,915	$0\,34\,25\,00 = 2065$
5	774 ,563	$0\,17\,9\,00 = 1029$

52. En se servant de la troisième expérience, par exemple, on a :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
7992'',05	7997''
5355 ,49	5362
2062 ,85	2065
1030 ,43	1029

11e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE C'''.

Longueur du tube..... $l = 24^{mm},4$

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $d = 0,085$; $D = 0,086$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $2^{cc},1057$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$49^{mm},702$	$2^h\,9'\,25''\,00''' = 7765'',0$
2	98 ,921	$1\,4\,59\,00 = 3899,0$
3	148 ,303	$0\,43\,18\,30 = 2598,5$
4	193 ,544	$0\,33\,14\,00 = 1994,0$
5	387 ,157	$0\,16\,35\,00 = 995,0$
6	774 ,677	$0\,8\,18\,00 = 498,0$

53. En s'appuyant sur les données de la première expérience, il vient :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
3901″,44	3899″,0
2602 ,34	2598 ,5
1994 ,04	1994 ,0
996 ,84	995 ,0
498 ,18	498 ,0

12[e] TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE C[IV].

Longueur du tube. ..... $l = 10^{mm},15$

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $d = 0,085$; $D = 0,086$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 2[cc],1057 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	24[mm],791	1[h] 43′ 6″ 45‴ = 6186″,75
2	49 ,931	0 51 13 00 = 3073 ,00
3	98 ,322	0 25 59 45 = 1559 ,75
4	148 ,795	0 17 9 30 = 1029 ,50
5	194 ,102	0 13 8 00 = 788 ,00
6	387 ,191	0 6 39 00 = 399 ,00
7	774 ,607	0 3 23 00 = 203 ,00

54. On part de la deuxième expérience, et on a :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
6189″,26	6186″,75
1560 ,56	1559 ,75
1031 ,20	1029 ,50
790 ,50	788 ,00
396 ,28	399 ,00
198 ,80	203 ,00

55. Des cinq tableaux précédents, il résulte toujours que les pressions sont en raison inverse des temps. On remarque que, pour la longueur $10^{mm},15$ de C^{IV}, la loi existe encore, lorsqu'elle a cessé d'avoir lieu pour les tubes A et B, de plus grands diamètres (42, 43 et 49), réduits à cette longueur.

56. Le tube C^{IV}, ramené à $6^{mm},025$, ne donne plus la loi, mais des résultats analogues à ceux fournis par les tubes A''', A^{IV}, etc. B^{IV}, B^{V}; les expériences qui s'y rapportent font donc partie de la deuxième série.

8e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE C^{V}.

Longueur du tube..... $l = 6^{mm},025$

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $d = 0,085$; $D = 0,086$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $2^{cc},1057$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$24^{mm},192$	$59' 47'' 00''' = 3587'',0$
2	50 ,506	29 28 00 = 1768 ,0
3	99 ,102	15 4 00 = 904 ,0
4	149 ,119	10 6 30 = 606 ,5
5	194 ,217	7 50 00 = 470 ,0
6	387 ,237	4 5 00 = 245 ,0
7	773 ,327	2 11 30 = 131 ,5

57. Le tube D, qui suit, a environ un diamètre moitié de celui du tube précédent C.

13e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE D.

Longueur du tube..... $l = 100^{mm},30$

Diamètres du tube..... Extrémité libre.. $d = 0,04466$; $D = 0,04600$

Extrémité opposée $d = 0,04250$; $D = 0,04450$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $0^{cc},3629$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$386^{mm},247$	$2^h\,41'\,48'' = 9708''$
2	738 ,137	1 24 40 = 5080
3	773 ,970	1 20 46 = 4846

Des données de la deuxième expérience, il résulte :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
$9708'',12$	$9708''$
4844 ,80	4846

14e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE D'.

Longueur du tube..... $l = 50^{mm},225$

Diamètres du tube..... Extrémité libre.. $d = 0,0138$; $D = 0,0454$

Extrémité opposée $d = 0,0425$; $D = 0,0445$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $0^{cc},3629$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$54^{mm},785$	$9^h\,51'\,0'' = 35460''$
2	55 ,796	9 39 58 = 34798
3	99 ,508	5 25 17 = 19517
4	149 ,219	3 37 1 = 13021
5	192 ,907	2 47 51 = 10071
6	386 ,555	1 23 45 = 5025
7	774 ,617	0 41 46 = 2506

58. En partant de la première expérience, on a :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
34817″,47	34798″
19522 ,81	19517
13018 ,96	13021
10070 ,53	10071
5025 ,61	5025
2507 ,91	2506

15e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE D′.

Longueur du tube..... $l = 25^{mm},175$

Diamètres du tube..... Extrémité libre.. $d = 0,0430$, $D = 0,0450$; Extrémité opposée $d = 0,0425$, $D = 0,0445$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 0cc,3629 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$98^{mm},917$	$2^h 49' 9'' 00''' = 10149'',0$
2	147 ,857	1 53 9 00 = 6789 ,0
3	193 ,485	1 26 18 00 = 5178 ,0
4	386 ,847	0 43 9 30 = 2589 ,5
5	773 ,985	0 21 33 00 = 1293 ,0

59. On se sert de la troisième expérience, et il vient :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
10128″,34	10149″,0
6775 ,90	6789 ,0
2589 ,82	2589 ,5
1294 ,42	1293 ,0

16e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE D‴.

Longueur du tube..... $l = 9^{mm},95$

Diamètres du tube..... Extrémité libre.. $d = 0,04266$; $D = 0,04466$

Extrémité opposée $d = 0,04250$; $D = 0,04450$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $0^{cc},3629$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$50^{mm},374$	$2^h 12' 58'' 00''' = 7978'',00$
2	97 ,214	1 8 56 00 = 4136 ,00
3	148 ,248	0 45 6 00 = 2706 ,00
4	192 ,707	0 34 44 45 = 2084 ,75
5	387 ,419	0 17 18 00 = 1038 ,00
6	775 ,866	0 8 39 00 = 519 ,00

60. D'après les données de la première expérience, on a :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
4134″,01	4136″,00
2710 ,88	2706 ,00
2085 ,46	2084 ,75
1037 ,33	1038 ,00
517 ,98	519 ,00

61. Les expériences rapportées dans ce tableau, ainsi que celles des trois tableaux qui le précèdent, légitiment la relation des pressions et des temps que nous ont donnée les tubes A, B, C, de plus grands diamètres; mais, le tube D‴ étant réduit à $3^{mm},35$

de longueur, la loi n'a plus sensiblement lieu, comme on peut s'en assurer par le tableau ci-joint, qui est le neuvième de la seconde série d'expériences. Les résultats qu'il présente coïncident d'ailleurs avec ceux des tubes A, B, C, considérés dans leurs moindres longueurs (42, 43, 49, 56).

9e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE D^{IV}.

Longueur du tube..... $l = 3^{mm},35$

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $d = 0\ ,0425$; $D = 0\ ,0445$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $0^{cc},3629$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$23^{mm},884$	$1^h 32' 19'' 00''' = 5479'',00$
2	50 ,276	0 43 31 45 = 2611 ,75
3	97 ,449	0 22 53 00 = 1373 ,00
4	147 ,889	0 14 57 30 = 897 ,50
5	193 ,459	0 11 37 00 = 697 ,00
6	387 ,062	0 5 49 00 = 349 ,00
7	772 ,117	0 2 56 00 = 176 ,00

62. Le nouveau tube E est d'un diamètre seulement trois fois plus grand que celui des vaisseaux capillaires (à globules) des mammifères.

17ᶜ TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE E [1].

Longueur du tube..... $l = 23^{mm},1$

Diamètres du tube..... Extrémité libre.. $d = 0,0286$; $D = 0,0296$ — Extrémité opposée $d = 0,02933$; $D = 0,03000$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 0ᶜᶜ,125 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$58^{mm},211$	$7^h\,23'\,45'' = 26625''$
2	386 ,218	1 7 0 = 4020
3	737 ,829	0 35 3 = 2103
4	774 ,017	0 33 26 = 2006

On se sert des données de la troisième expérience, il vient :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
26655″,00	26625″
4017 ,56	4020
2004 ,67	2006

18ᶜ TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE E'.

Longueur du tube..... $l = 8^{mm},5$

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $d = 0,02933$; $D = 0,03000$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 0ᶜᶜ,125 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$96^{mm},693$	$1^h\,38'\,23''\,30''' = 5903'',50$
2	147 ,588	1 4 28 00 = 3868 ,00
3	193 ,100	0 49 15 00 = 2955 ,00
4	386 ,787	0 24 29 00 = 1469 ,00
5	773 ,880	0 12 16 45 = 736 ,75

[1] Ce tube avait plus de 100 millimètres de longueur; mais ayant été cassé, il a été impossible d'agir sur une longueur plus grande que $23^{mm},1$.

63. On part des données de la 2e expérience, et on a :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
5903″,94	5903″,50
2956 ,34	2955 ,00
1475 ,92	1469 ,00
737 ,67	736 ,75

19e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE E″.

Longueur du tube..... $l = 2^{mm},10$

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $\begin{cases} d = 0\ ,02933 \\ D = 0\ ,03000 \end{cases}$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en mercure à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 0cc,125 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	24mm,301	1h 34′ 11″ = 5651″
2	49 ,994	0 45 51 = 2751
3	96 ,123	0 23 46 = 1426
4	148 ,307	0 15 25 = 925
5	193 ,357	0 11 47 = 707
6	386 ,852	0 5 54 = 354
7	773 ,223	0 2 58 = 178

64. D'après les données de la 2e expérience, il vient :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
5645″,31	5651″
1427 ,20	1426
925 ,01	925
709 ,50	707
354 ,62	354
177 ,42	178

Les 17e et 18e tableaux offrent toujours les temps en raison inverse des pressions; il en est de même des expériences du 19e tableau, dans lesquelles le tube n'a plus que $2^{mm},10$ de lon-

gueur, et on a vu que le tube D^{IV}, de diamètre plus grand, ne donnait plus lieu à la loi, pour la longueur de $3^{mm},35$ (61).

65. Nous avons voulu nous assurer si la relation entre les pressions et les temps, dont il est ici question, existerait encore dans le cas de tubes de diamètres beaucoup plus considérables. Les tubes qui vont nous occuper ont, en effet, un diamètre vingt-cinq fois plus grand que celui du tube que nous quittons. Les pressions sont indiquées en millimètres d'eau distillée à 10°. Les expériences où la pression a été supérieure à 2000 millimètres d'eau ont été faites avec le manomètre à mercure; on a alors traduit en eau distillée les pressions données par ce manomètre.

20e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE F^1.

Longueur du tube ..... $l = 383^{mm},825$

Diamètres du tube ..... à ses deux extrémités ..... $d = 0,6160$, $D = 0,6932$

Diamètres du tube ..... à sa partie moyenne ..... $d = 0,6140$, $D = 0,6900$

Température de l'eau du récipient ..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en eau distillée à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de $17^{cc},566$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$126^{mm},92$	27′ 3″ = 1623″,00
2	303 ,08	11 18 = 678 ,00
3	667 ,42	5 6 = 306 ,00
4	1352 ,10	2 30 = 150 ,00
5	1981 ,50	1 44 = 104 ,00
6	2620 ,34	1 18 = 78 ,00
7	5198 ,60	40 ,25
8	10462 ,08	20 ,00

[1] Pour ce tube d'un aussi grand diamètre, dès qu'il est chargé, il faut s'empresser de le

66. On part des données de la 1re expérience, et on a :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
679″,65	678″,00
308 ,63	306 ,00
152 ,34	150 ,00
103 ,95	104 ,00
78 ,61	78 ,00
39 ,62	40 ,25
19 ,69	20 ,00

67. On enlève de ce tube une portion de 183mm,825, on a le tube F′; mais ce tube et ceux qui le suivent F″, F‴, FIV, FV ne se prêtent plus à la loi comme le tube F : ils offrent alors des résultats analogues à ceux des tubes A‴, AIV, etc., BIV, BV; CV et DIV, de longueurs moindres et de diamètres beaucoup plus petits.

10e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE F′.

Longueur du tube..... $l = 200^{mm},00$

Diamètres du tube..... Extrémité libre.. $d = 0,6140$; $D = 0,6900$

Extrémité opposée $d = 0,6160$; $D = 0,6932$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en eau distillée à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 17cc,566 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	83mm36	1295″,00
2	127 ,60	838 ,00
3	163 ,71	657 ,00
4	328 ,82	326 ,00
5	661 ,29	162 ,00
6	1321 ,87	81 ,50
7	1981 ,76	56 ,00
8	2626 ,58	42 ,00
9	5210 ,27	22 ,50
10	10459 ,10	12 ,50

plonger dans l'eau du récipient : sans cela l'ampoule se viderait en partie, et l'expérience ne pourrait être faite. Cet inconvénient n'a lieu pour aucun des tubes précédents.

11e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE F″.

Longueur du tube..... $l = 99^{mm},725$

Diamètres du tube..... Extrémité libre.. $d = 0,6140$; $D = 0,6900$

Extrémité opposée $d = 0,6160$; $D = 0,6932$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en eau distillée à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 17cc,566 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	81mm,83	666″,00
2	163 ,97	328 ,00
3	331 ,51	165 ,00
4	664 ,36	84 ,50
5	1323 ,58	45 ,00
6	1984 ,95	31 ,00
7	2585 ,33	25 ,00
8	5207 ,73	15 ,00
9	10454 ,54	9 ,00

12e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE F‴.

Longueur du tube..... $l = 50^{mm},45$

Diamètres du tube..... Extrémité libre.. $d = 0,6150$; $D = 0,6910$

Extrémité opposée $d = 0,6160$; $D = 0,6932$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en eau distillée à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 17cc,566 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	82mm,08	345″,00
2	163 ,78	175 ,00
3	329 ,77	91 ,00
4	660 ,97	50 ,00
5	1323 ,56	28 ,00
6	1983 ,20	21 ,75
7	2590 ,76	17 ,50
8	5160 ,07	11 ,00
9	10456 ,45	7 ,00

13e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE F'''.

Longueur du tube..... $l = 26^{mm},00$

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $d = 0\ ,6160$; $D = 0\ ,6932$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en eau distillée à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 17cc,566 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$82^{mm},36$	191″00
2	163 ,39	104 ,00
3	328 ,94	59 ,75
4	661 ,59	35 ,00
5	1321 ,19	21 ,75
6	1985 ,90	16 ,75
7	2614 ,60	13 ,50
8	5205 ,08	9 ,00
9	10458 ,02	6 ,00

14e TABLEAU DE LA SECONDE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE F'' [1].

Longueur du tube..... $l = 10^{mm},75$

Diamètres du tube à ses deux extrémités..... $d = 0\ ,6160$; $D = 0\ ,6932$

Température de l'eau du récipient..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	PRESSIONS exprimées en eau distillée à 10° c.	TEMPS EMPLOYÉ À L'ÉCOULEMENT de 17cc,566 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	$74^{mm},29$	114″,00
2	83 ,89	103 ,00
3	162 ,89	63 ,00
4	329 ,39	39 ,00
5	653 ,49	25 ,00
6	1306 ,69	16 ,00
7	1985 ,29	13 ,00
8	2606 ,37	10 ,75
9	5146 ,62	7 ,50
10	10456 ,65	5 ,00

[1] Il est très-douteux que le mouvement des molécules fluides, dans ce tube si court, eu égard à la grandeur de son diamètre, soit linéaire (44).

68. Il s'agit toujours, dans les trois tableaux suivants, de tubes de grands diamètres, mais leurs longueurs sont beaucoup plus considérables. Par suite de cette disposition, on n'a pu les plonger dans un milieu d'eau à une température constante et déterminée *a priori*, ainsi que nous l'avons fait jusqu'à présent. Les tubes étant au sein de l'atmosphère, l'écoulement s'est donc fait à la température ambiante, variable, comme on sait, d'un jour à l'autre et aux diverses époques de la journée. Nous remarquerons, en outre, que, par suite de la différence dans les pressions, il n'y a aucune similitude à établir dans la *sortie* du liquide; ainsi, pour les pressions supérieures, le liquide sort du tube sous forme de jet, et goutte à goutte pour les pressions inférieures. D'après ce que nous avons vu précédemment (10), ces circonstances diverses doivent introduire quelques petites différences dans les temps de l'écoulement, toutes choses égales d'ailleurs.

21^e^ TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE G.

Longueur du tube..... $l = 962^{mm},00$

Diamètres du tube..... Extrémité libre.... $d = 0,6000$; $D = 0,6660$

Extrémité opposée. $d = 0,6160$; $D = 0,6932$

NUMÉROS des expériences.	TEMPÉRATURE ambiante.	PRESSIONS exprimées en eau distillée à la température ambiante.	TEMPS de l'écoulement de $17^{cc},566$ (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	8°,6	$1087^{mm},20$	$6' 47'' = 407''$
2	8,5	1586 ,34	$4\ 41 = 281$
3	8,7	2084 ,06	$3\ 33 = 213$
4	8,8	2602 ,30	$2\ 50 = 170$

69. En partant des données de la 2e expérience, il vient :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
410″,00	407″
213 ,88	213
171 ,29	170

On sépare du tube G une portion de 162 millimètres environ, on a le tube G′.

22e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE G′.

Longueur du tube..... $l = 800^{mm},00$?

Diamètres du tube..... extrémité libre.... $d = 0,6000$; $D = 0,6660$ — extrémité opposée. $d = 0,6160$; $D = 0,6932$

NUMÉROS des expériences.	TEMPÉRATURE ambiante.	PRESSIONS exprimées en eau distillée à la température ambiante.	TEMPS de l'écoulement de 17cc,566 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	18°,7	145mm,30	38′ 10″ = 2290″,00
2	18 ,9	269 ,22	20 32 = 1232 ,00
3	18 ,9	520 ,24	10 34 = 634 ,00
4	18 ,9	1019 ,87	5 23 = 323 ,00
5	18 ,8	2014 ,16	2 42 = 162 ,00
6	18 ,7	3437 ,36	1 37 = 97 ,00
7	18 ,8	6841 ,37	48 ,75
8	18 ,8	10191 ,54	33 ,00

70. En se servant des données de la 2e expérience, on a :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
2282″,0	2290″,00
637 ,4	634 ,00
325 ,2	323 ,00
164 ,6	162 ,00
96 ,5	97 ,00
48 ,4	48 ,75
32 ,5	33 ,00

23e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE G″.

Longueur du tube..... $l = 400^{mm},00$

Diamètres du tube..... à ses deux extrémités. $d = 0,6160$; $D = 0,6932$ — à sa partie moyenne. $d = 0,6140$; $D = 0,6900$

NUMÉROS des expériences.	TEMPÉRATURE ambiante.	PRESSIONS exprimées en eau distillée à la température ambiante.	TEMPS de l'écoulement de 17cc,566 (capacité de l'ampoule à 10° c.).
1	18°,95	145mm,30	18′ 35″ 00‴ = 1115″,00
2	19 ,25	269 ,22	9 57 00 = 597 ,00
3	19 ,30	518 ,94	5 5 30 = 305 ,50
4	19 ,50	1019 ,67	2 35 00 = 155 ,00
5	19 ,50	2014 ,36	1 19 45 = 79 ,75

71. Des données de la 2e expérience, il résulte :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
1106″,1	1115″,00
309 ,7	305 ,50
157 ,6	155 ,00
79 ,7	79 ,75

72. Ainsi, pour ces trois tubes de longueurs considérables, les temps sont aussi en raison inverse des pressions[1].

73. Les expériences dans lesquelles la pression est supérieure

[1] Les tubes G, G′, G″ devant être placés horizontalement, comme leur grandeur ne permet pas de faire tourner le fuseau sur son axe pour le fixer à la vis *a* (fig. 1), par suite de la présence des montants *rs* et *tv*, on a fait alors usage d'un *raccord* (fig. 7) qui lie le fuseau à la vis *a;* mais, dans cette position, le poids du tube tend à abaisser son extrémité libre, on a maintenu le tube horizontalement à l'aide d'un support, en se servant d'un niveau d'eau.

à une atmosphère, et qui vont nous occuper, datent de 1837 et 1838. On n'a pas fait usage de l'ampoule, ni par conséquent du récipient d'eau distillée, qui donne à l'écoulement une température constante. Les tubes se trouvent au sein de l'atmosphère (fig. 8), et le liquide, au fur et à mesure qu'il s'écoule, est reçu dans une éprouvette graduée en $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{20}$ de centimètre cube. Par les raisons émises précédemment (6 et 7), on ne doit pas s'attendre à une exactitude aussi grande que dans le cas où l'on se sert de l'ampoule; cependant, nous n'avons pas voulu bannir ces expériences de notre travail, attendu qu'il s'agit de pressions qui atteignent jusqu'à huit atmosphères, et on va voir que la loi que nous avons établie précédemment existe encore pour ces hautes pressions.

24e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE II.

Longueur du tube (ce tube est circulaire et conique)..... $l = 66^{mm},00$

Diamètre de l'extrémité libre..... $D = 0,0133$

NUMÉROS des expériences.	TEMPÉRATURE ambiante.	PRESSIONS exprimées en mercure à la température ambiante.	TEMPS de l'écoulement de 0,5 centimètre cube.
1	11°,0	$2316^{mm},87$	$2^h\,30'\,48'' = 9048''$
2	11,0	3837 ,00	$1\ 30\ 38 = 5438$
3	11,1	6117 ,60	$0\ 57\ 40 = 3460$

74. D'après les données de la 1re expérience, il vient:

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
5463″,3	5438″
3426 ,6	3460

75. Tous les tubes précédents sont presque circulaires, le tube I est, au contraire, ovalaire.

25e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE I.

Longueur du tube..... $l = 258^{mm},00$

Diamètres du tube à l'une des extrémités..... $d = 0,08$; $D = 0,10$

NUMÉROS des expériences.	TEMPÉRATURE ambiante.	PRESSIONS exprimées en mercure à la température ambiante.	TEMPS de l'écoulement de 1 centimètre cube [1].
1	10°,8	$3850^{mm},16$	$6' 28'' = 388''$
2	10,9	4610 ,23	$5\ 19 = 319$
3	11,0	5370 ,23	$4\ 27 = 267$
4	11,0	6127 ,36	$3\ 55 = 235$
5	7,5	6130 ,08	$4\ 21 = 261$

En partant des données de la 3e expérience, on a ;

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
372″,4	388″
311,0	319
234,0	235

On n'a pas calculé le temps de la 5e expérience, parce que la température est très-différente de celle de la 3e.

76. Le tube K, qui est presque circulaire, a un calibre peu différent de celui du tube A (38).

[1] Ces temps ont été obtenus, pour plus d'exactitude, d'après la durée de l'écoulement, de 15 à 20 centimètres cubes, aux pressions correspondantes dans la troisième colonne. On a tenu la même conduite pour les temps du 26e tableau qui suit.

26e TABLEAU DE LA PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

TUBE K.

Longueur du tube..... $l = 364^{mm},00$

Diamètres du tube à son extrémité libre..... D= 0 ,1316

NUMÉROS des expériences.	TEMPÉRATURE ambiante.	PRESSIONS exprimées en mercure à la température ambiante.	TEMPS de l'écoulement de 1 centimètre cube.
1	11°	$54^{mm},987$	$2^h\,23'\,10''\,00''' = 8590'',00$
2	11	210 ,129	37 30 00 = 2250 ,00
3	11	419 ,645	18 45 45 = 1125 ,75
4	11	835 ,565	9 25 00 = 565 ,00
5	12	1576 ,000	4 46 00 = 286 ,00
6	11	2338 ,376	3 17 30 = 197 ,50
7	11	3095 ,540	2 34 00 = 154 ,00
8	11	3856 ,939	2 3 00 = 123 ,00
9	11	4616 ,534	1 46 15 = 106 ,25
10	11	5376 ,534	1 28 15 = 88 ,25
11	11	6136 ,534	1 17 30 = 77 ,50
12	7	6136 ,534	1 26 45 = 86 ,75

On se sert des données de la 2e expérience, et on a :

TEMPS CALCULÉS.	TEMPS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT.
8598″,20	8590″,00
1126 ,64	1125 ,75
565 ,83	565 ,00
202 ,10	197 ,50
152 ,73	154 ,00
122 ,80	123 ,00
102 ,40	106 ,25
87 ,93	88 ,25
77 ,04	77 ,50

On a omis les temps correspondants aux 5e et 12e expériences, leur température n'étant pas 11° c.

Ainsi, pour des intervalles de huit atmosphères dans les pressions, la loi qui nous occupe a encore lieu.

77. La douzième expérience est faite à 7°, lorsque la dixième l'est à 11°; les temps 86″,75 et 88″,25 de ces expériences sont, pour ainsi dire, les mêmes. La pression de la douzième surpasse la pression de la dixième d'une atmosphère; alors le retard occasionné dans l'écoulement, par l'abaissement du 4° dans la température, se trouve presque effacé par l'augmentation dans la pression d'une atmosphère. On pourrait faire une remarque analogue pour les 3e et 5e expériences du 25e tableau, faites avec un tube de longueur et de diamètre différents du tube K.

78. Des expériences consignées dans les vingt-six tableaux appartenant à la première série, il résulte que les temps exigés pour l'écoulement d'une même quantité de liquide, toutes choses égales d'ailleurs, sont en raison inverse des pressions. Cette loi paraît indépendante de la température; aussi, quoique le plus grand nombre des expériences aient été faites à 10°, cette loi n'a subi aucune modification en opérant aux températures 8°, 11°, 18° et 19,° indiquées dans les six derniers tableaux.

79. Il est facile, d'après cette loi, de trouver la relation qui lie les *dépenses* ou *produits* aux pressions, pendant le même temps. Soit a la quantité de liquide écoulé dans un temps t et sous la pression P; à la pression mP, la quantité a s'écoulera en un temps marqué par $\frac{t}{m}$; alors à cette même pression mP, pendant le temps t, il s'écoulera ma : les produits sont donc entre eux comme les pressions. Si nous représentons par Q les produits correspondants aux pressions P, il viendra, pour l'équation du mouvement des liquides, dans les tubes que nous considérons, $Q=KP$; K étant un coefficient constant pour un même tube, toutes choses égales d'ailleurs. Nous verrons bientôt que ce coefficient est une certaine fonction de la longueur du tube, de son diamètre, et de la température à laquelle on opère.

80. Cette relation entre les produits et les pressions ne tient pas à certaines limites de vitesse des molécules fluides, dans le mouvement que nous examinons : ainsi, comme on peut facilement s'en assurer, par l'examen des vitesses du liquide dans les tubes qui viennent de nous occuper, tel tube qui, réduit à une certaine longueur, n'offre plus la relation précédente, donne une vitesse comprise entre celles présentées par deux tubes pour lesquels la loi existe.

Mais les tubes, d'après la grandeur de leurs diamètres, doivent avoir une étendue en longueur au-dessus d'une certaine limite déterminée, pour que la loi ait lieu; et cette limite diminue d'autant plus, que le diamètre du tube est lui-même plus petit. En effet, le tube F, le plus gros des tubes employés, pour lequel la loi existe avec la longueur de 384^{mm}, ne l'offre plus pour la longueur de 200^{mm} (67), lorsque au contraire le tube A, d'un plus petit diamètre, offre la loi, non-seulement pour 100^{mm}, 5, mais encore pour les longueurs $75^{mm},8$ et $51^{mm},1$ (voyez les 1^{er}, 2^{e} et 3^{e} tableaux de la première série). La loi cesse pour ce dernier tube avec la longueur de $25^{mm},55$ (42), lorsqu'elle persiste avec cette longueur pour le tube B‴, de moindre diamètre (7^{e} tableau) (48) Nons ferions les mêmes remarques sur les tubes C, D, E dont les diamètres sont de plus en plus petits. Ainsi le tube E présente la loi pour toutes les longueurs, même pour deux millimètres (64). Donc, plus le diamètre du tube est petit, plus se trouve diminuée la limite de sa longueur. Mais quoique nous ne puissions pas assigner la grandeur de cette limite relativement au diamètre du tube, nous pouvons voir que, le rapport de la longueur du tube à son diamètre, pour donner lieu à la loi, n'est point un nombre constant : ce rapport augmente au fur et à mesure de l'accroissement du diamètre du tube. Ainsi, le tube E″ ayant une longueur 70 fois plus grande que son diamètre, la loi a lieu (64) lorsque le tube D^{IV}, de calibre plus grand et d'une étendue égale à 80 fois son diamètre, ne la présente pas (voir le 9^{e} tableau de la seconde série d'expériences (61)); le tube C^{IV} satisfait à la loi,

pour une longueur de 120 fois son diamètre (54), quand le tube A''', de diamètre plus grand, ne la donne plus, pour une longueur de 180 fois son diamètre (42). La loi existe pour le tube B''', 210 fois plus grand que son diamètre (48), lorsqu'elle cesse d'avoir lieu pour le tube F', de diamètre plus grand, sa longueur étant 310 fois son diamètre (67). Ainsi l'existence de la loi ne tient pas à un rapport constant entre la longueur du tube et son diamètre; mais, comme nous venons de le voir, le nombre qui exprime ce rapport diminue de plus en plus avec le diamètre du tube. De là, nous sommes conduit à penser que la relation des produits en raison directe des pressions existerait encore pour un tube de $0^{mm},005$ à $0^{mm},01$ de diamètre, lorsqu'il serait réduit à la longueur de $0^{mm},3$ à $0^{mm},5$. Ces dimensions représentent à peu près celles des vaisseaux capillaires sanguins des mammifères, dans la trame ou réseau qu'ils forment entre les artères et les veines.

CHAPITRE II.

INFLUENCE DE LA LONGUEUR SUR LA QUANTITÉ DE LIQUIDE QUI TRAVERSE LES TUBES DE TRÈS-PETITS DIAMÈTRES.

81. Pour déterminer l'influence de la longueur du tube, nous avons cherché les temps qu'exigeait à s'écouler une même quantité de liquide, à la même pression, à la même température, en donnant au tube des longueurs différentes; et nous avons comparé entre eux les temps des expériences correspondants aux diverses longueurs.

82. Mais cette marche suppose que les tubes sont parfaitement cylindriques : il n'en existe pas; tous sont plus ou moins coniques. Cependant, ainsi qu'il a été déjà dit, en faisant un choix sur un très-grand nombre de tubes, nous en avons trouvé quelques-uns qui, s'ils ne sont pas rigoureusement cylindriques, peuvent être considérés comme tels, par suite des petites différences de $0^{mm},001$ à $0^{mm},002$ qu'offrent leurs diamètres aux deux extrémités, pour

une étendue assez petite de 100 à 150 millimètres. D'ailleurs on a eu le soin de noter ces petites différences dans les diamètres aux deux extrémités de chaque tube, afin d'en tenir compte dans les résultats obtenus.

83. La longueur des tubes a été déterminée à l'aide d'un compas à verges de M. Gambey, provenant du cabinet de physique du Collége de France, et que M. Savart a bien voulu mettre à notre disposition; à ce compas est adapté un vernier qui donne des vingtièmes et au besoin des quarantièmes de millimètre. Ces mesures ont été prises à la température de 10°, à laquelle avaient été faites les expériences; les bouts des tubes, séparés à l'aide d'une lime, ont été préalablement usés, de manière à détruire les inégalités qui se trouvaient au delà du plan mené par l'extrémité de la cavité du tube et perpendiculairement à son axe.

84. D'après ce que nous savons de la loi des pressions, il était indifférent de prendre telle pression plutôt que telle autre. Nous avons adopté celle de 775 millimètres de mercure.

On extrait des 1er 2e et 3e tableaux de la première série (38, 39, 40) les expériences faites à des pressions voisines de 775^{mm} de mercure, et on cherche les temps correspondants à cette pression de 775^{mm}, en s'appuyant sur la loi des pressions établie dans le chapitre précédent. On agit de même à l'égard de chacune des dernières expériences des quatre premiers tableaux de la seconde série (42, 43), où le tube a des longueurs de plus en plus petites[1], et on forme le tableau suivant, dans lequel, après avoir noté la pression et la température, la première colonne indique les numéros des expériences, la seconde les noms des tubes, la troisième leurs diverses longueurs et leurs diamètres aux deux extrémités, et la quatrième les temps de l'écoulement d'une même quantité de liquide, correspondants aux longueurs des tubes citées dans la troisième colonne.

[1] A la vérité, pour les longueurs $25^{mm},55$; $15^{mm},75$, etc. du tube A, la loi des pressions n'existe plus (42, 43); mais pour des pressions très-voisines l'une de l'autre, comme $774^{mm},62$ et 775 millimètres par exemple, elle a sensiblement lieu.

1er TABLEAU.

Pression ..... 775mm de mercure
Température ..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	NOMS des tubes.	LONGUEURS DES TUBES et leurs diamètres aux deux extrémités.	TEMPS de l'écoulement de 13cc,34085.
1	A	100mm,5 — Extrémité libre.... d = 0mm,1395 ; D = 0 ,1415 — Extrémité opposée.. d = 0 ,1405 ; D = 0 ,1430	1746″,50
2	A′	75 ,8 — Extrémité libre.... d = 0 ,1400 ; D = 0 ,1420 — Extrémité opposée.. d = 0 ,1405 ; D = 0 ,1430	1307 ,40
3	A″	51 ,1 — Extrémité libre.... d = 0 ,1405 ; D = 0 ,1425 — Extrémité opposée.. d = 0 ,1405 ; D = 0 ,1430	877 ,78
4	A‴	25 ,55 — Aux deux extrémités. d = 0 ,1405 ; D = 0 ,1430	448 ,18
5	A^{IV}	15 ,75 — Aux deux extrémités. d = 0 ,1405 ; D = 0 ,1430	298 ,06
6	A^{V}	9 ,55 — Aux deux extrémités. d = 0 ,1405 ; D = 0 ,1430	206 ,90
7	A^{VI}	6 ,77 — Aux deux extrémités. d = 0 ,1405 ; D = 0 ,1430	165 ,50

85. Si on examine avec quelque attention les trois premières expériences, on est conduit à penser que les temps sont en raison directe des longueurs des tubes. En effet, déterminons, en supposant qu'il en soit ainsi, le temps d'une expérience, en

la comparant à celle qui la précède *immédiatement* (on verra bientôt pourquoi nous procédons ainsi), on aura :

Pour le temps de la 2e expérience, comparée à la première	1317″,2	au lieu de	1307″,40
Pour celui de la 3e, comparée à la deuxième	881 ,4	au lieu de	877 ,78
Pour celui de la 4e, comparée à la troisième	439 ,3	au lieu de	448 ,18
Pour celui de la 5e, comparée à la quatrième	276 ,3	au lieu de	298 ,06
Pour celui de la 6e, comparée à la cinquième	180 ,7	au lieu de	206 ,90
Pour celui de la 7e, comparée à la sixième	146 ,7	au lieu de	165 ,50

86. Pour plus de clarté dans les remarques qui vont suivre, nous ferons observer que le tube A, ainsi que A′, A″, A‴, etc. représente rigoureusement des cônes tronqués, dont la petite base, d'après les diamètres indiqués, correspond à l'extrémité libre du tube, et la grande base, à l'extrémité voisine de l'ampoule. Le tube A, d'abord de la longueur de $100^{mm},5$, a été réduit, en en enlevant successivement certaines portions, à $75^{mm},8$; $51^{mm},1$; $25^{mm},55$, etc. or, comme les diamètres du tube augmentent sensiblement de plus en plus, en allant de l'extrémité libre vers l'ampoule les portions de tube successivement enlevées sont de plus petits diamètres que celles qui restent, et, par conséquent, un tube qui succède à un autre peut être considéré comme ayant un diamètre sensiblement plus grand.

87. Ainsi le tube A′ de la deuxième expérience est d'un diamètre moyen plus considérable que le tube A de la première; il en est de même du tube A″ comparé aux tubes A et A′, qui le précèdent, et ainsi de suite. De là il résulte, toutes choses égales d'ailleurs, que le temps obtenu expérimentalement pour le tube A′ doit être plus court, en le comparant au tube A, que celui qu'on obtiendrait dans le cas de tubes parfaitement cylindriques, puisque A a un diamètre sensiblement plus petit que celui de A′. La même remarque est tout à fait applicable au tube A‴ comparé à A″, etc. Aussi obtient-on pour le temps de la deuxième expérience comparée à la première 1317″,7, au lieu de 1307″,4 données expérimentalement : on a dix secondes de plus; mais le tube A′ est d'un diamètre sensiblement plus grand que le

tube A; de telle sorte que, si ce résultat ne légitime pas pleinement la relation que nous voulons établir, il ne la détruit aucunement. De même, le temps de la troisième expérience comparée à la deuxième est 881″,4, au lieu de 877″,78 données expérimentalement. La différence est seulement de 4″ en plus, mais elle peut être due au calibre sensiblement plus grand de A′ comparé à A′. L'existence de ces faibles différences, par excès, nous porterait d'ailleurs à penser que, pour les longueurs $100^{mm},5$; $75^{mm},8$ et $51^{mm},1$, les temps sont en raison directe des longueurs des tubes.

88. Quant aux expériences faites avec les longueurs de plus en plus petites, $25^{mm},55$; $15^{mm},75$; $9^{mm},55$; $6^{mm},775$, les temps calculés d'après la relation en question sont, au contraire, tous plus petits que ceux obtenus expérimentalement: ainsi la loi n'est nullement applicable aux tubes A‴, A^{IV}, etc. comme aussi nous avons vu la loi des pressions exister pour les longueurs $100^{mm},5$; $75^{mm},8$ et $51^{mm},1$ (38, 39, 40), et cesser d'avoir lieu pour les longueurs $25^{mm},55$; $15^{mm},75$, etc. (42, 43) eu égard au diamètre du tube.

89. Certes, si nous n'avions, pour établir la loi qui nous occupe, que les expériences précédentes, il y aurait quelque témérité à l'adopter, d'après l'examen de données aussi circonscrites; mais les expériences suivantes vont confirmer les conséquences que nous venons de tirer.

90. Agissant pour le tube B comme il vient d'être dit pour le tube A, nous prenons dans les 4^{e}, 5^{e}, 6^{e} et 7^{e} tableaux de la première série, les expériences faites à des pressions les plus voisines de 775^{mm} de mercure, ainsi que celles du même tube, mais pour des longueurs de plus en plus petites, consignées dans les 6^{e} et 7^{e} tableaux de la seconde série, et nous cherchons, en nous appuyant sur la loi des pressions, les temps correspondants à la pression de 775^{mm} pour chaque expérience. Il vient alors le tableau suivant.

2e TABLEAU.

Pression..... 775mm de mercure
Température..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	NOMS des tubes.	LONGUEURS DES TUBES et leurs diamètres aux deux extrémités.			TEMPS de l'écoulement de 6cc,4482.
1	B	100mm,05	Extrémité libre....	$d = 0^{mm},1117$; $D = 0\ ,1135$	2052″,98
			Extrémité opposée..	$d = 0\ ,1125$; $D = 0\ ,1145$	
2	B′	75 ,05	Extrémité libre....	$d = 0\ ,1120$; $D = 0\ ,1140$	1526 ,20
			Extrémité opposée..	$d = 0\ ,1125$; $D = 0\ ,1145$	
3	B″	49 ,375	Extrémité libre....	$d = 0\ ,1122$; $D = 0\ ,1142$	998 ,74
			Extrémité opposée..	$d = 0\ ,1125$; $D = 0\ ,1145$	
4	B‴	23 ,575	Extrémité libre....	$d = 0\ ,1123$; $D = 0\ ,1143$	475 ,18
			Extrémité opposée..	$d = 0\ ,1125$; $D = 0\ ,1145$	
5	BIV	9 ,00	Extrémité libre....	$d = 0\ ,1124$; $D = 0\ ,1144$	199 ,39
			Extrémité opposée..	$d = 0\ ,1125$; $D = 0\ ,1145$	
6	BV	3 ,90	Aux deux extrémités.	$d = 0\ ,1125$; $D = 0\ ,1145$	110 ,20

91. En supposant les temps en raison directe des longueurs des tubes, nous cherchons le temps d'une expérience en la comparant toujours à celle qui la précède immédiatement; on obtient :

Pour le temps de la 2e expérience, comparée à la première...	1539″,0 au lieu de	1526″,20
Pour celui de la 3e, comparée à la deuxième.....	1004 ,0 au lieu de	998 ,74
Pour celui de la 4e, comparée à la troisième.....	476 ,8 au lieu de	475 ,18
Pour celui de la 5e, comparée à la quatrième.....	181 ,4 au lieu de	199 ,39
Pour celui de la 6e, comparée à la cinquième.....	86 ,4 au lieu de	110 ,20

92. Le tube B, comme le précédent A, est un cône tronqué; ses diamètres augmentent sensiblement de l'extrémité libre vers celle opposée voisine de l'ampoule. Comme pour le tube A, les tubes B′, B″, B ‴, de moindres longueurs, ont donc un calibre qui augmente sensiblement de plus en plus; aussi la durée 1526 ,20 de la seconde expérience est-elle inférieure à celle 1539″, obtenue en partant de la première expérience faite avec le tube B, de diamètre sensiblement plus petit. La durée de la troisième expérience est aussi plus petite que le temps calculé en partant de la seconde expérience. Cette différence est moindre que la précédente, car les diamètres des tubes B, B′, B″, B‴ diffèrent d'autant moins entre eux que les tubes deviennent plus courts; par cette raison, la durée de la quatrième expérience diffère encore moins du temps calculé : la différence n'est que d'une seconde.

La loi pour les longueurs $100^{mm},05$; $75^{mm},05$; $49^{mm},375$; $23^{mm},575$ est donc tout à fait admissible.

93. Nous avons ici, ainsi que nous l'avons fait pour les tubes A, A′, A″, etc. comparé une expérience à celle qui la *précède immédiatement*, car, par les raisons que nous venons de donner, le diamètre moyen d'un tube surpassera d'autant plus celui du tube qui le précède qu'il en sera plus éloigné : plus grande alors serait la différence entre le temps obtenu expérimentalement et celui calculé en s'appuyant sur les temps en raison directe des longueurs.

94. Quant aux expériences faites avec $B^{IV}=9^{mm}$; $B^{V}=3^{mm},9$, la loi n'a plus lieu : les temps calculés sont tous plus petits que ceux obtenus expérimentalement. De même, pour ces longueurs, la loi des pressions cesse aussi d'avoir lieu (49) et conduit à la même observation.

95. Remarquons encore que la loi des longueurs ne s'est pas soutenue pour le tube A‴ de $25^{mm},55$, lorsqu'elle a continué

d'exister pour B''', de même longueur environ, mais de plus petit diamètre. Ces remarques sont tout à fait analogues à celles que nous avons faites pour la loi des pressions (42, 43).

96. Le tube C, qui suit, avait primitivement $150^{mm},25$ de longueur; on n'a fait avec ce tube qu'une seule expérience. Nous avons obtenu, sous la pression de $774^{mm},13$ de mercure, une durée de $3173''$, pour l'écoulement de $2^{cc},1057$. En prenant cette expérience et celles faites sous des pressions voisines, dans les 8e, 9e, 10e, 11e et 12e tableaux de la première série, et le 8e tableau de la seconde série, nous avons cherché, comme précédemment, le temps, dans chacune de ces expériences, correspondant à la même pression, 775^{mm} de mercure. Il en est résulté le tableau suivant.

3e TABLEAU.

Pression..... 775^{mm} de mercure
Température..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	NOMS des tubes.	LONGUEURS DES TUBES et leurs diamètres aux deux extrémités.	TEMPS de l'écoulement de $2^{cc},1057$.
1	C_1	$150^{mm},25$ — Extrémité libre circulaire..... $D = 0^{mm},0838$; Extrémité opposée.. $d = 0$,0850 $D = 0$,0860	3169″,4
2	C	100 ,325 — Extrémité libre circulaire..... $D = 0$,0845 ; Extrémité opposée.. $d = 0$,0850 $D = 0$,0860	2090 ,8
3	C′	74 ,95 — Extrémité libre.... $d = 0$,0845 $D = 0$,0850 ; Extrémité opposée.. $d = 0$,0850 $D = 0$,0860	1560 ,00
4	C″	49 ,70 — Extrémité libre.... $d = 0$,0840 $D = 0$,0850 ; Extrémité opposée.. $d = 0$,0850 $D = 0$,0860	1028 ,4
5	C‴	24 ,40 — Aux deux extrémités. $d = 0$,0850 $D = 0$,0860	497 ,00
6	C^{IV}	10 ,15 — Aux deux extrémités. $d = 0$,0850 $D = 0$,0860	203 ,14
7	C^{V}	6 ,025 — Aux deux extrémités. $d = 0$,0850 $D = 0$,0860	131 ,20

97. Nous cherchons toujours le temps d'une expérience en la comparant à celle qui la précède immédiatement, en nous appuyant sur les temps en raison directe des longueurs; on a :

Pour le temps de la 2e expérience, comparée à la première....	2116″,3 au lieu de	2090″,8
Pour celui de la 3e, comparée à la deuxième.....	1562 ,0 au lieu de	1560 ,0
Pour celui de la 4e, comparée à la troisième.....	1034 ,5 au lieu de	1028 ,4
Pour celui de la 5e, comparée à la quatrième.....	504 ,0 au lieu de	497 ,0
Pour celui de la 6e, comparée à la cinquième.....	206 ,7 au lieu de	203 ,14
Pour celui de la 7e, comparée à la sixième.....	120 ,5 au lieu de	131 ,20

98. Ici se présentent les mêmes remarques que nous ont suggérées les tubes précédents. Ce tube C est d'un diamètre sensiblement plus petit à son extrémité libre qu'à l'extrémité opposée; mais, comme le défaut de cylindricité du tube porte principalement sur les 50 millimètres qui correspondent à l'extrémité libre, la différence qui existe entre le temps calculé 2116″,3 et celui 2090″,8, obtenu expérimentalement, est beaucoup plus grande que les différences analogues provenant des expériences suivantes : ces différences se réduisent à quelques secondes, jusqu'à la sixième expérience inclusivement; aussi regardons-nous la loi des longueurs parfaitement établie pour $150^{mm},25$; $100^{mm},325$; $74^{mm},95$; $49^{mm},7$; $24^{mm},4$ et $10^{mm},15$. Elle cesse dans le cas où le tube a $6^{mm},025$; mais aussi, pour cette longueur, la loi des pressions n'existe plus (56).

99. Dans les tubes précédents, les diamètres croissent sensiblement de l'extrémité libre vers l'extrémité opposée voisine de l'ampoule; le tube D_1 qui va nous occuper, présente une disposition contraire. Ses plus grands diamètres sont à l'extrémité libre; de sorte qu'en détachant du tube successivement diverses portions, on a des tubes dont les diamètres sont sensiblement de plus en plus petits. Les résultats que nous avons obtenus avec ce tube viendraient confirmer, s'il en était besoin, la loi des longueurs qui découle des expériences déjà rapportées.

Ce tube D_1 pour la longueur de $150^{mm},15$ a donné 6910″, sous la pression de $773^{mm},969$ de mercure, pour l'écoulement

de $0^{cc},3629$ à 10 degrés : cette expérience et celles faites sous des pressions voisines, consignées dans les 13^{e}, 14^{e}, 15^{e}, 16^{e} tableaux de la première série, et 9^{e} de la seconde série, sont toutes ramenées à la même pression de 775 millimètres de mercure, comme précédemment, et, les temps correspondants étant obtenus, nous avons formé le tableau suivant.

4^{e} TABLEAU.

Pression..... 775^{mm} de mercure
Température..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	NOMS des tubes.	LONGUEURS DES TUBES et leurs diamètres aux deux extrémités.			TEMPS de l'écoulement de $0^{cc},3629$.
1	D_1	$150^{mm},15$	Extrémité libre...	$d = 0^{mm},04600$; $D = 0\ ,04700$	6900″,8
			Extrémité opposée.	$d = 0\ ,04250$; $D = 0\ ,04450$	
2	D	100 ,30	Extrémité libre...	$d = 0\ ,04466$; $D = 0\ ,04600$	4839 ,5
			Extrémité opposée.	$d = 0\ ,04250$; $D = 0\ ,04450$	
3	D′	50 ,225	Extrémité libre...	$d = 0\ ,04380$; $D = 0\ ,04540$	2504 ,7
			Extrémité opposée.	$d = 0\ ,04250$; $D = 0\ ,04450$	
4	D″	25 ,175	Extrémité libre...	$d = 0\ ,04300$; $D = 0\ ,04500$	1291 ,3
			Extrémité opposée.	$d = 0\ ,04250$; $D = 0\ ,04450$	
5	D‴	9 ,95	Extrémité libre. .	$d = 0\ ,04266$; $D = 0\ ,04466$	519 ,58
			Extrémité opposée.	$d = 0\ ,04250$; $D = 0\ ,04450$	
6	D^{IV}	3 ,35	Aux deux extrémités	$d = 0\ ,04250$; $D = 0\ ,04450$	175 ,34

100. Nous cherchons, comme précédemment, le temps d'une

expérience comparée à celle qui la précède immédiatement, en admettant la loi des longueurs, et nous avons :

Pour le temps de la 2e expérience, comparée à la première.	4609″,7	au lieu de	4839″,5
Pour celui de la 3e, comparée à la deuxième.....	2423 ,4	au lieu de	2504 ,7
Pour celui de la 4e, comparée à la troisième.....	1255 ,5	au lieu de	1291 ,3
Pour celui de la 5e, comparée à la quatrième.....	510 ,37	au lieu de	519 ,58
Pour celui de la 6e, comparée à la cinquième.....	174 ,93	au lieu de	175 ,34

101. Pour les tubes précédents, les temps calculés étaient tous plus grands que ceux donnés par l'expérience, toutefois dans les limites des longueurs qui coïncident avec la loi des pressions. Ici, c'est le contraire : les temps calculés sont tous plus petits que ceux obtenus expérimentalement. Il devait en être ainsi, puisque, contrairement aux tubes A, B, C_1, le tube D_1 a un diamètre qui va en diminuant de l'extrémité libre vers l'extrémité voisine de l'ampoule; alors l'ablation de diverses portions du tube donne lieu à des tubes D, D′, D″, D‴, D^{IV}, dont les diamètres sont de plus en plus petits; c'est pourquoi, les temps correspondants à ces tubes sont plus grands que ceux donnés par le calcul, par leur comparaison à des tubes de diamètres plus considérables. Ces résultats offerts par le tube D_1, contrairement à ceux donnés par A, B, C_1, nous conduiraient seuls à penser qu'effectivement les temps sont en raison directe des longueurs.

102. Nous ferons une remarque relativement aux grandes différences que nous obtenons ici, entre les temps *calculés* et ceux donnés par l'expérience : la première différence est 229″, la deuxième 81″, la troisième 36″, etc. Les différences analogues, pour les tubes A, B, C_1 (85, 91, 97), sont beaucoup plus petites. Ces tubes, comme D_1, sont des cônes tronqués, mais ils s'éloignent chacun beaucoup moins de l'état cylindrique que le tube D_1, que nous considérons maintenant. Ainsi, la différence entre les diamètres des extrémités de A, B, C_1, dont les calibres sont respectivement 11, 7, 4 fois plus grands que celui du tube D_1, est au plus de $0^{mm},0015$ à $0^{mm},0020$, lorsque la différence entre les diamètres des extrémités de D_1, d'un calibre beaucoup plus

petit, est de $0^{mm},0025$ à $0^{mm},0035$. De là il résulte que les diamètres des tubes D_1, D, D′, D″, D‴, D^{IV}, diffèrent beaucoup plus les uns des autres que ceux des tubes provenant de A, B, C_1; aussi obtient-on, pour ce dernier tube D_1, des différences beaucoup plus grandes entre les temps calculés et ceux donnés par l'expérience, que celles offertes par les premiers tubes dans des circonstances semblables.

103. Quant au résultat que donne la comparaison de la septième expérience à la sixième, comme la loi des pressions n'a plus lieu pour $D^{IV} = 3^{mm},35$, et que, dans ce cas, les temps calculés sont tous plus petits que ceux donnés par l'expérience (85, 91, 97), quoique nous ayons obtenu $174'',93$ au lieu de $175'',34$, la presque égalité de ces nombres n'est pour rien néanmoins en faveur de la confirmation de la loi des longueurs.

104. S'il nous était permis d'invoquer ici la loi des diamètres établie dans le chapitre suivant, et d'après laquelle les produits, toutes choses égales d'ailleurs, sont entre eux comme les quatrièmes puissances des diamètres, ou, ce qui est la même chose, les temps de l'écoulement d'une même quantité de liquide sont entre eux en raison inverse des quatrièmes puissances des diamètres, nous pourrions chercher les temps correspondants aux différents tubes D, D′, D″, etc. provenant de D_1, *en ayant égard à leurs diamètres respectifs*. Mais, en agissant ainsi, soit pour D_1, soit pour les tubes qui le précèdent, A, B, C_1, on pourrait craindre de faire un cercle vicieux; car, pour établir la loi des diamètres dont nous venons de parler, nous nous servons de la loi des longueurs. Néanmoins, comme nous n'invoquons cette dernière loi que dans le cas où les tubes d'une certaine étendue ne diffèrent entre eux que d'un millimètre au plus, et qu'alors, pour des grandeurs aussi voisines, quelle que soit d'ailleurs l'influence des longueurs, on peut regarder les temps en raison directe de ces longueurs, le cercle vicieux n'est qu'apparent. Par ces raisons, nous allons procéder, pour les tubes provenant de D_1, comme nous venons de le dire.

Il faut chercher le temps de la deuxième expérience, par exemple, pour le diamètre *moyen* (114) offert par le tube D_1 de la première, en nous appuyant sur les temps en raison inverse des quatrièmes puissances des diamètres.

Le diamètre *moyen* de $D_1 = 150^{mm},15$ est $0^{mm},0450$; celui de $D = 100^{mm},30$ est $0^{mm},044415$: soit x le temps de la deuxième expérience pour le diamètre $0^{mm},0450$, on aura :

$$(0^{mm},0450)^4 : (0^{mm},044415)^4 :: 4839'',5 : x = 4593''.$$

Tel est le temps que donnerait la deuxième expérience, le tube D étant ramené au diamètre qu'offre celui de la première : or le temps calculé de la deuxième expérience comparée à la première, d'après la loi des longueurs, est $4609'',7$ (100) : ce n'est plus que $16''$ de différence, au lieu de $229''$ (102). Cette différence peut être négligée, eu égard à la grandeur des nombres sur lesquels elle porte.

Agissons de même pour la troisième expérience.

Le temps, pour le diamètre moyen $0^{mm},044125$ de D', est de $2504''7$. Cherchons, comme précédemment, le temps pour le diamètre moyen $0^{mm},044415$ du tube D de la deuxième expérience, on aura :

$$(0^{mm},044415)^4 : (0^{mm},044125)^4 :: 2504'',7 : x = 2437'',9,$$

lorsqu'on obtient $2423'',4$ pour le temps de la troisième expérience, en supposant que le diamètre du tube $D' = 50^{mm},225$ soit le même que celui du tube de la deuxième expérience.

On procède de même pour la quatrième expérience.

Le temps, pour le diamètre moyen $0^{mm},04375$ de D'', est $1291''3$. Cherchons le temps pour le diamètre moyen $0^{mm},044125$ qu'offre le tube de la troisième expérience, on aura :

$$(0^{mm},044125)^4 : (0^{mm},04375)^4 :: 1291'',3 : x = 1249'',$$

lorsqu'on obtient $1255''$ pour le temps de la quatrième expérience, en supposant le diamètre de D″ le même que celui de D′ de la troisième expérience.

Relativement à la cinquième expérience, il viendra :

Le temps, pour le diamètre moyen $0^{mm},04358$ de D‴ est $519'',58$; celui pour le diamètre moyen $0^{mm},04375$ de D″ étant représenté par x, on a :

$$(0^{mm},04375)^4 : (0^{mm},04358)^4 :: 519'',58 : x = 511'',55,$$

lorsqu'on obtient, d'après la loi des longueurs, $510'',37$, en supposant le diamètre de D‴ le même que celui de D″.

Ainsi, ce tube D_1 justifie la loi des temps en raison directe des longueurs.

105. On prend le tube E (62) et on détermine, comme par le passé, les temps des dernières expériences des 17^e, 18^e et 19^e tableaux de la première série, correspondants à la pression de 775^{mm} de mercure; on obtient le tableau suivant :

5e TABLEAU.

Pression..... 775^{mm} de mercure
Température..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	NOMS des tubes.	LONGUEURS DES TUBES et leurs diamètres aux deux extrémités.			TEMPS de l'écoulement de $0^{cc},125$.
1	E	$23^{mm},1$	Extrémité libre....	$d = 0^{mm},02860$; $D = 0\ ,02960$	$2003'',4$
			Extrémité opposée..	$d = 0\ ,02933$; $D = 0\ ,03000$	
2	E′	8 ,5	Aux deux extrémités.	$d = 0\ ,02933$; $D = 0\ ,03000$	734 ,9
3	E″	2 ,1	Aux deux extrémités.	$d = 0\ ,02933$; $D = 0\ ,03000$	178 ,1

106. Nous déterminons, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, le temps d'une expérience en la comparant à celle qui la précède immédiatement, en nous appuyant sur les temps en raison directe des longueurs des tubes, il vient:

Pour le temps de la 2e expérience, comparée à la première.. 737″,18 au lieu de 734″,9
Pour celui de la 3e, comparée à la deuxième..... 181 ,3 au lieu de 178 ,1

Ce tube étant légèrement conique et son calibre allant en augmentant de l'extrémité libre vers l'extrémité opposée, les temps calculés doivent être un peu plus grands que ceux obtenus expérimentalement: c'est ce qui a lieu effectivement. Ce tube, ainsi que nous l'avons vu pour ceux qui précèdent, donne lieu à la loi qui nous occupe.

107. Rapportons un dernier tube M, de diamètre encore plus petit que le précédent, et comparable, pour son calibre, aux vaisseaux capillaires à globules des mammifères. Nous n'avons que deux expériences à citer. Ce tube s'étant bouché, il a été impossible d'en faire un plus grand nombre.

6e TABLEAU.

Pression..... 775mm de mercure
Température..... 10° c.

NUMÉROS des expériences.	NOMS des tubes.	LONGUEURS DES TUBES et leurs diamètres aux deux extrémités.		TEMPS de l'écoulement de 0cc,0049089.
1	M	18mm,50	Aux deux extrémités. $\begin{cases} d=0^{mm},0139 \\ D=0\ ,0140 \end{cases}$	1240″
2	M′	1 ,25	Aux deux extrémités. $\begin{cases} d=0\ ,0139 \\ D=0\ ,0140 \end{cases}$	84, 5

Le temps de la 2e expérience, obtenu à l'aide de la première en supposant les temps en raison directe des longueurs, est 83″,5 au lieu de 84″,5.

La loi des longueurs a donc encore lieu pour ce tube.

108. Nous ne saurions terminer sans faire mention des expériences faites avec les tubes G′ et G″ (70,71) : le premier, de 800^{mm} de longueur, le second, de 400^{mm}, et dont le diamètre est environ cinquante fois plus grand que celui du tube précédent. Quoique ces expériences ne soient pas faites à des températures tout à fait les mêmes, on verra que, si on ne peut alors les invoquer pour établir la loi des longueurs, les résultats qu'elles présentent ne lui sont nullement opposés; c'est la seule conséquence que nous voulons en tirer. En effet, le tube G′, de 800^{mm}, donne sous la pression de $2014^{mm},16$ d'eau, et à la température de $18°,8$, un temps égal à $162''$ (5^{e} expérience du 22^{e} tableau de la 1^{re} série), lorsque le tube G″, de 400^{mm}, donne, sous la pression de $2014^{mm},36$ d'eau, et à la température de $19°,5$, un temps égal à $79'',75$ (5^{e} expérience du 23^{e} tableau de la 1^{re} série). Ce temps, d'après la loi des longueurs, devrait être de $81''$; il est plus petit de $1'',25$, mais la température $19°,5$ est supérieure à $18°,8$: alors le temps doit donc être plus court. La comparaison des 1^{res}, 2^{es} et 4^{es} expériences des mêmes tableaux, donnerait lieu à des résultats analogues.

109. Est-il nécessaire de faire remarquer ici, que le tube F, de même diamètre que G, qui, réduit aux longueurs de 200^{mm}, 100^{mm}, etc. (67), ne présente pas la loi des pressions, n'offre plus, pour ces dimensions, la loi des longueurs : des remarques tout à fait semblables ont été faites pour les tubes A, B, C_1, D_1, de plus petits diamètres.

110. Ainsi, il résulte des expériences rapportées dans ce chapitre, que les temps que met à s'écouler une même quantité de liquide, en traversant un tube de différentes longueurs, sont, toutes choses égales d'ailleurs, en raison directe de ces longueurs. Soit a la quantité de liquide écoulé par un tube dont la longueur est L, pendant le temps t; si la longueur du tube devient $\frac{L}{m}$, le temps qu'exigera la même quantité a, pour s'écouler, sera $\frac{t}{m}$;

alors la quantité de liquide écoulé avec le tube $\frac{L}{m}$, pendant le temps t, sera ma : les produits sont donc en raison inverse des longueurs des tubes.

111. Nous pouvons maintenant faire entrer la longueur du tube dans la formule $Q = K P$, que nous avons établie précédemment (79). En effet, d'après ce que nous venons de voir, les produits étant en raison inverse de la longueur L du tube, nous poserons $K = \frac{K'}{L}$, et il viendra pour l'équation du mouvement des liquides dans les tubes que nous considérons : $Q = \frac{K' P}{L}$, le coefficient K' n'étant plus qu'une certaine fonction du diamètre du tube et de la température, comme nous le verrons dans les chapitres suivants.

112. Ici se présentent, pour la loi des longueurs, les mêmes remarques que nous avons faites sur la loi des pressions (80); car nous avons vu (88, 94, 98, 103, 109) que la première cessait d'exister en même temps que la seconde. Par conséquent, nous pourrons dire, comme pour les pressions, que la loi des longueurs persévérera d'autant plus dans un tube, réduit à des longueurs de plus en plus petites, que son diamètre sera lui-même plus petit : ainsi, nous sommes porté à penser, d'après les dimensions qu'offrent les vaisseaux capillaires des mammifères, que tel organe de l'économie qui présenterait un système de vaisseaux d'une étendue en longueur deux, trois, quatre fois moindre que celle des vaisseaux d'un autre organe, donnerait passage à une quantité de liquide deux, trois, quatre fois plus considérable que celle qui traverserait ce dernier organe.

CHAPITRE III.

INFLUENCE DU DIAMÈTRE SUR LA QUANTITÉ DE LIQUIDE QUI TRAVERSE LES TUBES DE TRÈS-PETITS DIAMÈTRES.

113. Pour arriver au but que nous voulions atteindre, nous avons déterminé les quantités de liquide écoulé dans des tubes *de diamètres différents*, sous la même pression, à la même température, dans le même temps, les tubes ayant même longueur; et nous avons comparé les produits en ayant égard aux diamètres des tubes. Comme la relation qui lie les produits aux diamètres est, de sa nature, très-simple, il a été facile de la découvrir, pour ainsi dire, à l'inspection.

114. S'il est rare de trouver des tubes cylindriques (82), il ne l'est pas moins d'en rencontrer de circulaires; aussi, ayant fait un choix, comme nous l'avons déjà dit, sur un grand nombre de tubes, nous nous sommes arrêté à ceux qui, pouvant être d'abord considérés comme cylindriques, approchaient le plus d'être circulaires. On a donc trouvé leur ouverture légèrement ovalaire; mais, en la considérant comme *elliptique*, et cela sans erreur sensible, on a pu obtenir le diamètre *moyen* de l'ouverture, en cherchant une moyenne proportionnelle entre ses plus grand et plus petit diamètres, mesurés à l'aide de la *camera lucida* (30). Ayant ainsi procédé pour les deux extrémités du tube, on a pris ensuite la moyenne arithmétique des diamètres *moyens* de chaque extrémité, et le résultat a été considéré comme représentant le *diamètre moyen* du tube.

115. Au sujet de la longueur constante des tubes, nous remarquerons que l'influence des diamètres qui nous occupe ne regarde que les cas où existent les lois des pressions et des longueurs; et, comme tel tube cesse en même temps d'offrir ces deux lois, lorsqu'il est réduit à une certaine longueur, par suite de la grandeur de son diamètre, nous aurions dû prendre, pour la même lon-

gueur des tubes, une étendue pour laquelle ces lois eussent constamment lieu, dans tous les tubes que nous avons considérés; nous aurions pu ainsi adopter la longueur de 400 millimètres, par exemple, qui convient au tube F (65, 66) et, par conséquent, à tous les autres, de diamètres plus petits, dont nous avons fait usage. Mais il n'était pas nécessaire de prendre ainsi une aussi grande étendue de tube; nous avons préféré une longueur pour laquelle nous avions expérimenté directement un plus grand nombre de fois, par exemple celle de 25 millimètres. Alors pour les tubes F et A qui, réduits à cette dimension, n'offrent plus les deux lois (67, 42), nous avons cherché leurs produits, en partant d'expériences faites dans le cas de longueurs où les lois existent, et nous avons ensuite déterminé, d'après la loi des longueurs, leurs produits pour celle de 25 millimètres que nous avions arrêtée. Par là notre travail s'appuyait sur un plus grand nombre de faits observés directement, puisque, sur sept tubes que nous avons considérés, il n'y en a que deux pour lesquels la loi des longueurs n'a pas lieu, lorsqu'ils sont réduits à 25 millimètres. Cette circonstance est du reste tout à fait indifférente en procédant comme il vient d'être dit, car si, au lieu de 25 millimètres, nous avions pris 400 millimètres, les produits auraient été, tous, seize fois plus petits que ceux que nous avons obtenus.

116. Quant au temps, nous avons pris 500 secondes, comme étant à peu près la moyenne de la durée de nos expériences. La pression pouvant être quelconque, nous avons adopté celle de 775 millimètres de mercure, ainsi que la température de 10°, déjà employées dans le chapitre précédent.

117. Comme dans l'évaluation des produits, on s'appuie sur la capacité de l'ampoule de chaque tube, on a procédé à la détermination de ce volume de la manière suivante. Il s'agit, par exemple, de l'ampoule du tube C; on a cherché la quantité de mercure que contenait cette ampoule jusqu'aux indices C et E (fig. 3), et le poids de ce mercure a été obtenu à l'aide de la balance de Fortin, du Collége de France, dont l'exacti-

tude va jusqu'à 0,5 de milligramme : on a trouvé $28^{\text{gram.}},575$; la température était 11°,5 ; en divisant ce poids par 13,569675 (densité du mercure à 11°,5), on a eu le volume de l'ampoule de verre à 11°,5 c'est-à-dire $2^{cc},10579$; et le volume à 10° a été donné par $\frac{2^{cc},10579\,(1,000258)}{1+11°,5\times 0,0000258} = 2^{cc},105708$ (0,0000258 étant le coefficient de la dilatation cubique du verre).

118. Nous allons donc chercher le produit correspondant à chaque tube, pour la longueur de 25 millimètres, à la pression de 775 millimètres de mercure, pendant le temps 500 secondes, et pour son diamètre *moyen*, comme il vient d'être dit.

119. Nous prenons, par exemple (115), la troisième expérience du premier tableau du chapitre II, pour laquelle ont lieu les lois des pressions et des longueurs : la pression est 775 millimètres et la température 10°. Les diamètres du tube, à ses extrémités, sont respectivement $\begin{cases} d=0^{mm},1405 \\ D=0\ ,1425 \end{cases}\begin{cases} d'=0^{mm},1405 \\ D'=0\ ,1430 \end{cases}$, la moyenne arithmétique des deux moyennes géométriques de d et D, et de d' et D', est $0^{mm},1416$, qui représente alors le diamètre *moyen* du tube (114). La longueur du tube est de $51^{mm},1$; la durée de l'écoulement des $13^{cc},34085$ est de $877'',78$. Nous cherchons, d'après la loi des longueurs, le temps de l'écoulement de la même quantité de liquide pour 25 millimètres : on obtient $429'',44$. Nous déterminons ensuite le produit correspondant à 500 secondes, sachant que pour $429'',44$ on a $13^{cc},34085$: comme les produits sont proportionnels aux temps, il vient $15^{cc},5328451$. Ainsi, sous la pression de 775 millimètres de mercure, à la température de 10°, et pendant 500 secondes, le tube A, de 25 millimètres de longueur, et de $0^{mm},1416$ de diamètre, donne un produit de $1553^{2\,mm.\,c.},8451$.

120. Passons à un autre tube. On extrait, du deuxième tableau du chapitre II, la quatrième expérience faite à la pression de 775 millimètres de mercure, et à 10°; les diamètres du tube à ses extrémités sont respectivement $\begin{cases} d=0^{mm},1123 \\ D=0\ ,1143 \end{cases}\begin{cases} d'=0^{mm},1125 \\ D'=0\ ,1145 \end{cases}$; le

diamètre moyen du tube est alors $0^{mm},1134$; le temps de l'écoulement des $6^{cc},4482$, pour la longueur de $23^{mm},575$, est de $475'',18$; le temps correspondant à l'écoulement de la même quantité de liquide, pour la longueur de 25 millimètres, est alors de $503'',90$, et, pendant 500 secondes, le produit est $6^{cc},3982933$. Ainsi le tube B, de 25 millimètres de longueur, et de $0^{mm},1134$ de diamètre, donne sous la pression de 775 millimètres de mercure, à 10°, et pendant 500 secondes, un produit égal à 6398,2933 millimètres cubes.

121. Nous prenons maintenant la cinquième expérience du troisième tableau du chapitre II, toujours faite à la pression de 775 millimètres de mercure, et à la température 10°; les diamètres à chaque extrémité étant $\begin{cases} d = 0^{mm},085 \\ D = 0\ ,086 \end{cases}$, le diamètre moyen du tube est $0^{mm},0854926$. La durée de l'écoulement des $2^{cc},1057$ pour la longueur $24^{mm},4$ est de $497''$: le temps correspondant à la longueur de 25 millimètres est alors de $509'',265$; et pendant 500 secondes le produit est $2^{cc},0673912$. Ainsi pour ce tube C, dont le diamètre est $0^{mm},0854926$, dans les mêmes circonstances que pour les tubes précédents A et B, le produit est 2067,3912 millimètres cubes.

122. On extrait du 4e tableau, chapitre II, la 4e expérience, faite à la pression et à la température déjà indiquées. Les diamètres du tube à ses extrémités sont respectivement :

$$\begin{cases} d = 0^{mm},0430 \\ D = 0\ ,0450 \end{cases} \quad \begin{cases} d' = 0^{mm},0425 \\ D' = 0\ ,0445 \end{cases}$$

d'où le diamètre moyen est $0^{mm},0437385$. Il s'écoule $0^{cc},3629$ en $1291'',3$ pour $25^{mm},175$; le temps correspondant à la longueur de 25 millimètres est alors de $1282'',33$, et la quantité de liquide qui s'écoule pendant $500''$, est $0^{cc},1415002$: ainsi, pour le tube D, dans les mêmes circonstances que précédemment, le diamètre étant $0^{mm},0437385$, le produit est $141^{mm.c.},5002$.

123. La 1re expérience du 5e tableau du chapitre II donne,

pour les diamètres du tube, $\begin{cases} d = 0^{mm},0286 \\ D = 0\ ,0296 \end{cases}$ $\begin{cases} d' = 0^{mm},02933 \\ D' = 0\ ,03000 \end{cases}$: le diamètre moyen est alors $0^{mm},02938$. La durée de l'écoulement des $0^{cc},125$ est $2003'',4$ pour la longueur $23^{mm},1$; alors, pour celle de 25 millimètres, le temps est $2168'',18$; et la quantité de liquide écoulé pendant $500''$ est $0^{cc},0288260$. Ainsi, pour le tube E, son diamètre étant $0^{mm},02938$, le produit est $28,8260$ millimètres cubes.

124. On prend la 1re expérience du 6e tableau, chapitre II: les diamètres du tube, à chaque extrémité, sont $\begin{cases} d = 0^{mm},0139 \\ D = 0\ ,0140 \end{cases}$; le diamètre moyen du tube est alors $0^{mm},0139499$. Le temps de l'écoulement des $0^{cc},0049089$ est de $1240''$ pour la longueur de $18^{mm},5$: alors, pour celle de 25 millimètres, la durée de l'écoulement sera $1675'',6$; et pendant $500''$ il s'écoulera $0^{cc},0014648$. Ainsi, dans les mêmes circonstances que pour les tubes A, B, C, D, E, le tube M, de $0^{mm},0139499$ de diamètre, donne un produit de $1^{mm.\,c.},4648$.

125. Nous allons terminer par le tube F du 20e tableau de la 1re série, chapitre Ier. Son diamètre est beaucoup plus grand que ceux des tubes que nous venons de considérer. En suivant la marche indiquée précédemment (115), comme pour des pressions très-grandes, la vitesse d'écoulement est très-considérable. Une erreur seulement d'une seconde, sur les $20''$ qu'offre la 8e expérience, faite à une pression voisine de 775 millimètres de mercure, donnerait un résultat tout à fait erroné pour le produit correspondant à la durée de $500''$. Aussi avons-nous pris la 4e expérience, dont le temps est de $150''$, et la pression $1352^{mm},1$ d'eau distillée. Il faut d'abord avoir le temps correspondant à la pression de 775 millimètres de mercure ou de $10522^{mm},1595$ d'eau. En partant de cette expérience, et s'appuyant sur la loi des pressions, il vient $19'',275$; ainsi, pour la longueur de $383^{mm},825$, à la pression de 775 millimètres de mercure, il s'écoule $17^{cc},566$ pendant le temps marqué par $19'',275$. Cherchant le produit pour $500''$, on a alors $455^{cc},66796368$, toujours pour la lon-

gueur de $383^{mm},825$; et pour celle de 25 millimètres, il viendra $6995^{cc},8702463$. Les diamètres du tube, à ses extrémités, sont respectivement $\begin{cases} d = 0^{mm},6160 \\ D = 0\ ,6932 \end{cases}$ $\begin{cases} d' = 0^{mm},614 \\ D' = 0\ ,690 \end{cases}$: d'où le diamètre moyen du tube est $0^{mm},65217$. Ainsi le tube F, dans les mêmes circonstances où se trouvent les tubes précédents, son diamètre étant $0^{mm},65217$, on a, pour le produit correspondant, 6995870,2463 millimètres cubes.

126. Les résultats offerts par les tubes que nous venons d'examiner donnent lieu, en les rangeant par ordre de grandeur, au tableau suivant.

Pression ..... 775^{mm} de mercure
Température ..... 10°
Durée de l'écoulement ..... 500″
Longueur du tube ..... 25^{mm}

NOMS des tubes.	DIAMÈTRES MOYENS des tubes.	PRODUITS exprimés en millimètres cubes.
M	$0^{mm},013949$	$1^{mm.c.},4648$
E	0 ,029380	28 ,8260
D	0 ,043738	141 ,5002
C	0 ,085492	2067 ,3912
B	0 ,113400	6398 ,2933
A	0 ,141600	15532 ,8451
F	0 ,652170	6995870 ,2463

127. Les diamètres des tubes étant entre eux, en nombres ronds, comme 1, 2, 3, 6, 8, 10, 50, il a été facile de prévoir que les produits étaient en raison directe des quatrièmes puissances des diamètres. En effet, en cherchant, d'après cette relation, le produit du tube M, comparé à celui du tube E, on a, en appelant x ce produit :

$$(0,02938)^4 : (0,013949)^4 :: 28^{mm.c},826 : x = 1^{mm.c},4650,$$

au lieu de $1^{mm.c},4648$ que donne l'expérience.

En procédant de la même manière sur les tubes E et D, D et C, C et B, etc. il vient :

Pour le produit de E, comparé à D.....	$28^{mm.c},808$	au lieu de	$28^{mm.c},8260$	
Pour le produit de D, comparé à C.....	141	,630 au lieu de	141	,5002
Pour le produit de C, comparé à B.....	2066	,930 au lieu de	2067	,3912
Pour le produit de B, comparé à A.....	6389	,240 au lieu de	6398	,2933
Pour le produit de A, comparé à F.....	15547	,100 au lieu de	15532	,8451

Si on cherche le produit d'un tube en le comparant à un autre de diamètre beaucoup plus grand, par exemple M à D, on a, pour le produit de M comparé à D, $1^{mm.c},46415$, au lieu de $1^{mm.c},4648$ donné expérimentalement.

Le diamètre du tube F est environ 50 fois plus grand que celui du tube M, et, par conséquent, il offre un calibre 2500 fois plus considérable. Le produit de M, comparé à F, est $1^{mm.c},46448$, au lieu de $1^{mm.c},4648$, donné par l'expérience. Le produit du tube C, comparé à celui du tube F, est $2065^{mm.c},92$, au lieu de $2067^{mm.c},3912$ obtenu expérimentalement.

128. Toute autre combinaison de deux tubes donnant des résultats aussi satisfaisants, nous sommes en droit de conclure, que les produits, toutes choses égales d'ailleurs, sont entre eux comme les quatrièmes puissances des diamètres.

129. En faisant entrer ce résultat dans la formule $Q = K'\frac{P}{L}$, obtenue précédemment dans le second chapitre (111), il viendra, pour l'équation du mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres (D représentant le diamètre), $Q = K''\frac{P.D^4}{L}$, K'' étant un coefficient constant pour la même température et la même intensité de la pesanteur.

130. Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer la grandeur de ce coefficient K'', pour la température de 10°, à laquelle ont été faites les expériences, en supposant que l'écoulement ait lieu, par exemple, pendant le temps 1''. A cet effet, il suffit de substituer à la place de Q, P, D et L, leurs valeurs particulières,

correspondantes à chacun des tubes que nous avons considérés, dans $K'' = \frac{Q.L}{P.D^4}$. Ainsi, pour le tube M, $Q = \frac{1^{mm.c.},4648}{500}$, $L = 25$ millimètres, $P = 775$ millimètres de mercure, $D = 0^{mm},013949$, d'où, en effectuant les calculs indiqués,

Pour le tube M	$K'' = 2495,50$
Pour le tube E, d'après les données correspondantes, on a	$K'' = 2496,00$
Pour le tube D	$K'' = 2494,42$
Pour le tube C	$K'' = 2496,77$
Pour le tube B	$K'' = 2496,20$
Pour le tube A	$K'' = 2492,67$
Pour le tube F	$K'' = 2495,00$

131. Ces valeurs de K″, comme on le voit, diffèrent très-peu les unes des autres. Les légères différences qu'elles présentent peuvent être attribuées aux petites erreurs inévitables, dans la détermination numérique des quantités Q, P, D et L, relativement à chaque tube. La moyenne de ces valeurs étant 2495,224, l'équation précédente (129) devient $Q = 2495,224.\frac{P.D^4}{L}$, à la température de 10°. Il est inutile d'ajouter que le produit Q correspondant à 1″, ainsi que P, D et L sont exprimés à la même température 10°.

132. Si la pression P, au lieu d'être déterminée par une charge de mercure, l'était par une charge d'eau distillée, comme une colonne de mercure à 10° donne une pression 13,5769811 fois plus grande que celle d'une même colonne d'eau distillée, à la même température, il viendra, pour la valeur de K″, $\frac{2495,224}{13,5769811} = 183,783$. Ainsi, la pression étant exprimée en eau distillée à 10°, la formule devient, dans les mêmes circonstances que précédemment, $Q = 183,783.\frac{P.D^4}{L}$.

133. Nous pouvons déterminer la moyenne des vitesses diverses qu'offrent les filets fluides dans les tubes que nous considérons. On sait, en effet, ainsi que l'ont fait voir Haller et Spallanzani, comme on peut s'en assurer soi-même en examinant le mouvement du sang à l'aide du microscope, soit dans les vais-

seaux vivants des batraciens, soit dans ceux des mammifères, que la vitesse des divers filets fluides, depuis l'axe du vaisseau vers les parois, est loin d'être la même. Cette vitesse est à son maximum dans l'axe du vaisseau; elle diminue au fur et à mesure qu'on s'approche des parois : ainsi la vitesse, tout près des parois, est d'une lenteur extrême. Ce moyen d'examiner le mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres devrait être employé par les hydrauliciens; ils y puiseraient des données qu'il leur est impossible de trouver ailleurs. La vitesse que nous allons évaluer sera donc la *vitesse moyenne* de tous les filets fluides depuis l'axe du tube jusqu'à ses parois. Si V représente cette vitesse, il viendra, Q étant le produit, D le diamètre du tube, et π le rapport de la circonférence au diamètre, $Q = \frac{\pi D^2}{4} \times V$. Mettant cette valeur de Q dans la formule précédente, $Q = K'' \cdot \frac{P.D^4}{L}$, on aura pour l'expression de la vitesse $V = \frac{4K''}{\pi} \times \frac{PD^2}{L}$: d'où nous concluons que la vitesse, dans les tubes de très-petits diamètres, est proportionnelle à la pression, en raison inverse de la longueur des tubes, et proportionnelle au carré de leurs diamètres.

134. La formule que M. Navier a obtenue, mais seulement par des considérations purement mathématiques, en partant de certaines hypothèses, faites *a priori* sur l'état des molécules fluides en mouvement dans les tubes de très-petits diamètres, est $V = H \times \frac{P.D}{L}$ (H étant un coefficient constant); elle diffère de celle que nous avons établie, en ce qu'elle contient la première puissance du diamètre au lieu de la seconde.

135. Proposons-nous maintenant d'évaluer la vitesse dans quelques-uns des tubes sur lesquels nous avons expérimenté : mettons dans $V = \frac{4K''}{\pi} \times \frac{P.D^2}{L}$, la valeur de K'' correspondante au produit Q en 1'' (131), on aura $V = \frac{4 \times 2495,224}{3,141592} \times \frac{P.D^2}{L}$; d'où $V = 3177,018 \times \frac{P.D^2}{L}$. Prenons, par exemple, l'expérience

faite avec le tube B (126); on a P = 775 millimètres de mercure, D = $0^{mm},1134$, et L = 25 millimètres; remplaçant, il viendra: $V = 3177,018 \times \frac{775\,(0^{mm},1134)^2}{25} = 1266^{mm},507$. Telle est la vitesse moyenne; ainsi une molécule fluide parcourt, dans le tube B, $1266^{mm},507$ en $1''$.

Cherchons la vitesse pour le tube M (126), dont le diamètre diffère peu de celui des vaisseaux capillaires, à globules, dans les mammifères; D = $0^{mm},0139499$, P = 775 millimètres de mercure, L = 25 millimètres; il vient:

$$V = 3177,018 \times \frac{775\,(0^{mm},0139499)^2}{25} = 19^{mm},1657.$$

Si la pression, au lieu d'être 775 millimètres de mercure, était 155 millimètres, qui est celle du sang dans le système artériel, alors la vitesse serait cinq fois plus petite, c'est-à-dire $3^{mm},8331$.

Ici se présente une question qui a beaucoup occupé les physiologistes: quelle est la vitesse du sang dans les divers organes de l'économie? Notre formule pourrait la donner, si on connaissait la valeur du coefficient K″, relative au mouvement du liquide albumineux, le sang, dans les tubes vivants, c'est-à-dire organisés; c'est ce que nous exposerons en traitant de l'influence de la composition des liquides dans l'écoulement, soit à travers les tubes de verre, soit à travers les vaisseaux des animaux; il suffira alors d'avoir les diamètres des vaisseaux capillaires et leurs longueurs, pour obtenir la vitesse dans les divers organes.

136. Nous remarquerons seulement ici que, les dimensions des tubes capillaires de l'économie animale, étant telles que les lois du mouvement des liquides que nous venons d'établir s'y appliquent parfaitement, il résulte qu'en considérant les systèmes capillaires de deux organes, si les vaisseaux capillaires de l'un sont, par exemple, d'un diamètre deux fois plus grand que celui des capillaires de l'autre, il passera dans le premier, toutes choses égales d'ailleurs, seize fois plus de liquide que dans le second.

137. Il serait important d'examiner si l'équation $Q = K'' \times \frac{P.D^4}{L}$. (129), existerait encore pour des tubes de diamètres plus grands que ceux que nous avons considérés. Les expériences de Dubuat de Gerstner et de M. Girard, faites sur des tubes de diamètres compris entre 1 et 4 millimètres, ne s'appliquent pas à notre formule; mais les résultats que nous a offerts le tube F, de $0^{mm},65$ de diamètre (67), d'un calibre beaucoup plus considérable que celui de nos autres tubes, coïncidant avec ceux de ces derniers, lorsque, toutefois, sa longueur est suffisamment grande, nous font présumer que les tubes employés par ces auteurs, ne présentaient pas une longueur assez étendue, eu égard à leurs diamètres, pour que les phénomènes de mouvement qui s'y rapportent pussent s'accorder avec la formule $Q = K'' \times \frac{P.D^4}{L}$. Nous nous sommes alors proposé d'agir sur des tubes de plus grand calibre, en leur donnant une longueur de plus en plus considérable; mais l'appareil dont nous nous sommes servi, qui, pour le tube de $0^{mm},65$ de diamètre, présente déjà quelques difficultés [voir la note (65)], ne peut se prêter à ces sortes de tubes. Il nous aurait fallu en construire un tout à fait différent de celui que nous avons employé, et qui aurait exigé des dispositions qu'il était impossible de rencontrer dans notre laboratoire. Mais, avec l'aide de M. Savart, qui a bien voulu mettre à notre disposition une partie de son observatoire hydraulique du Collége de France, nous espérons pouvoir étendre ces recherches à des tubes de dimensions beaucoup plus considérables, et déterminer quelles sont les limites de grandeur pour lesquelles les lois du mouvement des liquides que donnent les tubes de très-petits diamètres cessent d'exister.

Il nous reste maintenant à exprimer la valeur de K'', qui, pour la température de 10°, est égale à 2495,224 (131), en fonction de la température. Cette étude fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE SUR LA QUANTITÉ DE LIQUIDE QUI TRAVERSE LES TUBES DE TRÈS-PETITS DIAMÈTRES.

138. Les tubes qui nous ont servi ont été pris parmi ceux déjà connus dans les chapitres précédents. Nous avons toujours suivi le même mode d'expérimentation aux différentes températures auxquelles on a agi, températures qui ont varié de 5 en 5° depuis 0° jusqu'à 45°. Comme celle des mammifères est d'environ 40°, on n'a pas été au delà de 45°. L'eau du récipient étant au degré du thermomètre exigé par l'expérience, si la température ambiante lui était supérieure, alors l'eau du baquet qui entoure le récipient était entretenue à une température inférieure de quelques dixièmes de degré (17) : le contraire avait lieu si la température de l'expérience était supérieure à celle de l'atmosphère. La boule du thermomètre suspendu au sein du liquide du récipient était constamment au niveau du tube, ainsi que nous l'avons indiqué, lorsqu'il s'est agi de la température de 10°, dans le plus grand nombre des expériences que nous avons rapportées dans les chapitres précédents. Lorsque, malgré tous nos soins pour obtenir une température constante, elle variait de un à deux dixièmes de degré du commencement à la fin de l'expérience, alors nous avons pris la moyenne entre les deux températures extrêmes. Le tube ayant été chargé et placé dans le récipient, l'expérience ne commençait que lorsqu'il avait séjourné huit ou dix minutes dans l'eau du récipient, afin qu'il prît bien sa température.

139. Comme l'équation de l'écoulement dans les tubes sur lesquels nous avons expérimenté est connue, eu égard à la pression, à la longueur et au diamètre, pour découvrir l'influence de la température, il était indifférent de considérer telle pression plutôt que telle autre. Nous avons adopté celle de 776^{mm} de mercure. Il était indifférent aussi d'agir sur des tubes d'une certaine longueur, pourvu que leur grandeur fût telle que les lois établies

précédemment eussent encore lieu. Quant aux diamètres des tubes, nous avons dû les varier de manière à observer si les résultats que donnait l'un se reproduisaient pour d'autres. Ainsi nous avons pris quatre tubes de diamètres de plus en plus petits : le tube A, première expérience du 1^er^ tableau du chapitre II (84); le tube C, deuxième expérience du 3^e^ tableau du même chapitre (96); le tube D', troisième expérience du 4^e^ tableau (99), et enfin le tube E, de diamètre encore plus petit, première expérience du 5^e^ tableau (105).

140. On a donc expérimenté avec chacun de ces tubes, sous des pressions voisines de 776^{mm} de mercure, et aux diverses températures que nous venons d'indiquer. Comme on devait s'y attendre, d'après les travaux de Dubuat, de Gerstner et de M. Girard, le temps exigé pour l'écoulement du liquide de l'ampoule a été d'autant plus petit, que la température était plus grande ; mais pour connaître exactement la part qu'avait la température dans les résultats recueillis, à l'exclusion de toute autre circonstance qui aurait pu les modifier, il a fallu ramener le diamètre du tube, qui varie avec la température de l'eau du récipient dans la quelle il plonge, à un diamètre constant, celui qu'il a, par exemple, à 10°. Nous avons donc cherché, pour atteindre le but que nous nous proposions, le poids du liquide écoulé pendant le même temps, une seconde, par exemple, et sous la même pression de 776^{mm} de mercure, avec le diamètre qu'avait le tube par suite de la température de l'eau du récipient; ensuite, connaissant ce dernier diamètre et le produit correspondant, nous avons déterminé le poids du liquide écoulé pendant le même temps, et avec le diamètre qu'a le tube à 10°, en nous appuyant sur la loi des diamètres. Par là, les résultats divers que nous avons obtenus n'ont pu être attribués qu'aux variations de la température [1].

141. Il a été facile ensuite de tirer la valeur de $K''=\frac{QL}{PD^4}$, correspondante à chaque température que nous avions consi-

[1] On a négligé la correction relative à la variation de la longueur du tube, cette variation étant inappréciable, eu égard aux limites de température que nous avons considérées.

dérée; on se rappelle que, pour 10°, le coefficient K'' a été trouvé égal à 2495,224 (131), Q représentant le *volume* à 10° du liquide écoulé.

142. Les expériences que nous citerons bientôt ont donc nécessité quelques calculs propres à réaliser ce que nous venons de dire. Nous allons rapporter ceux relatifs à l'une d'elles, par exemple l'expérience faite avec le tube A, à la température de 45°. Le diamètre moyen du tube est $0,^{mm}141125$ à 10° (114), sa longueur $100^{mm},5$, le temps exigé pour l'écoulement du liquide de l'ampoule, dont la capacité à 10° est $13^{cc},34085$, a été de $793'',25$ et sous la pression de $774^{mm},827$ de mercure[1]. Sous celle de 776^{mm} de mercure, d'après la loi des pressions, le temps est $792'',0519$. On cherche ensuite le *poids* du liquide écoulé en 1'' : le volume de l'ampoule de verre, dont la capacité est connue à 10°, varie, ainsi que la densité de l'eau qu'elle contient, avec la température du récipient qui, ici, est 45°; il faut donc tenir compte et de l'augmentation du volume de l'ampoule et de la diminution de la densité de l'eau qui y est contenue à cette température. Soit V le volume de l'ampoule à 10°, exprimé en centimètres cubes; son volume V' à $t°$, h représentant le coefficient de la dilation cubique du verre, sera $V' = \frac{V(1+h.t)}{1+h.10}$; et le poids de ce même volume d'eau, d représentant la densité de l'eau à $t°$, sera $V^{gram.} \times \frac{(1+h.t)}{1+h.10} \times d$. D'après Dulong et Petit, $h = 0,0000258$, la densité de l'eau à 45°, est 0,990246 : on aura donc pour le poids du liquide écoulé dans cette expérience, la capacité de l'ampoule à 10° étant $13^{cc},34085$; $\frac{13^{gram},34085 \times 1,001161}{1,000258.} \times 0,990246 = 13^{gram.},22255$, et pendant $792'',0519$: alors pendant 1'', le poids du liquide écoulé sera $16^{millig},694055$, sous la pression de 776^{mm} de mercure. Tel n'est pas le produit correspondant au diamètre $0^{mm},141125$ qu'a le tube à 10°, mais bien au diamètre qu'il a acquis en plongeant

[1] Dans l'évaluation de la pression, on a eu égard à la densité de l'eau de l'ampoule et de celle du récipient, qui étaient à la température de 45° (19).

dans l'eau du récipient à 45°; 0,0000086 étant le coefficient de la dilatation linéaire du verre, le diamètre du tube à cette température est $\frac{0^{mm},141125\,(1+0{,}0000086\times 45)}{1+0{,}0000086\times 10.} = 0^{mm},1411675$. C'est avec ce diamètre qu'a eu lieu l'écoulement de $16^{millig},694055$ en 1″; pour obtenir le produit correspondant au diamètre $0^{mm},141125$ qu'offre le tube à 10°, on se sert de la loi des diamètres, x étant le produit cherché, on aura :

$$(0,1411675)^4 : (0,141125)^4 :: 16^{millig.},694055 : x = 16^{millig.},67396.$$

Ainsi, sous la pression de 776^{mm} de mercure, pendant 1″, le *poids* du liquide écoulé à la température de 45°, avec le diamètre $0^{mm},141125$ qu'a le tube à 10°, est $16^{millig.},67396$.

143. Cette quantité représentant Q à 45°, la valeur de K″, correspondante à cette température, a été obtenue en mettant dans l'expression $K'' = \frac{QL}{P.D^4}$, à la place de Q, L, P et D, leurs valeurs particulières, et on a eu $K'' = 5444,11$.

144. La même marche a été suivie, pour chacune des expériences faites avec les tubes que nous avons considérés; on a formé alors les quatre tableaux qui suivent, et qu'on comprendra facilement d'après ce qui vient d'être exposé.

TUBE A.

Longueur..... $100^{mm},5$
Diamètre moyen à 10° c..... 0 ,141125
Capacité de l'ampoule à 10° c..... $13^{cc},34085$

DEGRÉS de température.	PRESSIONS exprimées en mercure.	TEMPS que met l'ampoule à se vider.	POIDS du liquide de l'ampoule aux diverses températures.	TEMPS qu'exige l'ampoule à se vider sous la pression de 776^{mm}.	POIDS du liquide écoulé en 1″, avec les diamètres qu'a le tube aux diverses températures.	POIDS du liquide écoulé en 1″, avec le même diamètre $0^{mm},141125$.	VALEURS de K″ aux diverses températures.
					millig.	millig.	
0°,0	$774^{mm},291$	2327″,75	$13^{g},33627$	2322″,62	5 ,74190	5 ,74376	1875 ,36
5 ,0	773 ,400	2025 ,25	13 ,33898	2018 ,46	6 ,60849	6 ,60962	2158 ,07
10 ,0	773 ,443	1750 ,00	13 ,33727	1744 ,23	7 ,64649	7 ,64649	2496 ,60
15 ,0	773 ,597	1528 ,00	13 ,33084	1523 ,27	8 ,75146	8 ,74996	2856 ,89
20 ,0	775 ,093	1344 ,50	13 ,32013	1342 ,93	9 ,91871	9 ,91530	3237 ,38
25 ,0	774 ,886	1195 ,00	13 ,30697	1193 ,28	11 ,15159	11 ,14584	3639 ,16
30 ,1	775 ,058	1067 ,50	13 ,29015	1066 ,20	12 ,46492	12 ,45631	4067 ,03
35 ,1	774 ,451	962 ,25	13 ,27068	960 ,33	13 ,81887	13 ,80695	4508 ,02
40 ,1	774 ,354	871 ,50	13 ,24866	869 ,65	15 ,23443	15 ,21866	4968 ,95
45 ,0	774 ,827	793 ,25	13 ,22255	792 ,05	16 ,69405	16 ,67396	5444 ,11

On aurait pu se dispenser, pour obtenir K″, de chercher les temps correspondants à la même pression 776 millimètres; mais par là on peut plus facilement mettre en évidence l'influence de la température, puisque la 7ᵉ colonne donne les produits, toutes choses égales d'ailleurs : en outre, dans l'évaluation de $K'' = \frac{QL}{P\ D^4}$, la quantité $\frac{L}{P\ D^4}$ est constante pour le même tube; alors les calculs sont plus simples.

TUBE C.

Longueur 100ᵐᵐ,325
Diamètre moyen à 10° c. ..... 0 ,085
Capacité de l'ampoule à 10° c. ..... 2ᶜᶜ ,1057

DEGRÉS de température.	PRESSIONS exprimées en mercure.	TEMPS que met l'ampoule à se vider.	POIDS du liquide de l'ampoule aux diverses températures.	TEMPS qu'exige l'ampoule à se vider sous la pression de 776ᵐᵐ.	POIDS du liquide écoulé en 1″, avec les diamètres qu'a le tube aux diverses températures.	POIDS du liquide écoulé en 1″, avec le même diamètre 0ᵐᵐ,085.	VALEURS de K″ aux diverses températures.
					millig.	millig.	
0°,5	774ᵐᵐ,048	2816″,75	2ᵍ,104952	2809″,66	0 ,749183	0 ,749438	1856 ,10
5 ,0	774 ,047	2422 ,75	2 ,105405	2416 ,65	0 ,871206	0 ,871355	2158 ,07
6 ,0	773 ,848	2359 ,50	2 ,105417	2352 ,95	0 ,894798	0 ,894921	2216 ,44
10 ,0	774 ,930	2093 ,50	2 ,105135	2088 ,18	1 ,008119	1 ,008119	2496 ,80
15 ,2	774 ,070	1826 ,00	2 ,104120	1821 ,45	1 ,155189	1 ,154982	2860 ,53
20 ,0	774 ,110	1612 ,75	2 ,102478	1608 ,82	1 ,306844	1 ,306594	3235 ,53
25 ,1	774 ,841	1427 ,50	2 ,100351	1425 ,36	1 ,473550	1 ,472780	3647 ,63
30 ,1	774 ,503	1280 ,50	2 ,097698	1278 ,03	1 ,641350	1 ,640220	4062 ,31
35 ,1	774 ,574	1149 ,50	2 ,094624	1147 ,38	1 ,825558	1 ,823982	4517 ,44
40 ,1	774 ,676	1042 ,50	2 ,091149	1040 ,72	2 ,009325	2 ,007247	4971 ,33
45 ,1	774 ,678	949 ,00	2 ,087022	947 ,38	2 ,202930	2 ,200274	5449 ,40

TUBE D'.

Longueur 50ᵐᵐ,225
Diamètre moyen à 10° c. ..... 0 ,0440406
Capacité de l'ampoule à 10° c. ..... 0ᶜᶜ ,3629

DEGRÉS de température.	PRESSIONS exprimées en mercure.	TEMPS que met l'ampoule à se vider.	POIDS du liquide de l'ampoule aux diverses températures.	TEMPS qu'exige l'ampoule à se vider sous la pression de 776ᵐᵐ.	POIDS du liquide écoulé en 1″, avec les diamètres qu'a le tube aux diverses températures.	POIDS du liquide écoulé en 1″, avec le même diamètre 0ᵐᵐ,0440406	VALEURS de K″ aux diverses températures.
					millig.	millig.	
5° ,00	774ᵐᵐ,887	2898″,50	0ᵍ,362849	2894″,35	0 ,125364	0 ,125388	2157 ,26
10 ,00	774 ,617	2506 ,00	0 ,362802	2501 ,54	0 ,145031	0 ,145031	2495 ,20
15 ,00	773 ,271	2199 ,00	0 ,362647	2191 ,26	0 ,165197	0 ,165168	2846 ,82
20 ,00	774 ,119	1928 ,00	0 ,362344	1923 ,32	0 ,188393	0 ,188328	3240 ,12
25 ,05	775 ,045	1713 ,75	0 ,361978	1711 ,64	0 ,211480	0 ,211371	3636 ,56
30 ,07	774 ,356	1532 ,50	0 ,361521	1529 ,25	0 ,236403	0 ,236241	4064 ,43
35 ,00	775 ,429	1375 ,50	0 ,360991	1374 ,48	0 ,262636	0 ,262411	4514 ,68
40 ,00	774 ,475	1246 ,75	0 ,360392	1244 ,30	0 ,289634	0 ,289335	4977 ,91
45 ,10	774 ,077	1138 ,00	0 ,359681	1135 ,18	0 ,316849	0 ,316466	5444 ,69

TUBE E.

Longueur..... $23^{mm},1$
Diamètre moyen à 10° c..... 0 ,02938
Capacité de l'ampoule à 10° c..... $0^{cc},125$

DEGRÉS de température.	PRESSIONS exprimées en mercure.	TEMPS que met l'ampoule à se vider.	POIDS du liquide de l'ampoule aux diverses températures.	TEMPS qu'exige l'ampoule à se vider sous la pression de 776^{mm}.	POIDS du liquide écoulé en 1″, avec les diamètres qu'a le tube aux diverses températures.	POIDS du liquide écoulé en 1″, avec le même diamètre $0^{mm},02938$.	VALEURS de K″ aux diverses températures.
					millig.	millig.	
0°,50	$773^{mm},808$	2705″,00	$0^{g},124945$	2697″,36	0 ,046321	0 ,0463361	1851 ,24
5 ,00	774 ,757	2318 ,50	0 ,125072	2314 ,78	0 ,054031	0 ,0540403	2159 ,04
10 ,00	774 ,017	2006 ,00	0 ,124966	2000 ,87	0 ,062456	0 ,0624560	2495 ,27 [1]
15 ,00	773 ,709	1756 ,75	0 ,124896	1751 ,56	0 ,071305	0 ,0712927	2848 ,32
20 ,00	773 ,475	1547 ,25	0 ,124798	1542 ,21	0 ,080921	0 ,0808931	3231 ,87
25 ,10	774 ,081	1372 ,25	0 ,124672	1368 ,85	0 ,091077	0 ,0910297	3636 ,85
30 ,05	775 ,271	1227 ,25	0 ,124515	1226 ,09	0 ,101553	0 ,1014831	4054 ,50
35 ,07	774 ,563	1102 ,50	0 ,124332	1100 ,46	0 ,112982	0 ,1128848	4510 ,02
40 ,10	775 ,329	997 ,75	0 ,124126	996 ,88	0 ,124513	0 ,1243848	4969 ,47
45 ,00	774 ,635	908 ,75	0 ,123881	907 ,15	0 ,136560	0 ,1363957	5449 ,34

145. En examinant les produits représentés dans la septième colonne de chaque tableau, on voit que, pour un accroissement constant dans les températures, on n'obtient pas un accroissement constant dans les produits correspondants, ou, ce qui est la même chose, d'après l'inspection des 8^{es} colonnes des mêmes tableaux, que les valeurs de K″ n'augmentent pas de la même quantité, pour des accroissements égaux dans les degrés de la température; mais la différence entre deux valeurs consécutives de K″, est d'autant plus grande que les températures sont plus élevées : cette remarque nous a conduit à poser

$$K'' = K_1 (1 + AT + A' T^2 + A'' T^3 + A''' T^4 + \text{etc.})$$

T représentant la température; K_1 la valeur de K″ [1] à zéro degré; A, A′, A″, A‴, etc. étant des coefficients constants à déterminer d'après les résultats des expériences.

[1] Cette valeur de K″ ne paraît pas coïncider avec celle de 2496, obtenue dans le chapitre III (130), quoiqu'il s'agisse du même tube E. Ce défaut de concordance tient à ce que le produit Q représentait le volume du liquide écoulé à 10° c. tandis qu'ici Q représente le poids du même volume de liquide à la même température.

Mais il a suffi, comme on le verra bientôt, de considérer l'équation

$$K'' = K_1 (1 + AT + A' T^2)$$

146. Cherchons maintenant les valeurs de A et A'.

Comme on a agi dans une atmosphère de 13 à 15°, il a été difficile d'avoir un écoulement à 0 degré. Pendant tout le cours de l'expérience, la température a été de quelques dixièmes de degré au-dessus de zéro: par conséquent, nous n'avons pu connaître directement la valeur de K_1; nous avons pris alors les trois équations suivantes :

$$(1) \quad K_1 = K_1 (1 + AT + A' T^2)$$
$$(2) \quad K''_2 = K_1 (1 + AT' + A' T'^2)$$
$$(3) \quad K''_3 = K_1 (1 + AT'' + A' T''^2)$$

K''_1, K''_2, K''_3 étant les valeurs de K'' correspondantes respectivement aux températures T, T' et T''. Éléminant K_1 en divisant (1) par (2) et (1) par (3), on a:

$$(4) \quad (K''_1 T' - K''_2 T) A + (K''_1 T'^2 - K''_2 T^2) A' = K''_2 - K''_1$$
$$(5) \quad (K''_1 T'' - K''_3 T) A + (K''_1 T''^2 - K''_3 T^2) A' = K''_3 - K''_1$$

équations qui vont nous servir à déterminer A et A'.

147. Afin d'embrasser l'intervalle de l'échelle thermométrique, que nous avons considéré dans les expériences relatives à chaque tube, on a fait $T = 5°$, $T' = 25°$, $T'' = 45°$, et les valeurs de K''_1, K''_2, K''_3 correspondantes, bien qu'elles eussent pu être fournies par un seul tube, ont été obtenues en prenant la moyenne entre les valeurs offertes par les quatre tubes, aux températures 5°, 25° et 45°; on a eu alors :

$$K''_1 = 2158; \quad K''_2 = 3640; \quad K''_3 = 5447.$$

Substituant ces valeurs de T, T′, T″; K''_1, K''_2, K''_3 dans les équations précédentes (4) et (5), il vient :

$$35750\,A + 1257750\,A' = 1482$$
$$69875\,A + 4233775\,A' = 3289.$$

D'où :

$$A = 0{,}0336793;\quad A' = 0{,}0002209936.$$

On a donc,

$$K'' = K_1(1 + 0{,}0336793\,T + 0{,}0002209936\,T^2).$$

148. Pour déterminer K_1, nous avons fait $T = 10°$, et, mettant à la place de K″, la valeur correspondante à cette température, la moyenne des valeurs de K″ à 10°, pour les quatre tubes, étant 2495,91, on a eu :

$$K_1 = \frac{2495{,}91}{1{,}358892} = 1836{,}724.$$

Ainsi K_1, qui varie avec la pesanteur, est égal à 1836,724, pour 9^m,808; intensité de la pesanteur à Paris.

D'où enfin :

$$K'' = 1836{,}724\,(1 + 0{,}0336793\,T + 0{,}0002209936\,T^2).$$

149. En remplaçant, dans $Q = K'' \cdot \frac{P.D^4}{L}$, (129), K″ par sa valeur, il viendra :

$$(1)\quad Q = 1836{,}724\,(1 + 0{,}0336793\,T + 0{,}0002209936\,T^2)\,\frac{P.D^4}{L}.$$

Pour l'équation du mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres, T représentant la température, P la pression exprimée en mercure à 10°, L et D la longueur du tube et

son diamètre à la même température, et Q le poids du liquide écoulé en 1″.

150. Si la pression, au lieu d'être donnée par une colonne de mercure, était déterminée par une même colonne d'eau à 10°, il faudrait remplacer K_1 (134) par $\frac{1836,724}{13,576981} = 135,282$. Et la formule précédente devient :

$$(2)\quad Q = 135,282\ (1 + 0,0336793\ T + 0,0002209936\ T^2)\ \frac{P\,D^4}{L}.$$

151. Cette équation, comme toute autre qu'on aurait pu obtenir en prenant un plus grand nombre de coefficients A, A′, A″, A‴, etc. (145), n'exprime pas *rigoureusement* la relation qui lie les produits aux températures; mais, les résultats qu'elle donne, différant peu de ceux offerts par l'expérience, nous avons dû l'adopter, puisqu'elle suffit aux conséquences que nous nous proposons d'en tirer par la suite.

152. Ainsi nous avons cherché, comme vérification, les produits donnés par la formule; et, les mettant en regard de ceux fournis par l'expérience, pour chacun des tubes précédents A, C, D′ et E, on a formé les tableaux suivants.

TUBE A.

Longueur	100mm,5
Diamètre moyen	0 ,141125
Pression	776 ,0 de mercure
Temps de l'écoulement	1″

TEMPÉRATURES.	PRODUITS obtenus d'après la formule.	PRODUITS donnés par l'expérience.
0°,6	5milli.,73955	5milli.,74376
5 ,0	6 ,60381	6 ,60962
10 .0	7 ,64435	7 ,64649
15 ,0	8 ,74705	8 ,74996
20 ,0	9 ,91191	9 ,91530
25 .0	11 ,13892	11 ,14584
30 ,1	12 ,45423	12 ,45631
35 ,1	13 ,80710	13 ,80695
40 ,1	15 ,22184	15 ,21866
45 ,0	16 ,66860	16 ,67396

TUBE C.

Longueur..... 100mm,325
Diamètre moyen..... 0 ,085
Pression..... 776 ,0 de mercure
Temps de l'écoulement..... 1″

TEMPÉRATURES.	PRODUITS obtenus d'après la formule.	PRODUITS donnés par l'expérience.
0°,5	0millig.,754133	0millig.,749428
5 ,0	0 ,870584	0 ,871355
6 ,0	0 ,897364	0 ,894921
10 ,0	1 ,007760	1 ,008119
15 ,2	1 ,159114	1 ,154982
20 ,0	1 ,306693	1 ,306394
25 ,1	1 ,471771	1 ,472780
30 ,1	1 ,638112	1 ,640220
35 ,1	1 ,820200	1 ,823982
40 ,1	2 ,006706	2 ,007247
45 ,1	2 ,201406	2 ,200274

TUBE D'.

Longueur..... 50mm,225
Diamètre moyen..... 0 ,0440406
Pression..... 776 ,0 de mercure
Temps de l'écoulement..... 1″

TEMPÉRATURES.	PRODUITS obtenus d'après la formule.	PRODUITS donnés par l'expérience.
5°,0	0millig.,125324	0millig.,125388
10 ,0	0 ,145072	0 ,145031
15 ,0	0 ,165998	0 ,165468
20 ,0	0 ,188105	0 ,188328
25 ,0	0 ,211391	0 ,211371
30 ,0	0 ,235856	0 ,236241
35 ,0	0 ,261501	0 ,262411
40 ,0	0 ,288326	0 ,289335
45 ,1	0 ,316903	0 ,316466

TUBE E.

Longueur..... 23mm,1
Diamètre moyen..... 0 ,02938
Pression..... 776 ,0 de mercure
Temps de l'écoulement..... 1″

TEMPÉRATURES.	PRODUITS obtenus d'après la formule.	PRODUITS donnés par l'expérience.
0°,5	0milli.,0467495	0milli.,0463361
5 ,0	0 ,0539684	0 ,0540403
10 ,0	0 ,0624720	0 ,0624560
15 ,0	0 ,0714836	0 ,0712927
20 ,0	0 ,0810033	0 ,0808931
25 ,1	0 ,0912365	0 ,0910297
30 ,0	0 ,1015664	0 ,1014831
35 ,0	0 ,1126100	0 ,1128848
40 ,1	0 ,1243977	0 ,1243848
45 ,0	0 ,1362210	0 ,1363957

En comparant les produits donnés par la formule à ceux que fournit l'expérience dans chacun de ces tableaux, on voit qu'ils ne diffèrent entre eux que de quelques millièmes de milligramme.

153. Mais, dans la comparaison que nous venons de faire, il s'agit de tubes qui ont concouru à l'établissement de la formule; si nous prenons le tube D (57), avec lequel nous avons fait quatre expériences aux températures 0°,6; 10°; 15°,2 et 20°, et que nous comparions les produits obtenus d'après cette formule, à ceux donnés par l'expérience, les résultats sont aussi satisfaisants.

TUBE D.

Longueur..... 100mm,3
Diamètre moyen..... 0 ,044415
Pression..... 776 ,0 de mercure
Temps de l'écoulement..... 1″

TEMPÉRATURES.	PRODUITS obtenus par la formule.	PRODUITS donnés par l'expérience.
0°,6	0milli.,0564216	0milli.,0562532
10 ,0	0 ,0751464	0 ,0750540
15 ,2	0 ,0864326	0 ,0864585
20 ,0	0 ,0974373	0 ,0976674

154. Le tube G″, du vingt-troisième tableau (71), qui, comme le tube D, est étranger à la détermination de la formule, mais dont le diamètre est beaucoup plus considérable que ceux des tubes précédents, offre aussi des produits qui s'éloignent peu de ceux que donne la formule que nous considérons.

Comme les pressions sont déterminées par l'eau distillée, on a pris l'équation qui s'y rapporte (150).

TUBE G″.

Longueur..... 400^{mm},00
Diamètre moyen..... 0 ,652176
Temps de l'écoulement..... 1″

TEMPÉRATURES.	PRESSIONS en eau distillée à 10°.	PRODUITS obtenus d'après la formule.	PRODUITS donnés par l'expérience.
19°,25	268^{mm},858	28$^{millig.}$,461	29$^{millig.}$,415
19 ,50	1018 ,227	108 ,449	113 ,298
19 ,50	2011 ,511	214 ,242	219 ,516

La concordance des résultats des 3^{e} et 4^{e} colonnes, pour ce tube d'un aussi grand diamètre, conduirait à examiner si des tubes de calibre beaucoup plus fort se prêteraient encore à l'application de cette formule.

155. Nous remarquerons, comme on le savait déjà, que les produits diminuent avec l'abaissement de la température; mais, si la densité de l'eau distillée peut être prise en considération, touchant la quantité de liquide écoulé, elle n'y a pas une part exclusive, puisque cette densité, diminuant de plus en plus depuis 4° jusqu'à 45°, elle diminue aussi depuis 4° jusqu'à 0; et cependant, ainsi qu'on vient de le voir, à 0°,5 la quantité de liquide écoulé est plus petite qu'à 5°, quoique, pour cette dernière température, la densité soit plus grande qu'à 0°,5.

156. On doit à M. Girard des formules d'écoulement en fonction de la température; mais elles sont particulières au *diamètre* du tube sur lequel on opère : ainsi, pour un tube d'un diamètre donné, il faut connaître *a priori* un certain nombre d'observations spéciales faites avec le tube à diverses températures, pour obtenir la formule qui s'y rapporte, et qui doit fournir les quantités de liquide écoulé à toute autre température.

ÉCOULEMENT DE L'ALCOOL,

UNI A DIVERSES PROPORTIONS D'EAU DISTILLÉE,

CONSIDÉRÉ DANS LES TUBES DE TRÈS-PETITS DIAMÈTRES.

Il résulte des expériences de M. Girard, faites sur un tube de verre de 939^{mm} de longueur et de $1^{mm},767$ de diamètre, que l'alcool coule environ trois fois moins vite que l'eau distillée, et que les mélanges d'alcool et d'eau, dans les rapports de 1 : 2 et de 1 : 3 en volume, donnent un écoulement plus vite que l'alcool; la vitesse est d'autant plus grande, que la quantité d'eau ajoutée à l'alcool est plus considérable.

Les résultats des expériences que nous avons faites, diffèrent, comme on va le voir, de ceux qui viennent d'être énoncés.

L'alcool dont nous avons fait usage est presque anhydre; sa densité est de 0,8001 à 10° c. nous avons ajouté à cet alcool diverses proportions d'eau en poids.

Nous avons d'abord cherché le temps de l'écoulement d'un volume constant d'eau distillée, à une température et à une pression déterminées, en nous servant de l'appareil décrit dans nos *Recherches sur l'écoulement des liquides à travers les tubes de très-petits diamètres*. La quantité de liquide écoulé est de 13^{c} cubes à la température de 10° c. et la pression de 140^{mm} de mercure; le tube de 245^{mm} de longueur est légèrement ovalaire, il a pour diamètres $\begin{cases} D = 0^{mm},4 \\ d = 0\ ,3 \end{cases}$ environ.

Le temps de l'écoulement des 13^{cc} d'eau distillée, est de 523 secondes.

On a remplacé l'eau distillée par l'alcool pur, et ensuite, à 73,512 parties de cet alcool, on a ajouté diverses parties d'eau; en opérant à la même température 10° c. et à la même pression 140^{mm} de mercure, on a obtenu les résultats consignés dans le tableau suivant. La première colonne indique les numéros des expériences; la seconde, les quantités d'eau distillée en poids, ajoutées aux 73,512 parties d'alcool pur; la troisième, les densités des divers mélanges correspondants; la quatrième, les temps de l'écoulement d'un même volume de ces mélanges; la cinquième contient l'indication des hauteurs de ces divers liquides, soulevés par l'action capillaire dans un tube de 0^{mm},36 de diamètre. L'eau distillée s'élevait dans ce même tube à la hauteur de 80^{mm},65.

NUMÉROS des expériences.	QUANTITÉS D'EAU ajoutées à 73,512 d'alcool pur en poids.	DENSITÉS à 10° c. des mélanges.	TEMPS de l'écoulement d'un même volume des mélanges.	CAPILLARITÉ des mélanges.
1	0	0,8001	682″	32^{mm},20
2	26,487	0,8557	1158	33 ,60
3	36,487	0,8793	1336	34 ,60
4	76,487	0,9293	1731	35 ,45
5	86,487	0,9311	1732	36 ,35
6	106,487	0,9349	1726	//
7	126,487	0,9400	1723	//
8	226,487	0,9606	1444	//
9	276,487	0,9627	1326	43 ,35
10	359,487	0,9734	1227	//
11	676,487	0,9798	841	54 ,85
12	1026,487	0,9820	760	58 ,05
13	1276,487	0,9893	694	61 ,30

L'alcool pur a exigé pour son écoulement 682″, et l'eau distillée, dans les mêmes circonstances, 523″.

On voit, en outre, que, jusqu'à la quatrième ou cinquième expérience, en ajoutant à l'alcool des quantités d'eau de plus en plus grandes, l'écoulement, au lieu d'être de plus en plus vite, s'effectue avec une lenteur qui augmente de plus en plus; et ce n'est qu'à partir de la cinquième expérience et peut-être de la sixième, que les nouvelles proportions d'eau ajoutées à l'alcool, donnent un écoulement de plus en plus accéléré, quoiqu'il reste toujours moins vite que celui de l'eau distillée.

On pourrait faire coïncider les expériences de M. Girard avec quelques-unes de celles que nous venons de rapporter, en remarquant que l'alcool employé par cet expérimentateur n'était pas anhydre puisqu'il marquait 30° de l'aréomètre, et qu'il a ajouté à cet alcool, déjà étendu d'eau, dans les expériences suivantes, deux et trois fois son volume d'eau, et par conséquent plus du double et du triple de son poids d'eau : on voit donc que les expériences qui suivent la cinquième de notre tableau ne sont pas opposées à celles qu'a faites cet habile physicien sur des tubes de plus grand diamètre que les nôtres.

On peut, pour comprendre d'un seul coup d'œil la marche des phénomènes d'écoulement que nous venons d'exposer, construire deux axes rectangulaires AY et AX (fig. 10), prendre pour abscisses les quantités d'eau successivement ajoutées à l'alcool, et pour ordonnées correspondantes, les temps exigés par l'écoulement des mélanges respectifs d'alcool et d'eau : on aura ainsi la courbe BCDEFGHIKLO....., qui s'approche de plus en plus de la droite MN menée parallèlement à l'axe des X, et à une distance de cet axe d'une quantité égale au temps qu'exige l'écoulement de l'eau distillée, tout étant égal d'ailleurs; la courbe a alors pour asymptote rectiligne la droite MN.

Des expériences précédentes il résulte ce fait remarquable, qu'une même quantité d'alcool pur, combinée avec deux proportions différentes d'eau distillée, donne deux liquides qui coulent

également vite; ainsi, si on mène par le point B une parallèle BO à l'axe des X, rencontrant la courbe en O, la grandeur BO représentera la quantité d'eau qui, ajoutée à l'alcool pur, donnera un mélange dont la vitesse d'écoulement sera tout à fait la même que celle de l'alcool employé; toute autre parallèle à l'axe des X, telle que CP, donnerait lieu à une conséquence analogue; les quantités différentes d'eau, ajoutées à l'alcool, et qui offriraient deux mélanges doués de la même vitesse d'écoulement, seraient les abscisses des points C et P.

Comme la densité des mélanges d'alcool et d'eau augmente avec la quantité d'eau ajoutée, on peut dire que, si la densité du liquide qui s'écoule est pour quelque chose dans les phénomènes divers qu'on observe, cette densité n'y a pas une part exclusive. Ce résultat coïncide d'ailleurs avec celui que nous a donné l'écoulement de l'eau distillée, considéré à diverses températures; à 4°, maximum de la densité de l'eau, l'écoulement n'offre rien de particulier.

On pourrait faire une remarque analogue au sujet de la capillarité offerte par le liquide qui s'écoule; ainsi la capillarité des mélanges employés augmente avec la quantité d'eau ajoutée à l'alcool pur.

Le minimum de vitesse des mélanges d'alcool et d'eau, est dans le voisinage du point E; il correspond à 73,512 d'alcool pur et 76,487 parties d'eau en poids. Ce minimum ne coïncide pas avec le maximum de l'indice de réfraction des divers mélanges d'alcool et d'eau, établi par M. Deville; le mélange qui donne le maximum pour l'indice de réfraction, résulte de 80 d'alcool pur et de 20 d'eau; mais notre minimum de vitesse s'approche beaucoup du maximum de contraction de l'alcool et de l'eau, qui, suivant Rudberg, est donné par 55 d'alcool pour 100 en volume, ou bien environ par 43,67 d'alcool et 48,77 d'eau en poids.

Cette dernière observation peut jeter quelque lumière sur l'état et les actions réciproques des molécules fluides en mouvement, dans l'écoulement des liquides à travers les tubes de très-petits diamètres.

EXPLICATION DE LA PLANCHE.

Figure 1re. Élévation de l'appareil vude face.

M, vase de verre ou *fuseau*, d'où naît un tube *b''*, auquel est soudée l'*ampoule ce*, surmontant un tube supplémentaire, qui se termine par le *tube d*, de très-petit diamètre. La garniture en cuivre *a'* du fuseau M, offre un écrou propre à recevoir la vis du tuyau en cuivre *a*.

CDFE, cylindre de verre ou *récipient* rempli d'eau; la température est indiquée par le thermomètre T, dont la boule est au niveau du tube *d* en expérience.

GHIK, baquet rempli d'eau, recevant le cylindre de verre CDFE; le thermomètre T' donne la température de l'eau du baquet.

Le tuyau *a* est fixé à la traverse *rt* du châssis en hêtre *rtvs*, dont les montants *rs* et *tv* sont fixés solidement au sol.

r' s', crémaillères recevant des tasseaux pour soutenir la tablette *q*, qui supporte le baquet GHIK.

xy, règles en bois, taillées sur leur épaisseur en biseau à leur partie externe; sur l'une d'elles est appliquée une règle en cuivre verticale divisée en millimètres (voir la fig. 2).

o, *microscope-chercheur*, se mouvant verticalement sur les deux règles précédentes, et sur son support *m*, à l'aide d'une vis de rappel : en *n*, est un vernier dont les divisions correspondent à celles de la règle en cuivre citée plus haut. La partie moyenne du montant *rs* est évidée dans presque toute sa hauteur, pour donner passage au tube du microscope-chercheur, qu'on met en rapport avec les *indices c* et *e* de l'ampoule, et le niveau de l'eau du *récipient* CDFE.

p, réservoir d'air : c'est un cylindre en cuivre de forte épaisseur, maintenu au sol par deux montants en fer; sa capacité est d'environ 60 litres; il communique, à l'aide des tuyaux *le''*, *b'b*, et du robinet R, avec la cavité du *fuseau* M.

h, pompe foulante, dont le cylindre communique avec le réservoir

d'air *p*, à l'aide des tuyaux *gc'*, *e'' l*, et du robinet R'. — XY, cuvette en cuivre supportée par des montants en fer fixés solidement au sol : cette cuvette, remplie d'eau, s'oppose au développement de la chaleur produite par le frottement du piston contre le corps de pompe, dans le cas d'une haute pression.

Du renflement L, qui établit une communication, entre le réservoir d'air *p*, le fuseau M et la pompe foulante *h*, part le tuyau *d' d'' f*, qui met l'appareil en rapport avec un manomètre, soit à mercure *i' i'*, soit à eau *i i*, fixes de position; la partie inférieure *d'' f*, en plomb, permet d'aboucher le tube *d' d'' f* tantôt à l'un, tantôt à l'autre manomètre : chaque manomètre porte une échelle en cuivre verticale divisée en millimètres, *dont le zéro est placé au milieu de la hauteur*, et sur laquelle se meuvent deux curseurs α et 6, qui offrent chacun un *vernier*.

u' v', éprouvette à pied, remplie d'eau; le thermomètre *t'*, qu'elle reçoit, indique la température des colonnes liquides des manomètres.

Figure 2. L'appareil précédent, vu de côté, en regardant la face externe du montant *rs*, (figure 1re); on a supprimé les deux manomètres.

Figure 3. Coupe d'une ampoule CEB (grandeur naturelle), surmontant le tube supplémentaire EFG qui se termine par le renflement intérieur G, auquel succède le *tube horizontal* D, de très-petit diamètre.

Figure 4. A, support évidé, qui, fixé solidement à une table, reçoit la garniture en cuivre du fuseau M. — C, corps d'une pompe aspirante; — B, flacon contenant l'eau distillée, dans laquelle plonge l'extrémité du tube *d*, par lequel s'introduit l'eau du flacon, pour remplir l'ampoule jusqu'à l'indice *c*.

Figure 5. AB, grand tube de verre de 25 millimètres de diamètre environ, terminé par un tube D de petit diamètre, dans lequel l'écoulement a lieu par le poids seul de l'eau contenue dans le tube AB. Ce tube, à l'aide de la garniture en cuivre A, se fixe à la vis *a* (figure 1re), pour obtenir, par le microscope-chercheur, la hauteur de la colonne de liquide qui donne lieu à la pression, indépendamment de celle du réservoir d'air, qui alors communique librement avec l'atmosphère.

Figure 6. Oculaire du microscope horizontal, pour mesurer les diamètres des tubes à l'aide de la *camera lucida* (pag. 458, (33)).

Figure 7. Raccord (demi-grandeur) qui unit le *fuseau* à la pièce *a*, (figure 1re), dans le cas où le tube en expérience a une longueur qui s'oppose à la rotation du fuseau M, pour le visser au tube *a*.

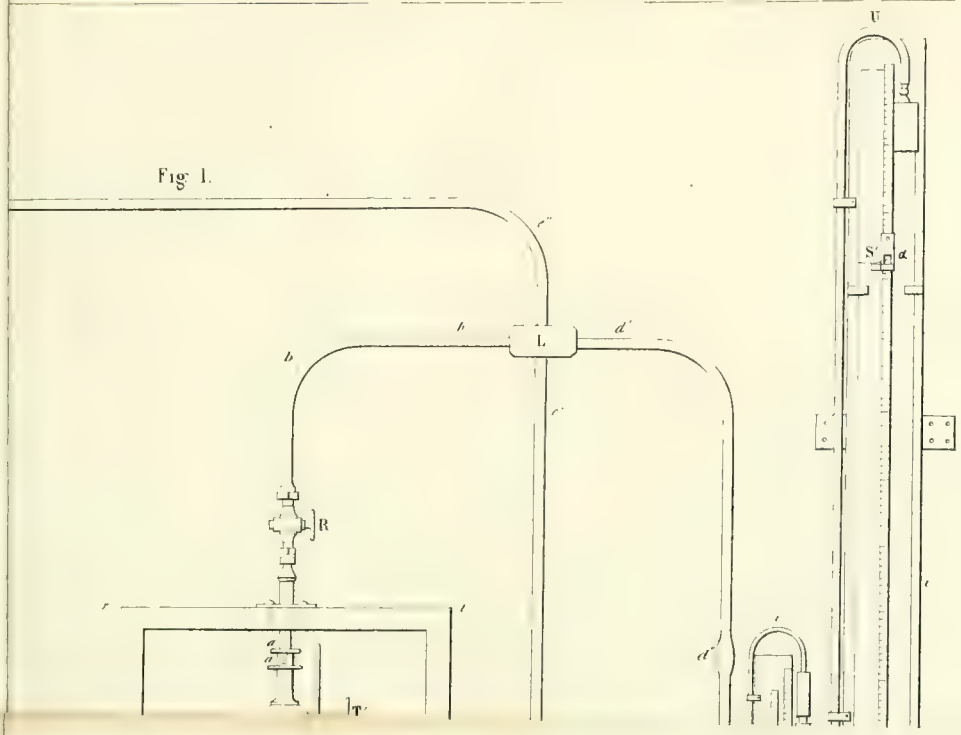
Figure 8. Forme du fuseau (demi-grandeur) qu'on a employé pour les expériences faites avec les tubes II, I, K (pag. 490, (73)), sans le secours de l'ampoule; GH indique le niveau du liquide.

Figure 9. L'un des curseurs des manomètres avec ses *verniers n* (demi-grandeur).

Les figures 1, 2, 4 et 5 sont réduites au dixième de leur grandeur naturelle.

Figure 10. BCDEFGHIKLO, courbe relative à l'écoulement des mélanges d'alcool et d'eau. — Les distances AC′, AD′, AE′, AF′, etc. comptées sur l'axe des abscisses AX, représentent les quantités d'eau distillée ajoutées à l'alcool anhydre, et les ordonnées correspondantes CC′, DD′, EE′, FF′, etc. les temps exigés pour l'écoulement d'un même volume des mélanges obtenus. — AB est l'ordonnée correspondante au temps de l'écoulement de l'alcool anhydre, et AM celle pour l'eau distillée.

Fig. 1.



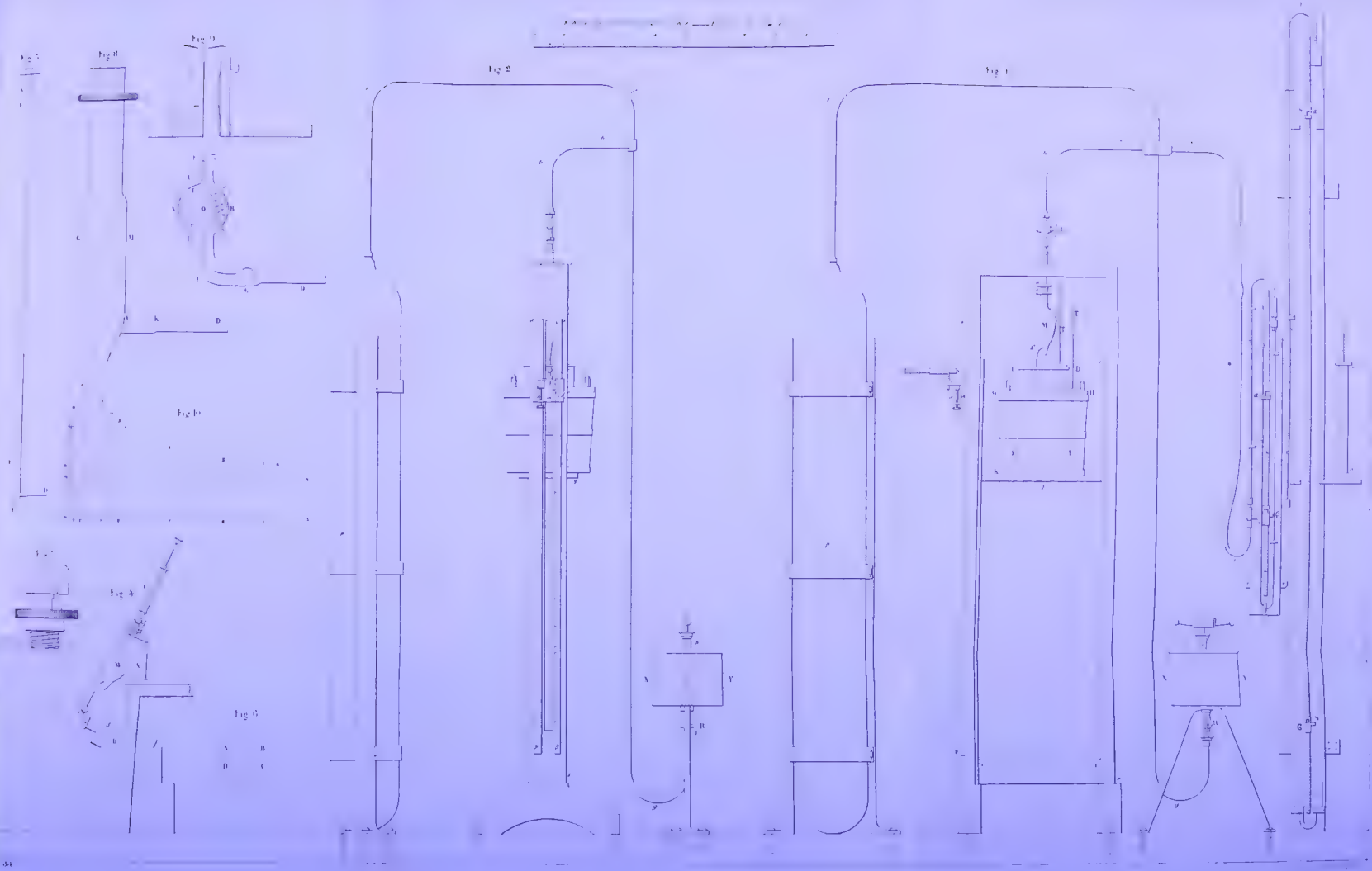
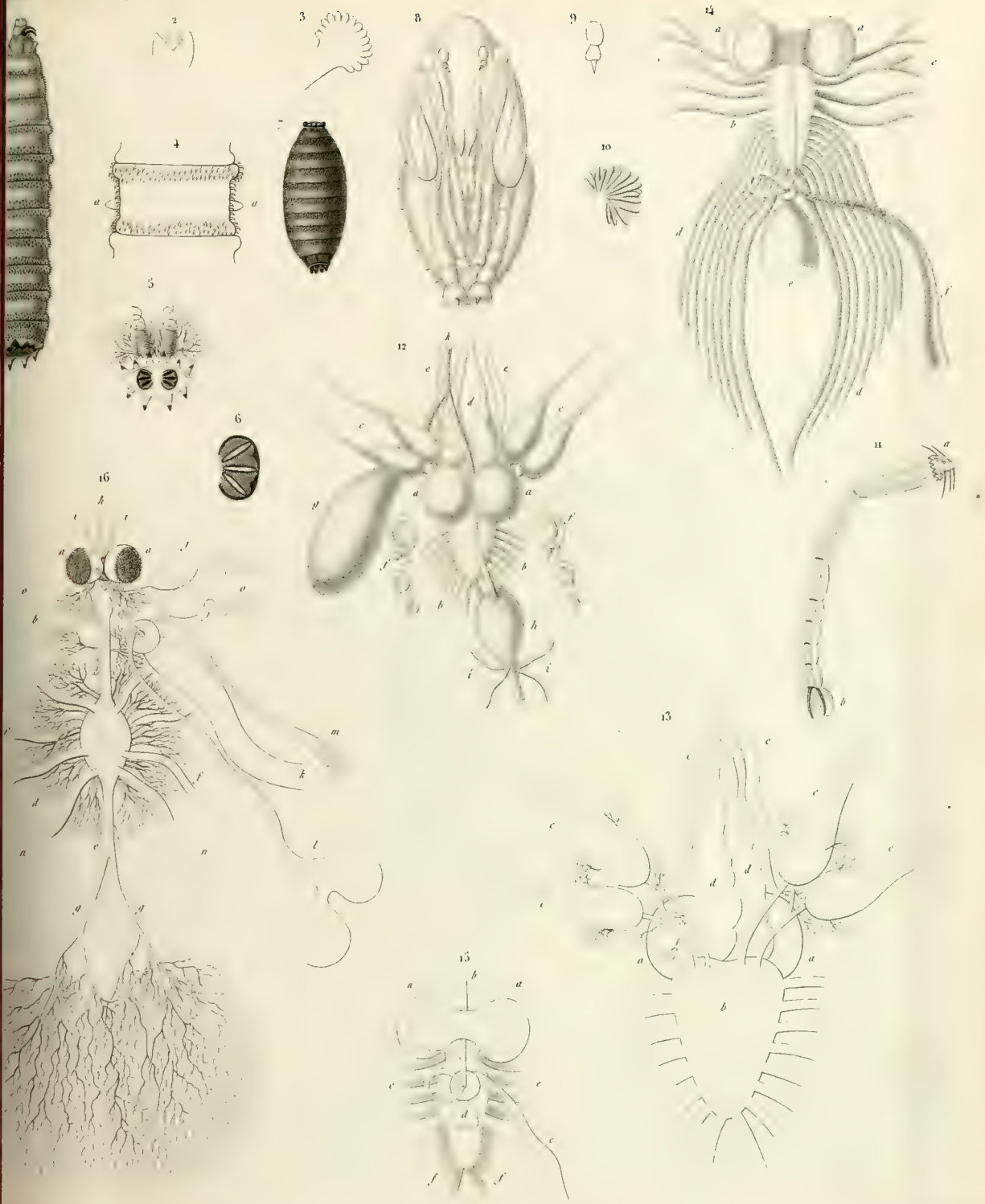
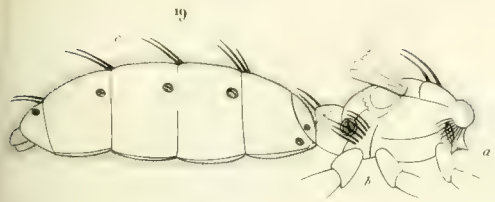
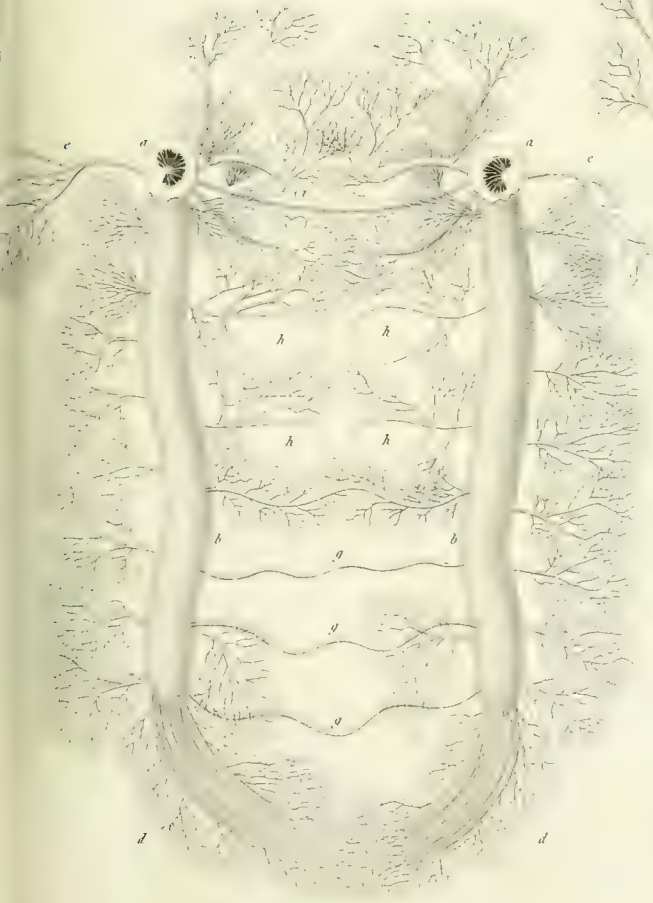


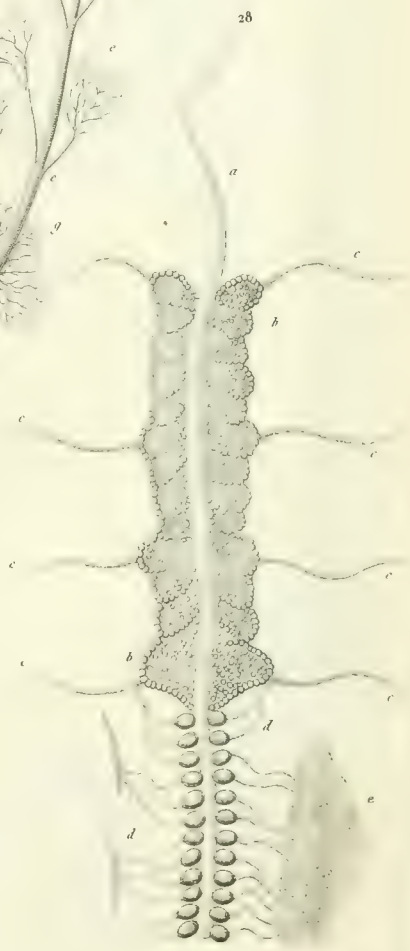
Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 6
Fig 7
Fig 8
Fig 9
Fig 10



ANATOMIE DE LA MOUCHE CARNASSIÈRE (Sarcophaga hœmoroïdalis)

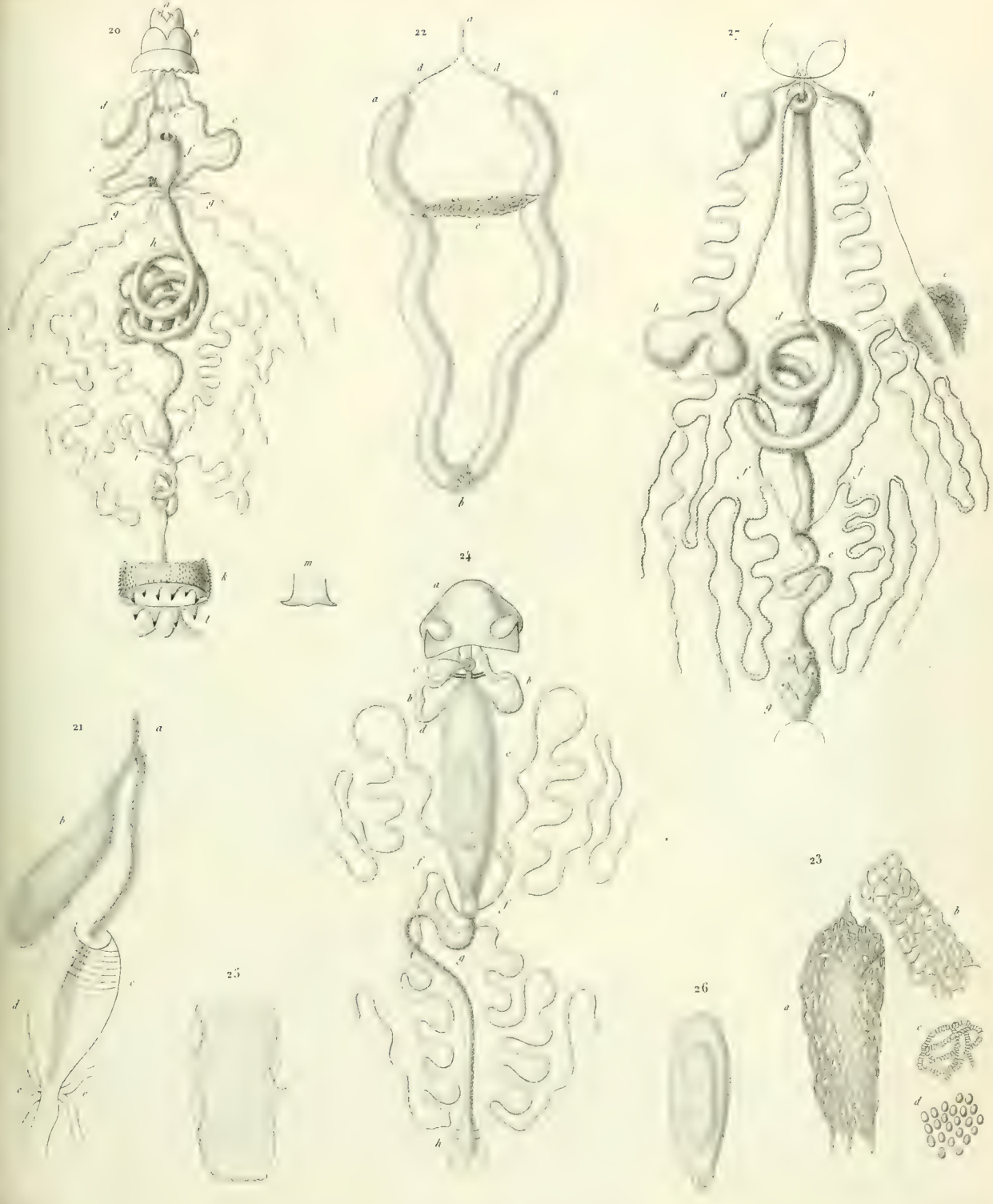






E. Rémont imp.

ANATOMIE DE LA MOUCHE CARNASSIÈRE (Sarcophaga hœmoroïdalis)



ANATOMIE DE LA MOUCHE CARNASSIÈRE (Sarcophaga hæmoroïdalis)

Fig. 1

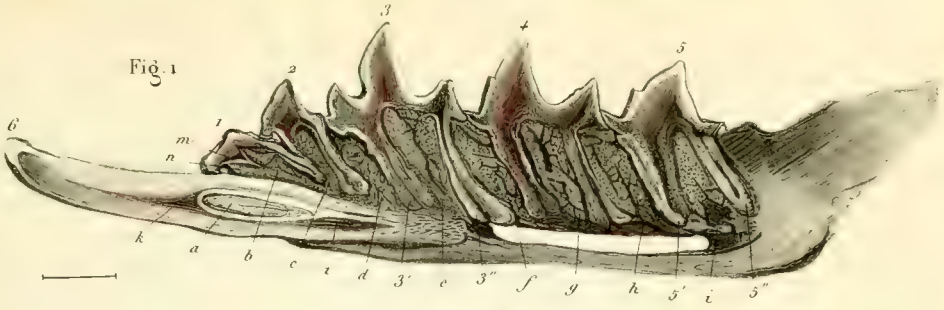


Fig. 2

Fig. 4.

Fig. 3.

Lackerbauer del

Burramée sc

DENTS DES MUSARAIGNES, &c.

Fig 2

Fig. 3'

Fig. 3.

Fig 2'

Fig. 1.

Tscherbuer del.

Borromee sc.

DENTS DES MUSARAIGNES, &.

Fig. 4

Fig. 4'

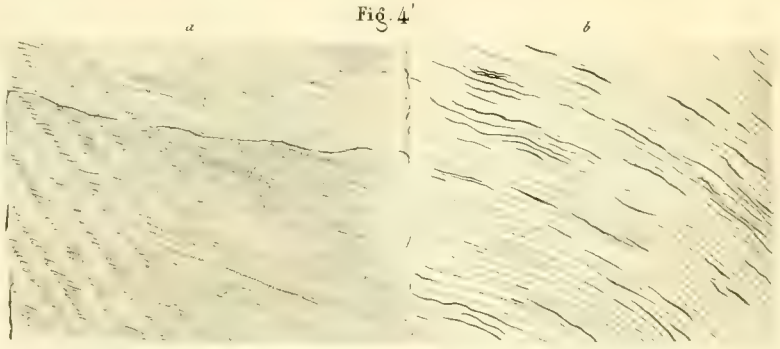


Fig. 5'

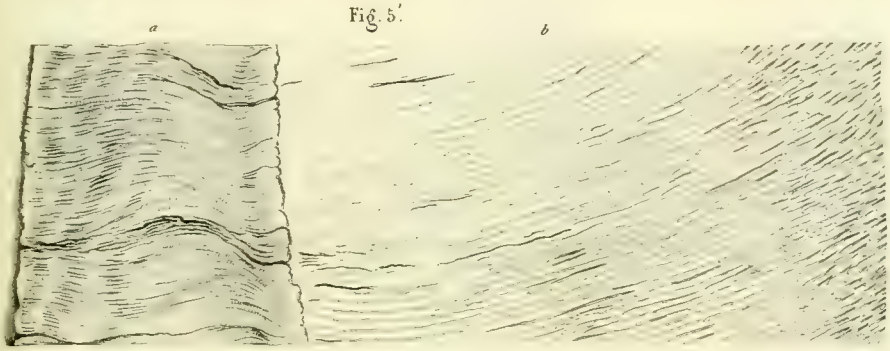


Fig. 5.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 2'

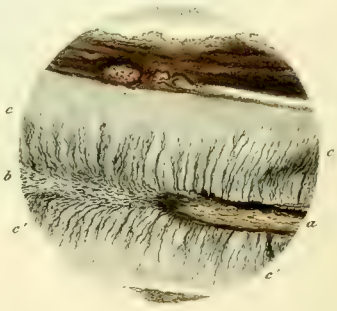
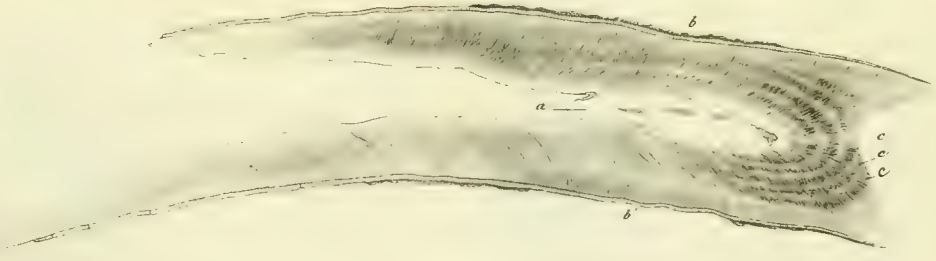


Fig. 3.



Lacherbauer del. Berromée sc

DENTS D'HOMME ET DE MAMMIFÈRES.

Fig. 6.

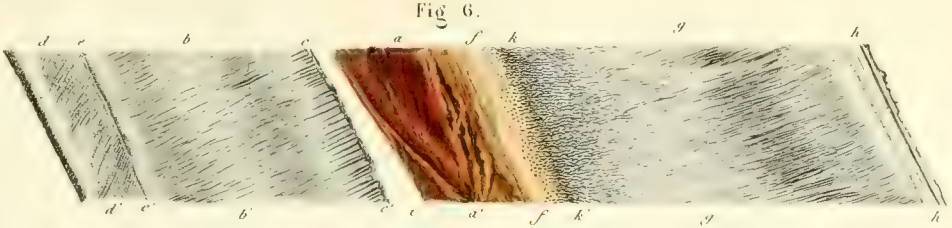


Fig. 8.

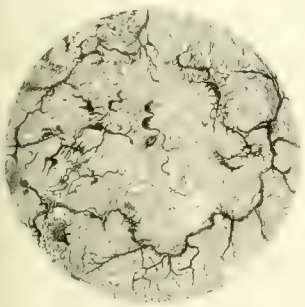


Fig. 4.

Fig. 7.

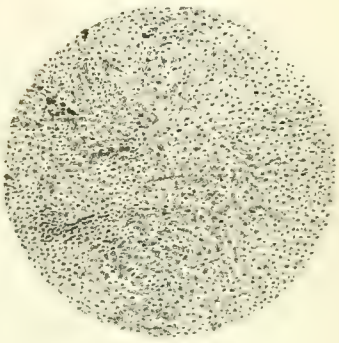


Fig. 5.

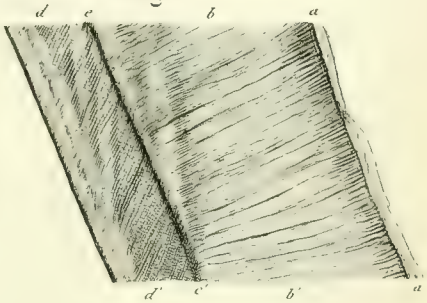


Fig. 3.

Fig. 1

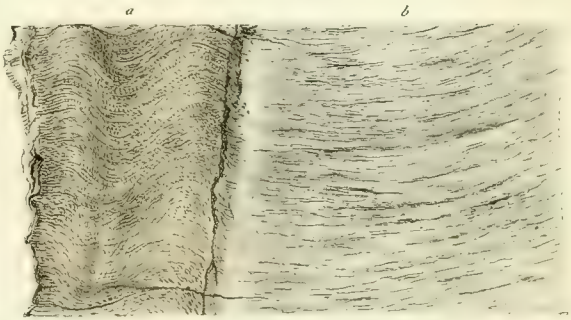
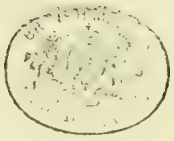


Fig. 2.

Fig. 2'.

Lackerbauer del. Berronier sc.

DENTS DE MAMMIFÈRES.



ÉTUDES

ANATOMIQUES ET PHYSIOLOGIQUES

SUR

UNE MOUCHE,

DANS LE BUT D'ÉCLAIRER L'HISTOIRE DES MÉTAMORPHOSES
ET DE LA PRÉTENDUE CIRCULATION DES INSECTES;

PAR M. LÉON DUFOUR,

DOCTEUR MÉDECIN, CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, ETC.

Neque quicquam habet adeo exiguum natura, quod majorum et præstantiorum rerum sit speculum.

PLUT. *De anim. comp.*

D'après ce titre, deux questions d'une haute importance partagent naturellement mon sujet en deux divisions principales, celle des métamorphoses et celle de la circulation des insectes.

La mouche qui a servi à mes nombreuses vivisections est une des espèces les plus grandes, les plus connues, les plus répandues dans les diverses contrées de l'Europe. Ce n'est pas sans dessein que je l'ai choisie de préférence à tant d'autres; j'ai voulu, dans mon propre intérêt comme surtout dans celui des véritables progrès de la science, mettre les savants de tous les pays à même de sanctionner ou de contrôler mes observations. Cette mouche est la *grande-mouche à extrémité du ventre rougeâtre* de Geoffroi, la *mouche carnassière* d'Olivier, la *grande-mouche vivipare* de de Géer, enfin la *sarcophaga hæmorrhoidalis* des diptérologistes modernes. C'est par centaines que j'ai disséqué, à différentes époques de leur développement, les trois formes de cet insecte.

Loin de moi la prétention aux idées transcendantes de quelques zoonomistes modernes, idées qui aujourd'hui sont à la mode et demain passeront comme elle. On respire mal à l'aise dans ces régions élevées, où l'esprit, se raréfiant, se laisse facilement entraîner au delà des limites du positif. Des faits, des faits consciencieusement constatés, sévèrement rapprochés, sobriété extrême dans les explications et défiance dans l'établissement de principes trop généraux, voilà l'esprit qui a dirigé nos recherches. Il ne nous est pas donné de tout approfondir, de tout expliquer. En s'abandonnant aux exigences d'une curiosité ardente, on devient trop souvent ingénieux à se créer des difficultés par ambition de les vaincre. Pourquoi ne pas reconnaître des bornes à notre raison, et surtout à nos raisonnements? Y a-t-il donc si grande lésion de l'amour-propre à reculer devant des explications qui ne sont pas suffisamment préparées par des faits établis avec sévérité? Je sais bien que la haute intelligence de l'homme est appelée à sonder et même à ravir les secrets de la nature; mais cette noble prétention n'est pas le privilége exclusif, l'apanage d'une génération. Nos devanciers nous ont préparé des matériaux, et nous devons les élaborer pour nos successeurs. C'est ainsi que s'élève solidement le palais de la science; c'est ainsi que se fondent les illustrations respectives des architectes et des manœuvres qui y ont coopéré.

PREMIÈRE DIVISION.

MÉTAMORPHOSES.

D'un œuf éclos dans le corps même d'une mouche naît une larve, un ver apode, qui vit obscurément dans l'ordure. Ce ver, après avoir atteint le terme de son développement comme larve, cesse de prendre de la nourriture, se contracte, rentre en lui-même, et se forme de sa propre peau une enveloppe inerte, une coque appelée *chrysalide* ou *pupe*. Celle-ci renferme une substance

qui, par une succession de créations, s'improvise en une nymphe immobile et pulpeuse, offrant à l'extérieur l'image emmaillottée de la mouche, dont elle va, au temps indiqué, prendre la forme et le genre de vie.

Cette triple existence, si phénoménale et si disparate, d'une *larve* armée de mandibules, quoique dépourvue de tête, apode, rampant dans le charnier infect qu'elle dévore, croissant avec rapidité, s'ensevelissant dans sa propre peau, mais ne se reproduisant pas; d'une *nymphe* immobile, insensible, fidèle image de la mort et réceptacle de la vie; d'une *mouche,* insecte ailé et muni de longues pattes, courant, voltigeant sans cesse, puisant, au moyen d'un suçoir et avec sobriété, un aliment léger et liquide, ne croissant pas et se reproduisant par voie de génération, cette triple existence, dis-je, ne constitue qu'un seul et même individu, dont la vie collective résume ainsi une trinité réelle.

Cette mystérieuse métamorphose, qui est, sans contredit, un des phénomènes les plus étonnants de la nature, avait déjà été entrevue par Aristote, mieux signalée par Gessner, Mouffet, Goëdaert; mais ce sont Swammerdam, Réaumur, de Géer, Lyonet et Bonnet qui nous l'ont plus positivement révélée, et qui en ont établi les diverses phases. Toutefois, ces vénérables scrutateurs de la nature se sont pour la plupart exclusivement bornés aux insectes de l'ordre des lépidoptères. La métamorphose d'une chenille en papillon, en même temps qu'elle constitue un fait très-saillant, est aussi d'une grande facilité à être constatée par tous les observateurs, et ce fait est devenu le document obligé de tous les traités sur l'histoire des insectes.

Swammerdam[1] ne s'est point arrêté aux transformations extérieures, il nous a aussi transmis des notions intéressantes sur

[1] Swammerdam (*Collect. acad.* t. V, p. 439) a décrit et figuré avec un soin particulier les métamorphoses, tant externes qu'internes, de sa *mouche asile,* qui est le *stratiomys chamæleon* Latr. diptère qui appartient à une famille plus élevée dans l'échelle organique que la *sarcophage.* Il a donné à la suite l'histoire, moins détaillée et surtout moins iconographiée, du ver et de la *mouche du fromage* ou *piophila casei* Macq. comprise dans la même famille des *muscides* que la sarcophage.

celles des organes splanchniques, même dans plusieurs diptères, et avec des détails circonstanciés qui se rapprochent de ceux que j'exposerai bientôt. M. Newport a aussi examiné comparativement, dans ces derniers temps, l'organisation intérieure des trois états du *sphinx ligustri*[1]. Enfin M. Pictet, dans son magnifique travail monographique des phryganes[2], a exposé l'anatomie comparée des trois formes de ces névroptères. Ce sont là, si je ne me trompe, les seuls documents authentiques sur l'anatomie viscérale des métamorphoses. Ils ont à mes yeux une grande valeur, et comme points de départ et comme termes de comparaison, pour l'étude de l'organisation de la sarcophage.

Après plus d'un siècle de progrès, il m'a paru intéressant de rapprocher des beaux travaux de Swammerdam des recherches analogues dirigées sur des insectes qui appartinssent aussi à l'ordre des diptères. Une mouche de la famille si populeuse des muscides, subissant comme le lépidoptère une métamorphose complète, c'est-à-dire passant par les trois états de larve, de chrysalide et d'insecte ailé, m'a paru devoir offrir un parallèle profitable à la science. J'ai poursuivi, le scalpel à la main, les transformations viscérales des trois morphoses de cette mouche; j'ai épié avec persévérance les créations nouvelles par les matériaux des créations détruites, les substitutions d'organes; enfin, j'ai multiplié, avec une patience dès longtemps éprouvée, les autopsies les plus délicates pour surprendre quelques-uns des phénomènes de l'organogénie.

Dans cette exposition comparative de trois organismes dissemblables, j'examinerai, dans des chapitres séparés, d'abord les conformations extérieures, puis l'organisation intérieure ou les principaux appareils de la vie. Pour dérouler cette triple anatomie, je m'étais d'abord décidé à partir de la mouche, comme

[1] Je n'ai point à ma disposition l'ouvrage original de M. Newport, faisant partie des Transactions philosophiques d'Angleterre, 1832-1834; je n'en connais que ce que M. Lacordaire a inséré dans sa savante Introduction à l'entomologie (Paris, 1834).

[2] *Recherches pour servir à l'histoire et à l'anatomie des phryganides;* par F. J. Pictet (Genève, 1834).

du type le plus parfait pour descendre à la larve et à la nymphe; mais il m'a paru préférable, en procédant du simple au composé, d'observer la marche progressive des modifications ou des créations organiques, et de décrire d'abord la larve, puis la nymphe, et enfin l'insecte ailé.

CHAPITRE PREMIER.

CONFORMATIONS EXTÉRIEURES.

ARTICLE PREMIER.

Larve.

La larve, fille de la mouche, ne ressemble en rien à sa mère; elle n'a ni tête, ni tronc, ni abdomen, ni membres articulés. En se contractant elle prend une forme raccourcie ovoïde; mais si elle marche, elle ressemble à un ver agile et rampant, qui acquiert jusqu'à sept lignes de longueur. Son corps est allongé, blanchâtre, formé de douze segments, atténué en avant, plus large et tronqué à son bout postérieur, qui offre une excavation particulière. Ses téguments, souples, incolores et musculo-membraneux, sont glabres et paraissent lisses au premier coup d'œil; mais le microscope y découvre, excepté dans le milieu des segments, une surface chagrinée par des points saillants, des aspérités spinuleuses, qui ne doivent pas être étrangères à la locomotion. On reconnaît sur les côtés un peu inférieurs du corps huit paires de mamelons ambulatoires ou de pseudopodes, suivant Latreille, qui sont communs à deux segments à la fois.

L'appareil buccal consiste en une lèvre éminemment rétractile, plane, bifide, ayant au côté interne deux palpes biarticulés fort courts et une paire de mandibules cornées, noires, qui, loin d'être opposées pour former la pince, sont parallèles, superposées, rétractiles, courbées en crochets arqués, simples et propres, soit à diviser, à déchirer l'aliment, soit à se cramponner

pour favoriser la locomotion. Entre la lèvre et le premier segment du corps j'ai constaté, dans des circonstances opportunes de protraction, l'existence d'une pièce pareillement rétractile et à deux lobes arrondis : elle semble un vestige de labre ou de chaperon.

Le bout postérieur de la larve a une structure curieuse. L'excavation dont j'ai parlé, et à laquelle je donnerai le nom de *caverne stigmatique*, parce qu'elle renferme les stigmates de cette région, a le limbe de son ouverture divisé en dix lobes dentiformes, dont six appartiennent au bord supérieur et quatre au bord inférieur. Ces lobes, rembrunis à leur pointe, qui a un peu plus de consistance, peuvent, au gré de l'animal, fermer hermétiquement la caverne par leur engrenage réciproque, ou la laisser béante par leur rétraction. Au-dessous de la troncature, on aperçoit, dans quelques conditions favorables, comme lorsque la larve est dans l'eau et en souffrance, un panneau trilobé, un tablier qui déborde parfois le bout du corps et qui est destiné à séparer l'anus de la caverne stigmatique. Il n'est pas rare que le lobe intermédiaire de ce tablier s'efface.

Les stigmates devant être l'objet d'une description particulière au chapitre de l'appareil respiratoire, je me bornerai à dire qu'il n'en existe que deux paires, l'une antérieure, l'autre postérieure.

ARTICLE II.

Pupe et nymphe.

Latreille, dans son dernier ouvrage (*Cours d'entomologie*), a consacré le nom de *pupe* à la chrysalide des diptères, et j'ai adopté cette dénomination. Quoique la pupe et la nymphe qu'elle renferme constituent deux corps bien distincts, qui en définitive n'ont ensemble que des rapports de simple contiguïté, je les confondrai dans le même article.

La pupe est à la nymphe ce qu'est le péricarpe à la graine, la coque à l'œuf: elle n'est que la peau condensée, durcie, colorée,

privée de vie et métamorphosée de la larve. C'est une coque oviforme, oblongue, immobile, brune ou marron, coriacéo-cornée, longue de cinq lignes environ, présentant extérieurement la trace de segments, où la loupe découvre les mêmes petites aspérités de la larve. Le bout postérieur est tronqué; il offre encore la caverne stigmatique, mais béante, et avec les dents de son limbe réduites à une extrême petitesse; et peut-être à la callosité qui les terminait dans la larve. Il y a à la région ventrale, un peu avant la caverne, deux saillies tronquées qui sont, à n'en pas douter, les restes du tablier anal de la larve. Le bout antérieur a de chaque côté une éminence arrondie auriculiforme, vestige déformé du stigmate de cette région.

Si nous dirigeons nos explorations dans l'intérieur de la pupe, après en avoir extrait la nymphe, nous en trouverons la surface lisse et luisante. Lors du travail métamorphosique, les mandibules de la larve ont été déposées, collées contre la paroi, à un point correspondant à la face de la nymphe. Leur forme et leur couleur noire ne laissent pas le moindre doute sur leur identité; on voit aussi à ce même bout, mais à la région dorsale, deux traînées d'un blanc nacré, restes des grandes trachées latérales de la larve qui se rendaient aux stigmates antérieurs. La même investigation, portée au bout postérieur, met en évidence la dépouille des stigmates sous la forme de deux excavations arrondies, dont le pourtour a une bordure blanchâtre, qui est le reste d'une membrane. Au fond de ces excavations, la loupe permet de constater les ostioles respiratoires, mais évidemment dépourvus de diaphragme, et constituant de véritables lucarnes. Dans le voisinage, on retrouve aussi les témoignages irréfragables des deux trachées-artères de la larve qui partaient de ces stigmates, et dont elles se sont détachées, en y laissant la bordure blanche dont je viens de parler. Ces vestiges nacrés des vaisseaux respiratoires demeurent appliqués, soit aux parois mêmes de la pupe, soit sur le dos de la nymphe.

D'après ce court exposé, on voit que la métamorphose de la

larve en pupe devient un phénomène d'une solution assez facile, puisque, jusque dans ses moindres détails, elle tombe sous nos sens. Ainsi cette coque, maintenant coriacée, inerte et privée de vie, n'est que le tégument de la larve, d'où le principe vital s'est successivement retiré, et qui, livré à sa contractilité de tissu, a pris de la consistance, de l'opacité et une coloration particulière. L'action de l'air, soit comme agent de dessiccation sur un tissu peu imbibé, soit par la fixation de quelqu'un de ses principes, est la cause de cette coloration et de cette consistance. Par quelle savante prévoyance la nature a-t-elle pu rendre inaltérable, par les agents extérieurs, cette peau morte destinée à devenir le berceau de la nymphe? Par quel procédé, par quelle industrie s'est opéré ce singulier tannage? Et ce fait de l'abandon du dépôt des mandibules, des stigmates, des trachées-artères, n'était-il pas bien intéressant à constater?

La nymphe paraît résulter essentiellement de la métamorphose de l'intérieur de la larve, car nous venons de voir que l'enveloppe de celle-ci s'en est détachée pour former la pupe. L'état de nymphe étant la période de la triple vie de l'insecte qui doit nous offrir les considérations les plus nombreuses et les plus importantes, puisqu'elle est intermédiaire à la larve et à la mouche, j'ai besoin d'entrer à son sujet dans des développements qui sont indispensables pour l'intelligence de son anatomie.

Pour étudier les nymphes à des époques différentes de leur formation et pour bien saisir les progrès des créations, j'ai dû multiplier à l'infini les vivisections : ainsi j'y ai procédé, tantôt au moment même où leur transmutation venait de s'opérer, et tantôt quelques heures, des jours, des semaines ou plusieurs mois après ce moment. Ces autopsies variées m'ont mis à même de reconnaître dans la marche successive des formations deux périodes de transition, entre lesquelles se trouve ce que j'appelle la *nymphe confirmée*.

Pour ne point m'écarter, dans mon exposition, de l'enchaînement naturel des phases de la métamorphose, je parlerai d'abord

des caractères de la première transition, pour passer ensuite à ceux de la nymphe confirmée, et enfin à ceux de la seconde transition, ce qui nous amènera, par une pente insensible, au complément de l'organisme, qui est l'insecte ailé.

La première transition est ce moment de courte durée, et d'une constatation aussi difficile qu'intéressante, où la larve, pleine de vie, est irrésistiblement sollicitée à dépouiller son existence actuelle, à rompre tous les rapports organiques de son enveloppe tégumentaire avec les tissus sous-jacents, pour refondre en quelque sorte ses chairs, ses viscères, et les jeter dans un nouveau moule. Dans cet échange si mystérieux d'organisme, dans ce passage, presque insaisissable, où le principe vital est appelé à inaugurer un nouvel être avec les débris d'un être démoli, les organes et les fonctions qui sont en déchéance prêtent encore, dans leur chute, leur ministère aux organes et aux fonctions qui s'établissent. J'ai été assez heureux pour saisir, pour constater ce précieux moment d'une vie commune à deux êtres qui se changent l'un dans l'autre, ce moment où le scalpel et la loupe pratiques découvrent les éléments d'une organisation qui s'en va et ceux d'une organisation qui arrive : ainsi je me suis assuré qu'à l'instant même où la métamorphose en pupe vient de s'effectuer, et où elle semble confirmée extérieurement par la coloration, l'induration des téguments et l'immobilité absolue de ce corps nouveau, je me suis assuré, dis-je, que les stigmates postérieurs qui appartenaient à la larve fonctionnent encore dans la pupe, et que les trachées de la nymphe en formation aboutissaient à ces orifices respiratoires. La circulation de l'air, la seule qui existe dans les insectes, survivait donc et était transitoirement en exercice pour le grand œuvre de la métamorphose. L'enveloppe tégumentaire de cette nymphe en création était d'une finesse, d'une fragilité qui annonçaient assez l'imperfection de son organisation, et quelques linéaments incertains, qui parfois se dérobaient à la vue, dessinaient vaguement les membres. Il est un trait anatomique qui caractérise, à ne pas s'y méprendre, cette première

transition : c'est l'adhérence, par continuité de tissu, de l'enveloppe pupale à la nymphe en voie de formation.

La nymphe confirmée a une couleur blanchâtre uniforme, une consistance molle, une enveloppe tégumentaire membraneuse, glabre, constituant un sac sans ouverture, dont la pellucidité des parois permet à la loupe de distinguer les granules de la pulpe adipeuse qui le remplit. Les trois grandes divisions du corps en tête, thorax et abdomen s'y reconnaissent, mais sans traces de segmentation secondaire; les pattes et les ailes, ébauchées, sont appliquées, emmaillottées à la face inférieure du corps.

La *tête*, grosse comme dans les fœtus des grands animaux, vésiculeuse, à vertex élevé et très-obtus, n'est qu'un simulacre, car, et c'est un fait bien remarquable, elle est vide de tout organe : un large espace la fait communiquer avec le thorax. Les yeux, latéraux, ovales, incolores, non réticulés, ne sont non plus qu'un simulacre, car ils n'offrent aucun des attributs de l'organe de la vue, et leur position seule détermine à leur donner cette dénomination. De chaque côté de la face, près des yeux, il existe constamment une petite saillie palpiforme, conoïde, subdiaphane, de deux articles, dont le basilaire est gros et le terminal petit, subuliforme. Elle ressemble singulièrement au palpe labial de la larve, et s'insère au bas d'un espace ovalaire fort légèrement convexe, ayant l'apparence d'un œil et devenant un peu plus proéminent lors de la seconde transition, sans jamais se colorer. J'ignore encore les fonctions actuelles et la future destination de ces deux saillies; leur position ne permet pas de les regarder comme les germes des antennes ou des palpes de la mouche. Leur configuration rappelle, je le répète, les palpes labiaux de la larve; mais je suis loin de croire à leur identité. Je suis plus porté à les considérer comme des organes exclusivement propres à la nymphe, mais dont les attributions physiologiques me demeurent inconnues.

Le *suçoir* est, à cet âge, un prolongement de la face dirigé en arrière et couché entre les pattes, ce qui donne à la physionomie

de cette nymphe une certaine ressemblance avec celle de la cigale. Il est largement tronqué, comme échancré à son extrémité, et on n'y découvre extérieurement aucun vestige ni de lèvres, ni de palpes.

Le *thorax,* modérément convexe à sa région dorsale, n'est distinct de la tête et de l'abdomen que par une ligne enfoncée. Son bord antérieur se prolonge de chaque côté en une papille conoïde qui disparaîtra, lors de la métamorphose définitive, pour constituer dans la mouche ces angles antérieurs du prothorax connus des entomologistes sous le nom d'*épaules.* C'est un peu en arrière de cette papille et sur le flanc qu'est placé le seul stigmate de la nymphe. En arrière de l'origine des ailes, du côté de la région dorsale, se voit un petit lobe isolé, redressé ou placé de champ, arrondi ou parfois subquadrilatère. Ce lobe, ou cette espèce de caroncule, est destiné, je crois, à former la couverture ou l'*écaille* de l'origine de l'aile. L'*écusson* est invisible, la peau du thorax et celle de l'abdomen étant continues sur le même plan.

L'*abdomen,* court, gros et convexe, n'offre aucune trace de segments; mais on y remarque de chaque côté une série longitudinale et symétrique de six très-petits tubercules qui semblent indiquer le nombre des futurs segments. Ils ne sont pas les germes des stigmates abdominaux, ainsi que je l'avais cru d'abord.

Les *pattes,* ployées et appliquées, comme je l'ai dit, contre le corps, ne sont à cette époque que des gaînes, des étuis membraneux pellucides, vaguement articulés, tantôt presque vides, tantôt renfermant ou des granules adipeux disposés en files, ou, plus tard, des flocons d'une graisse plus fine, plus épurée, placés particulièrement aux points des futures articulations; elles ont une inégale longueur. L'article terminal de celles qui, dans la mouche, doivent être les postérieures atteint ou même dépasse le bout de l'abdomen. Cet article, dans toutes les pattes, est gros, vésiculeux, cordiforme, avec une petite papille dans l'échancrure. En arrière de l'extrémité tronquée du suçoir, et dans le vide que

laissent entre elles les pattes, il y a, à la file les unes des autres, trois paires de pièces courtes, grosses, conoïdes, dont la pointe est dirigée en arrière, et qu'il faut rapporter aux *hanches*.

Les futures *ailes* sont représentées chacune par une raquette oblongue rabattue sous le corps, évidemment formée par un sachet membraneux, dont la translucidité permet d'y constater intérieurement des granules adipeux et deux trachées principales dirigées suivant sa longueur.

Telle est la description de la nymphe confirmée. Avant d'aborder celle de la seconde transition, je ferai quelques remarques, quelques réflexions qui intéressent l'histoire de sa transformation.

Le véritable miracle de la métamorphose de l'insecte s'opère dans le passage de la larve à la nymphe : c'est une sorte de génération spontanée dont le produit ne représente en rien l'individu d'où il émane. Cette création s'improvise par enchantement, et l'enveloppe opaque de la pupe, qui dérobe le mystère à l'avidité de nos regards, nous reste seule comme une bien faible compensation de notre curiosité déçue, de notre ambition humiliée : c'est le masque difforme qui cachait le visage de la beauté. Et en effet, trouvez-vous dans la larve le plus léger indice de ces grandes segmentations de la nymphe, de cette grosse tête vésiculeuse sans cerveau ni organes des sens, de ce suçoir, de ces longues pattes ébauchées? Non, toute la larve, à l'exception de sa peau, s'est fondue pour se couler dans un nouveau moule, et, malgré nos efforts pour surprendre le secret de cette inconcevable improvisation organique, nous sommes condamnés à accepter tout simplement le fait accompli.

Suivant l'époque de l'année où j'élevais les larves de la sarcophage, la métamorphose définitive se faisait plus ou moins attendre. Dans les fortes chaleurs de l'été j'ai obtenu, en deux ou trois semaines, des mouches provenant de larves que j'avais moi-même placées, dès leur naissance, sur de la viande de bœuf gâtée, tandis qu'en automne, j'ai vu un grand nombre de pupes ne pas se transformer, et destinées à franchir tout l'hiver dans

ce même état. Cette circonstance m'a mis à même, et de pouvoir continuer mes dissections pendant cette dernière saison, et de m'assurer que c'est à l'état de nymphes confirmées que cette hibernation a lieu.

Passons maintenant à la *seconde transition.* Le trait extérieur le plus caractéristique, celui qui frappe de suite la vue, est la coloration en fauve ou en roussâtre des yeux et des ocelles : ceux-ci, bien distincts à cet âge, étaient invisibles dans la nymphe confirmée. Le progrès des créations, soit extérieures, soit viscérales, le perfectionnement des parties ébauchées, présentent des phénomènes organogéniques du plus sublime intérêt. L'œil attentif du scrutateur suit avec transport la miraculeuse succession de ces évolutions, de ces changements à vue. Là où quelques heures auparavant il n'apercevait, malgré la puissance des lentilles microscopiques, qu'un sac et des étuis pellucides, où flottait une pulpe homogène, il voit se sculpter, s'improviser, toujours sans aucun mouvement appréciable de la part de la nymphe, des organes qui marchent rapidement vers leur développement parfait. Il y a dans ce déroulement organique une singulière analogie avec ce qui se passe dans la germination et surtout dans la fructification des plantes; et l'idée de Swammerdam, qui assimilait la nymphe à une fleur dans le bouton, a certainement de la justesse. Au moindre effort de la pince, l'enveloppe tégumentaire, comparable à la membrane amnios, se détache de celle qui, plus tard, devra constituer le derme de la mouche, et une bonne loupe découvre déjà à la surface de ce dernier les poils, mais couchés et incolores, qui devront le hérisser à la naissance de l'insecte ailé. La couleur blanchâtre de la nymphe a pris une teinte sale, et l'insensibilité, soit générale, soit partielle, est toujours la même.

La tête, tout en conservant la grosseur et la forme propres à l'âge précédent, est enfin devenue le réceptacle du cerveau; toutefois, elle offre encore la petite pièce palpiforme dont j'ai parlé. Un double trait plus foncé dessine les antennes couchées au mi-

lieu de la face entre les deux téguments. Les yeux, un peu plus prononcés, sont roussâtres, comme je l'ai dit, mais non réticulés; il y a autour de leur base une sorte d'orbite assez large qui circonscrit, enchatonne une cornée ellipsoïdale, et dont la texture est peu différente de celle-ci : la trace de cette orbite se retrouve aussi aux yeux incolores de la nymphe confirmée. Les ocelles sont représentés sur le vertex par trois points roussâtres sans cornée. Le suçoir conserve extérieurement le même aspect que dans la nymphe confirmée. Un fait curieux, pendant la dissection de cet organe, vint me surprendre et me transporter d'admiration : je vis se dérouler sous mes yeux, par une évolution et un épanouissement subits, et comme par ressort, la lèvre et les palpes, qui étaient ployés sur le corps du suçoir. On reconnaissait à merveille que cette lèvre, profondément bilobée et plus ou moins étalée en fer à cheval, était sculptée à sa face interne d'élégantes stries transversales et velues en dehors; elle s'insère à une pièce grosse et courte, qui elle-même s'articule avec la base du suçoir. Malgré cette création avancée, celui-ci ne donnait aucun signe de sensibilité.

Le thorax de cette seconde transition ne présente aucune différence appréciable avec celui de l'âge précédent, et ses stigmates ont encore la même configuration, la même structure.

On voit à la région dorsale de l'abdomen une raie médiane obscure ou noirâtre, où la loupe la plus attentive ne saisit aucune espèce de mouvement, quoique cette couleur soit produite par ce que les partisans de la circulation ont appelé le vaisseau dorsal. Les segments abdominaux sont déjà indiqués par une ligne plus foncée; cependant, les six tubercules ponctiformes des côtés présentent la même saillie et sont placés sur un pareil nombre de segments. Vis-à-vis, et un peu au-dessous de chacun d'eux, il existe un point obscur non saillant, premier indice des futurs stigmates; mais la lentille la mieux éclairée n'y reconnaît aucun vestige de l'organisation propre à ces orifices respiratoires. Remarquez ce signe précurseur des stigmates avec le fait négatif de

leur existence. Il importe, pour l'intelligence de cette seconde transition, de bien saisir cette nuance de création, ce précieux acheminement organique.

Les pattes, quoique toujours immobiles et dans la même position respective que dans l'âge précédent, ne consistent plus en de simples gaînes où flottent des granules adipeux. Leur translucidité permet d'y distinguer un membre inclus avec toutes ses articulations, et même le trait presque insensible des poils dont plus tard il sera hérissé. Le dernier article du tarse se termine par deux grandes lames triangulaires, qui vont devenir les pelottes tarsiennes de la mouche; il est facile de se convaincre, à cet âge, que ces pelottes ont une souche commune aux deux lames et qu'elles ne sont, ainsi que les lèvres du suçoir, qu'une seule pièce bilobée. Les crochets ongulaires, encore incolores ou offrant parfois vers leur milieu une teinte rousse, sont couchés sur ces lames, et s'insèrent par articulation au bout du dernier article tarsien. On peut, sans beaucoup de difficultés, enlever avec la pince la gaîne nymphale de la patte et mettre ainsi cette dernière à nu. Les poils, qui étaient couchés et presque invisibles avant cette décortication, se redressent alors par le seul effet de leur élasticité et par l'évaporation de l'humidité.

Les ailes, dans cette intéressante période de transition, sont encore des sachets en raquette; mais elles sont moins abreuvées de sucs; elles se festonnent, se chiffonnent sur leurs bords, et leur texture devient plus décidément membraneuse. Le microscope y décèle déjà, à travers l'enveloppe hyaline, de très-petits points pilifères et de la villosité aux bords; au côté interne, près de leur insertion, on constate l'existence d'un lobe oblong ou ellipsoïde, invisible dans la nymphe de l'âge précédent, mais qui sera un trait permanent de l'aile de la mouche.

ARTICLE 3.

Mouche.

En approchant du terme de la seconde transition, la nymphe se réveille enfin de sa léthargie; l'heure de la métamorphose définitive et de la manifestation de la sensibilité a sonné : c'est une sorte de résurrection. La tête, resserrée sur le cerveau, devient plus petite, mais plus solide, et ne tient au thorax que par un col exigu. Un étranglement profond sépare le corselet de l'abdomen; le tégument général se colore, se durcit, devient opaque et se hérisse de poils et de soies. La mouche, blottie sous ses langes, secoue sa fine enveloppe, apparaît dans l'éraillement thoracique de celle-ci, dégaîne, déroule ses longues pattes, ses ailes, et abandonne sa dépouille amniotique. Elle vient au monde encore tendre et inhabile aux mouvements; mais, après une enfance de quelques heures, elle frotte ses antennes, sa moustache, brosse ses ailes et prend son essor dans les airs.

La mouche est composée extérieurement du même nombre de parties que les insectes hexapodes en général. On lui reconnaît : 1° une *tête* bien circonscrite et mobile, où se voient deux *antennes*, deux *yeux*, trois *ocelles*, une *face*, un *front*, une *trompe* rétractile, renfermant un *suçoir* muni de *lèvres* propres à lécher, à sucer un aliment plus ou moins liquide, deux *palpes* uniarticulées; 2° un *thorax* ou tronc, où l'on distingue, quoique étroitement soudées, les trois pièces constitutives désignées, d'après M. Audouin, par les noms de *prothorax*, *mésothorax* et *métathorax:* il supporte deux *ailes* nues formées d'une membrane hyaline parcourue par des nervures, deux *balanciers* avec leurs *cueillerons* et trois paires de *pattes* articulées, longues, ambulatoires, divisées en *hanche*, *cuisse*, *tibia*, *tarse* et *ongles;* 3° un *abdomen*, réceptacle des principaux viscères, formé de *segments* dorsaux et ventraux unis par une peau latérale souple; 4° enfin, des *stigmates* occu-

pant par paires symétriques les flancs du thorax et de l'abdomen.

Voilà, à grands traits, la composition générale de la partie solide externe ou du squelette de la mouche. Il n'en faut pas davantage pour le parallèle, l'étude comparative de cette même composition dans les autres formes de ce type.

CHAPITRE II.

ORGANISATION INTÉRIEURE.

Le but de mon travail étant l'étude comparative des divers organes qui s'observent en même temps dans la larve, la nymphe et la mouche de la sarcophage, je bornerai mon exposition aux appareils de la sensibilité, de la respiration, de la digestion, au tissu adipeux splanchnique et à l'organe dorsal, plus connu sous le nom de *vaisseau dorsal*. Comme l'appareil génital est un attribut exclusif de l'insecte parfait et qu'il ne fonctionne que dans cette morphose, comme il n'est point représenté dans la larve et qu'il n'en existe qu'une ébauche dans la dernière phase de la nymphe, je n'en ferai pas mention. Je réserve la description et les figures de cet appareil pour mes recherches sur l'anatomie de l'ordre entier des Diptères, ouvrage dont la rédaction est près d'être terminée [1].

Avant d'entrer dans cette exposition, je dirai deux mots sur la manière de procéder à la dissection de la larve et de la nymphe.

Les contractions énergiques du panicule musculaire, qui revêt intérieurement le tégument de la larve, rendent celle-ci très-réfractaire aux vivisections; il faut donc, pour en faire une bonne autopsie, préalablement l'asphyxier ou la tuer, en la plaçant dans un flacon où l'on verse une ou deux gouttes d'éther sulfurique.

La mollesse, la tendreté des nymphes rendent leur dissection

[1] Depuis la présentation de mes Études sur la sarcophage, l'Académie a favorablement accueilli mes recherches anatomiques embrassant l'ensemble des Diptères et elles sont destinées à faire partie des mémoires de ce corps savant.

difficultueuse, et il faut une patience éprouvée pour découvrir, dans ce chaos pulpeux, des organes et leurs connexions. Au moyen de la fine pointe d'un scalpel ou d'un canif, j'ouvrais les pupes par une incision demi-circulaire, fort peu profonde, pratiquée vers leur tiers antérieur, de manière à enlever celui-ci comme une calotte sans blesser la nymphe; alors, en insinuant la pointe des ciseaux, j'incisais longitudinalement, et ensuite avec la pince je détachais successivement les cerceaux de l'enveloppe pupale, en me tenant en garde contre leur élasticité, qui les faisait s'enrouler et déchirer la nymphe : je parvenais ainsi à dégager cette dernière dans son intégrité. Avant de la placer sur une planchette de cire noircie, immergée, je l'ouvrais par le dos, par le ventre ou par les côtés, suivant les organes que je voulais ménager, au moyen d'une incision ou mieux d'une excision. Pour déblayer la pulpe adipeuse, sans offenser la délicatesse des organes ou des tissus, j'employais ou un pinceau léger, ou un stillicide de gouttes d'eau, ou une colonne de ce même liquide, dont je variais à l'infini la force et la direction, ou enfin, je me servais de l'agitation de l'eau par une insufflation graduelle.

ARTICLE PREMIER.

Appareil sensitif.

Le système nerveux, cet élément indispensable de tous les actes organiques, que Hunter appelait l'animal agissant, et que des physiologistes modernes ont considéré comme un organe de première formation dans les animaux, se compose dans les trois formes de la sarcophage, ainsi que dans l'immense tribu des muscides, d'un cerveau et d'un ganglion thoracique : ce sont là les deux seuls centres nerveux d'où émanent les nerfs nombreux qui distribuent le mouvement et la vie dans les divers viscères, dans les divers tissus du corps. Mais ce serait une grave erreur que de faire, comme cela n'arrive que trop souvent, l'application à tout

l'ordre des diptères de cette existence numérique des ganglions des muscides, car, pour le dire par anticipation à la publication de mes Recherches sur l'anatomie des diptères, les Tipulaires ont, indépendamment du cerveau, une chaîne rachidienne de onze ou de neuf de ces ganglions, les Asiliques une de neuf, les Tabaniens et les Stratiomydes une de huit, les Syrphides une de quatre, etc.

L'appareil sensitif, malgré l'uniformité de sa composition générale dans les diverses morphoses de la sarcophage, offre néanmoins, suivant celles-ci, des différences qu'il importe de faire connaître.

1° Larve. — Le cerveau et le ganglion thoracique sont tellement rapprochés et confondus dans la larve qu'ils semblent ne constituer qu'une seule masse; mais il y a, outre cela, des parties propres à cette morphose de l'insecte, et dont on ne voit les analogues ni dans la nymphe ni dans la mouche.

Le *cerveau* ne saurait être renfermé dans la tête, puisque la larve de la sarcophage est acéphale; il est situé un peu en arrière de l'origine des crocs ou mandibules. Il semble, au premier coup d'œil, formé de deux corps sphériques distincts, sessiles et seulement contigus à la ligne médiane. Par une étude plus attentive, on reconnaît que ces sphères communiquent ensemble par un plancher inférieur, prolongement transversal de leur propre substance. On reconnaît aussi qu'en arrière elles se continuent directement avec le ganglion thoracique, au moyen de deux autres prolongements gros et courts, qui laissent entre eux un espace, un trou formant le collier nerveux œsophagien. Il n'y a à ces lobes cérébraux ni choroïdes ni nerfs oculaires ou ocellaires, comme dans la mouche, puisque la larve est complétement dépourvue d'organes visuels; ils sont convexes, lisses, homogènes, blanchâtres, avec un peu de diaphanéité sur les bords.

Malgré des dissections fort multipliées, j'avoue que je n'ai trouvé dans la larve de la sarcophage aucun vestige des deux ganglions pédicellés que Swammerdam a signalés et figurés à la

partie antérieure du cerveau du ver du fromage, lequel est la larve du *piophila casei* Macq. diptère qui appartient, comme la sarcophage, à la tribu des muscides.

Le *ganglion thoracique,* contigu à son origine, aux lobes cérébraux, et dont je viens d'indiquer les connexions avec ceux-ci, est ovale, oblong, obtus; il émet, par ses bords latéraux, des paires de nerfs symétriques assez grandes, dont le nombre n'est que de huit. J'avais cru d'abord qu'il y en avait encore quatre paires beaucoup plus petites, qui paraissaient naître tout à fait à la base du ganglion, et que je croyais correspondre aux nerfs alaires et cruraux de ce même ganglion dans la mouche; mais des dissections plus scrupuleuses m'ont fait reconnaître que je m'en étais laissé imposer par d'autres nerfs qui se dirigent vers la base des mandibules, et dont je parlerai bientôt.

Quant aux huit paires de nerfs que j'ai dit partir des bords du ganglion, ils sont d'un calibre uniforme, simples jusqu'à une assez grande distance de leur insertion, presque contigus et formant, par leur réunion, une sorte de *queue de cheval.* Ils se ramifient ensuite pour se distribuer aux viscères et aux téguments. Chacun de ces troncs s'accompagne d'une longue et fine trachée simple et resplendissante.

Le bord antérieur des lobes cérébraux est débordé par trois paires de corps particuliers, dont la forme insolite et la contexture ambiguë méritent d'arrêter notre attention, et que je désignerai provisoirement par la dénomination de corps *ganglionoïdes.*

Deux paires de ces corps, parfaitement égaux entre eux, distinctement pédicellés et symétriquement placés, sont ovoïdes, pyriformes, arrondis en arrière, atténués en avant en un filet plus long qu'eux, bifide presque dès son origine, et qui va se fixer au voisinage de la racine des mandibules, peut-être aux muscles qui les meuvent. En arrière, ou à leur bout arrondi, s'implante, d'une manière brusque, un pédicelle capillaire plus court qu'eux. Ces quatre pédicelles ne s'insèrent pas aux bords des lobes cérébraux, comme on pourrait le croire, mais bien à la

base du ganglion thoracique, par des origines bien distinctes les unes des autres. Ils fournissent, peu après leur insertion, un nerf assez considérable qui, marchant d'arrière en avant, va pénétrer dans la souche commune des mandibules.

Ce n'est qu'après beaucoup d'hésitations et des autopsies multipliées, que je me suis décidé à appeler *ganglionoïdes* les corps singuliers dont je viens de parler. Leur étude microscopique, faite avec la plus minutieuse attention, loin d'y reconnaître une texture charnue ou fibro-musculaire, comme j'étais assez porté à le croire, m'a toujours ramené à la substance nerveuse; elle m'a aussi mis à même de découvrir, soit au pédicelle, soit au corps de l'organe, de très-petits nerfs qui en tiraient évidemment leur origine, et des trachéoles imperceptibles qui accompagnaient ces nerfs.

Mais il existe encore, entre les deux paires de corps ganglionoïdes dont il vient d'être fait mention, deux autres corps allongés, insérés aussi à la base du ganglion thoracique, mais sessiles. Ces corps, auxquels je n'ose même plus donner l'épithète de ganglionoïdes, sont longuement atténués en avant, avec leurs bords flexueux ou irrégulièrement festonnés, comme s'ils étaient affaissés. Il m'a semblé que leurs pointes effilées allaient s'implanter et se perdre avec les précédents à la base des mandibules.

Indépendamment de ces trois paires de corps d'une nature ambiguë, on trouve encore, hors du massif ganglionaire et de chaque côté des segments, qui, plus tard, devront constituer le thorax de la nymphe et de la mouche, trois corps plus ou moins arrondis et déprimés, d'inégale grandeur, enchaînés entre eux par un cordon ou filet très-délié. Le plus grand de ces corps, qui est aussi le plus rapproché du ganglion thoracique, m'a paru s'insérer, par un pédicelle grêle, au côté de la base de celui-ci; le suivant est un peu moins gros, et le troisième, ou le plus éloigné de l'axe du corps, est le plus petit des trois. Ils ont tous la même texture, la même consistance calleuse, et ressemblent sous ces rapports,

ainsi que par leur couleur d'un blanc subdiaphane, aux corps ganglionoïdes dont j'ai parlé plus haut. Quoique à la simple loupe ils paraissent ronds, le microscope permet d'y reconnaître une extrémité conoïde plus diaphane que le reste, mais extrêmement courte.

Je n'ai point encore des idées arrêtées sur la nature et les fonctions de ces divers corps; je les ai vainement cherchés dans les grandes larves des insectes des autres ordres; je n'en vois pas d'exemples dans Swammerdam, Malpighi, Lyonnet, ni dans les ouvrages modernes. Toutefois, je serais assez porté à croire que les deux ganglions pédicellés que le premier de ces auteurs a mentionnés dans son anatomie du ver du fromage, et dont j'ai parlé plus haut, appartiennent à ces corps ganglionoïdes. L'insertion de ceux-ci au ganglion thoracique semblerait devoir les faire considérer comme faisant partie de l'appareil sensitif, comme des ganglions d'un genre particulier; d'un autre côté, on serait tenté de les regarder, surtout ceux qui s'implantent à la partie antérieure du ganglion, comme des espèces de muscles destinés aux mouvements des mandibules. Ce qu'il y a de sûr, c'est qu'ils disparaissent entièrement dans la nymphe.

2° Nymphe. — Aucun appareil de la vie ne semble en exercice dans la nymphe, quel que soit son âge : elle est l'image d'un corps tout à fait inanimé. On a beau la soumettre à tous les degrés de l'excitation et de l'irritation, la titiller, la pincer, la piquer, la déchirer, soit à l'extérieur, soit à l'intérieur, jamais on n'obtient d'elle le moindre signe appréciable ni de mouvement, ni de sensibilité : on dirait que l'on dissèque un cadavre. Le principe vital est partout, mais partout il est inerte à nos yeux et à tous nos moyens d'investigation. Cependant, les tissus organiques, avec cette insensibilité apparente, recèlent les germes d'une résistance efficace aux lois qui régissent la matière organique morte.

Dans l'évolution de la larve à la nymphe, l'appareil sensitif n'a pas subi des changements aussi avancés vers celui de la mouche

que les parties extérieures, qui sont déjà avec une ébauche de tête, de thorax, d'abdomen, de pattes et d'ailes.

Cet appareil, à l'âge de la nymphe confirmée, présente de nombreux traits de ressemblance avec celui de la larve. Le cerveau et le ganglion thoracique y forment, par leur contiguïté, une masse agglomérée; mais on n'y rencontre pas, je le répète, le moindre vestige des corps ganglionoïdes de la larve. La tête de cette nymphe, malgré sa grosseur et la vaste ouverture qui la fait communiquer avec le thorax, ne renferme pas, comme je l'ai déjà dit, le cerveau. Cet organe est placé hors de ce crâne vésiculaire et dans la région antérieure du thorax; il est formé de deux lobes sphéroïdaux, plus ou moins contigus, qui n'ont pas la même homogénéité de contexture que dans la larve. Destinés à s'avancer plus tard dans le crâne, comme les testicules du fœtus humain à gagner le scrotum, on y décèle déjà une structure propre aux fonctions optiques. Leur contour extérieur est épaissi en un léger bourrelet semi-lunaire, qu'une rainure superficielle distingue du reste du lobe cérébral, et l'on parvient même, par une dissection adroite, à le décoller assez nettement. Ce bourrelet, qui plus tard s'épanouira en rétine, est encore incolore à cet âge. Sa texture intime est une sorte de feutre spongieux, un lassis d'imperceptibles trachéoles, de nerfs et de pulpe adipeuse.

Dans la nymphe de la seconde transition, le cerveau s'engage insensiblement dans le crâne, et y entraîne, avec une graisse non granuleuse, une quantité vraiment somptueuse de trachées nutritives, sous la forme de panaches et de guirlandes. C'est aussi à cette époque que commence à se former, par une sécrétion dont nous ne connaissons pas les agents, le pigment fauve des yeux. L'introduction complète du cerveau dans la capsule crânienne détermine les formes définitives, et de celle-ci et de celui-là, dans l'insecte ailé.

Le ganglion thoracique de la nymphe confirmée ressemble encore beaucoup à celui de la larve, ainsi qu'il est facile de s'en

convaincre par un coup d'œil comparatif jeté sur les figures des deux appareils sensitifs; il offre le même mode de connexion avec le cerveau pour la formation du collier œsophagien, et il émet le même nombre de paires de nerfs. Toutefois, l'ébauche des membres articulés et des ailes dans cette morphose entraîne des différences que je vais signaler. Ainsi, les nerfs cruraux et alaires, au nombre de quatre paires, y ont un développement très-prononcé, ce qui indique leur prochaine importance physiologique : ils sont grands, bien distants à leur origine. Les suivants sont au nombre de huit paires, dont la dernière ou la plus postérieure est moins fine que les précédentes, et destinée à devenir dans la mouche les nerfs génitaux.

A l'âge de la seconde transition, le ganglion thoracique se sépare insensiblement du cerveau par la formation d'un cordon rachidien, et s'enfonce entre les masses musculaires du thorax au moment où celles-ci se constituent.

3° Mouche. — Nous allons voir dans l'insecte ailé la consolidation, le perfectionnement du système nerveux, que je n'ai fait qu'indiquer dans la seconde transition de la nymphe. Le trait anatomique qui le distingue le plus essentiellement de celui des autres morphoses est l'existence d'un cordon rachidien entre le cerveau et le ganglion thoracique : la destination fonctionnelle, définitive, des diverses paires de nerfs qui naissent de ces deux centres nerveux constitue son caractère physiologique.

Le cerveau de notre diptère est formé, comme celui de la larve et de la nymphe confirmée, non de deux ganglions, ainsi que le prétendent quelques zootomistes, mais de deux lobes égaux, sphéroïdaux, unis ou confluents par leur région inférieure. Il est assis au milieu d'une couche de nombreuses bulles trachéennes qui en protégent la délicatesse; il a une consistance évidemment plus molle, plus pulpeuse que celle du ganglion thoracique, et c'est déjà un rapprochement du cerveau des animaux d'un ordre supérieur. Sa forme, profondément bilobée,

est encore un trait de ressemblance avec l'encéphale de ces derniers.

Dans sa situation normale, c'est-à-dire dans l'enveloppe tégumentaire de la tête, le cerveau a la forme de celle-ci; il est arrondi, excepté en arrière ou à la région occipitale, où il y a un aplatissement marqué. Quand on l'affranchit de son enveloppe, les lobes semblent prendre, comme dans les vertébrés, du développement, de l'expansion. Chacun d'eux est en grande partie recouvert par une calotte ovalaire ou rétine enduite d'un pigment fauve-rougeâtre, d'où les yeux de l'insecte prennent leur couleur, et qui n'est qu'une *choroïde*. Cette rétine ne semble que collée ou soudée sur la convexité de l'hémisphère cérébral, et on peut la détacher facilement de ce dernier dans toute son intégrité. Une lentille microscopique attentive découvre les trachées et les nerfs qui traversent du cerveau à la rétine. La texture finement spongieuse de celle-ci est un lassis inextricable de trachéoles, de nerfs et de granules adipeux ponctiformes. On aperçoit à sa face externe des franges de cils, des espèces de *procès ciliaires*. Les troncs, d'ailleurs excessivement courts et gros, des *nerfs optiques* ne sont rendus visibles que lorsqu'on tiraille en sens contraire et avec une précaution infinie les lobes du cerveau; on constate alors qu'ils ne sont que la continuation de ces derniers.

Au bord postérieur du prolongement transversal des hémisphères cérébraux s'implantent les *nerfs ocellaires* sous la forme d'une seule tige plus fine qu'un cheveu, accompagnée d'une trachéole, et terminée par trois petites rétines sphéroïdales, munies chacune d'une *cornée transparente*, qui demeure fixée au vertex crânien. Ces petites rétines, recouvertes aussi d'une choroïde d'un fauve-rougeâtre, ont chacune un nerf propre que le microscope peut seul mettre en évidence, et ces trois nerfs ocellaires se continuent dans tout le trajet de leur gaîne commune, qui n'est que la tige capillaire dont je viens de parler.

En arrière, les lobes cérébraux fournissent chacun un prolongement qui aboutit à un cordon médian ou rachidien : ces deux prolongements, avant leur connivence ou leur réunion, laissent

entre eux un espace vide, qui est le *collier nerveux* destiné à recevoir l'œsophage et les conduits excréteurs des glandes salivaires.

Diverses paires de nerfs naissent directement de l'encéphale. J'ai constaté les nerfs *antennaires*, dont l'origine est antérieure et inférieure; les nerfs *buccaux*, ou ceux qui se distribuent au suçoir, m'ont échappé. Le bord postérieur de chacun des lobes fournit deux nerfs rapprochés, deux nerfs *cervicaux* destinés aux muscles du cou.

Le ganglion thoracique est profondément situé au centre du thorax, en grande partie sur le mésothorax, au milieu des masses musculaires; il est grand, ovale, elliptique, maintenu en place, non-seulement par les nerfs qui en émanent, par les trachées et les muscles qui en rendent l'isolement très-difficile, mais encore il est enclavé entre des espèces d'apophyses coriacées ou de texture tégumentaire, que les partisans de l'unité organique ne manqueront pas d'appeler des apophyses vertébrales.

Ce ganglion, centre nerveux où les organes locomoteurs et les viscères viennent puiser l'esprit qui les anime, émet, indépendamment du cordon rachidien, dont je parlerai bientôt, un nombre considérable de paires de nerfs. Les principaux de ceux-ci sont, pour chaque côté d'abord, quatre grands nerfs, dont trois *cruraux*, destinés aux pattes, et le quatrième, ou le nerf *alaire*, qui pénètre dans les ailes. Les nerfs cruraux ont leur origine à la face supérieure du ganglion, un peu avant le bord latéral, tandis que les nerfs alaires prennent naissance à la face inférieure, non loin de sa ligne médiane. Entre ces paires principales de nerfs, il y en a plusieurs de moindre calibre qui se répandent, ou dans les muscles puissants qui garnissent le thorax, ou dans les tissus du voisinage.

En avant, le ganglion thoracique communique directement avec le cerveau au moyen d'un *cordon rachidien* ou médian, qui présente, comparativement à celui des insectes des autres ordres, un trait distinctif fort remarquable méconnu jusqu'à ce jour. Dans les orthoptères, coléoptères, hyménoptères, névroptères, hémiptères, lépidoptères, le cordon rachidien ou interganglio-

naire est formé de l'adossement de deux filets égaux simplement contigus, tandis que, dans la sarcophage et dans tous les diptères, sans exception, ce cordon est parfaitement simple ou unique. Celui-ci m'a paru un peu bulbeux à son origine, et, dans son trajet, il émet vers son milieu une petite paire de nerfs.

En arrière, le ganglion se termine par un cordon rachidien pareillement simple, mais qui, à son entrée dans la cavité abdominale, se bifurque ou se divise en deux nerfs considérables qui, vers le milieu de cette cavité, se subdivisent de nouveau pour se distribuer, soit aux organes génitaux, soit aux viscères de la digestion. Les ramifications successives de ces deux grands nerfs abdominaux forment, par leur ensemble, comme une *queue de cheval.*

J'ai vainement cherché dans la sarcophage le petit système des nerfs *stomato-gastriques,* signalé par Muller et autres zootomistes dans la plupart des insectes; mais je suis loin d'en contester l'existence.

ARTICE 2.

Appareil respiratoire.

Je ne dirai pas avec M. Carus que la respiration est un conflit entre l'individu et l'élément qui l'entoure [1]; je me contenterai de faire remarquer que l'appareil qui y préside a dans les insectes hexapodes une importance des plus élevées, puisqu'il représente la double fonction de la respiration et de la circulation; aussi a-t-il chez eux un développement proportionnel beaucoup plus considérable que dans les animaux placés le plus haut dans l'échelle. J'aurai occasion de revenir sur cette importance lorsque j'aborderai la question litigieuse du vaisseau dorsal.

Je vais exposer dans deux paragraphes et comparativement, pour les trois formes de la sarcophage, les *stigmates* ou les orifices respiratoires, et les *trachées* ou les canaux destinés à la circulation de l'air.

[1] *Anat. comp.* t. II, p. 150.

§ 1. Stigmates.

1° Larve. — Ils sont au nombre de deux paires seulement, l'une antérieure, l'autre postérieure, et il en est ainsi dans toutes les larves acéphalées des muscides [1].

Les stigmates *antérieurs* placés un de chaque côté du premier segment du corps, qu'ils débordent un peu, se composent d'un éventail subarrondi de quinze digitations courtes, égales, disposées sur un même plan. Par un mouvement de rétraction soumis à la volonté de l'animal, cet élégant stigmate, dont la souche ou la tige n'est que le prolongement extérieur de la grande trachée latérale, peut s'abriter entièrement sous le bord antérieur du second segment. Admirable précaution! Au milieu du charnier infect et déliquescent où vit la larve, un organe aussi délicat, et d'une aussi grande valeur physiologique, se trouve ainsi protégé contre l'ordure, qui en aurait infailliblement bouché les orifices. Ceux-ci, que leur petitesse a dérobés à mes recherches microscopiques, terminent sans doute les digitations. Swammerdam n'a pas saisi cette curieuse structure dans les stigmates de son ver du fromage, où, suivant toutes les probabilités, elle existe aussi [2]. J'en ai fourni plusieurs exemples remarquables dans mes mémoires sur les métamorphoses des larves fongivores de diptères [3].

Les stigmates *postérieurs*, logés au fond de la caverne stigmatique, décrite plus haut, sont rapprochés l'un de l'autre, déprimés, bruns, ovalaires, presque réniformes, à raison d'une très-légère échancrure de leur bord interne. Étudiés au microscope, ils présentent une structure singulière dont on ne rencontre aucun exemple analogue dans le beau mémoire de Curtius Spren-

[1] Quelques larves hémicéphalées de tipulaires n'ont qu'une seule paire de stigmates et elle est postérieure. (*Tipula lunata, ctenophora atrata, pachirrhina maculata, etc.*)

[2] En 1844, j'ai présenté à l'Académie des sciences et j'ai publié, dans les Annales des sciences naturelles, un Mémoire sur les métamorphoses et l'anatomie de la *piophila petasionis*, espèce voisine de celle de Swammerdam, et où j'ai constaté des stigmates antérieurs en éventail de dix digitations.

[3] *Annal. des sc. nat.* 2e série, t. XII, p. 15.

gel sur les stigmates des insectes, et que j'ai retrouvée dans plusieurs autres larves de muscides. Un filet corné brun, un fin cerceau circonscrit le stigmate, excepté à la petite échancrure interne. L'aire ou le disque offre à un œil bien éclairé trois lignes allongées, convergentes vers cette dernière. Ces lignes sont formées elles-mêmes par la connivence de deux filets cornés, de couleur ambrée, qui interceptent un espace subdiaphane : ce sont sans doute là des ostioles respiratoires. Cependant, je dois dire que, malgré une longue persévérance à les observer sur la larve vivante, je n'ai jamais pu y saisir le moindre mouvement; l'espace subdiaphane m'a même semblé fermé par une membrane. Celle-ci s'ouvre-t-elle sur un côté, comme la valve d'une moule, pour donner entrée à l'air? Je l'ignore.

2° Nymphe. — Dans sa métamorphose en nymphe, la larve perd ses quatre stigmates, et j'ai déjà dit que leurs dépouilles demeurent collées à son enveloppe tégumentaire changée en pupe. Cependant, la nymphe confirmée n'est pas entièrement déshéritée de ces orifices respiratoires; il lui en reste, ou mieux, elle en a acquis, improvisé, une paire qui est antérieure; mais dans cet âge embryonnaire, ces stigmates ne fonctionnent pas, je crois, ou fonctionnent obscurément.

Ils correspondent, par leur position, aux stigmates prothoraciques de la mouche et un peu par leur configuration aux antérieurs de la larve; ils sont placés derrière la tête, au-dessous d'une pointe conoïde, qui appartiendra plus tard aux angles antérieurs du prothorax, à ce qu'on appelle les épaules de l'insecte. La simple loupe aperçoit là quelques traits grisâtres étalés en une étoile irrégulière, qui rappelle les apothécies en astérisque des cryptogames du genre *opegrapha*. Une forte lentille du microscope met en évidence quinze de ces traits, nombre égal à celui des digitations qui s'observent aux stigmates antérieurs de la larve; mais ces traits, au lieu d'être, comme dans cette dernière, disposés en une raquette flabelliforme détachée, sont étalés, collés horizontalement sur le tégument, où ils forment un relief à peine

sensible. Ces ostioles, que j'appellerai vestigiaires, ont une disposition qui m'a paru variable; quelquefois, ils m'ont semblé répartis en trois groupes, dont deux, plus courts et égaux entre eux, émettent chacun quatre ostioles unilatéraux, tandis que le troisième en fournit sept. Dans d'autres individus, ils forment des rayons plus réguliers, dont la circonscription est parfois réniforme, et dont les uns sont simples et les autres plus ou moins divisés. Quelle singulière métamorphose que celle du stigmate de la larve en celui de la nymphe, et quelle plus singulière encore que celle de ce même organe à quinze rayons qui doit, dans la mouche, devenir un stigmate allongé, simple, garni de villosité !

Les stigmates abdominaux n'existent pas à cet âge de la nymphe, car j'ai déjà dit, en parlant des conformations extérieures de celle-ci, ce qu'il fallait penser des six paires de tubercules qui s'observent sur les côtés de la région dorsale de l'abdomen. Je me suis convaincu, par les progrès des créations, que ces tubercules ou boutons charnus ne sont point les germes, les ovules des futurs stigmates de la mouche.

Dans l'âge de la seconde transition, ceux-ci se dénotent par un point obscur placé à une petite distance de ce bouton.

3° Mouche. — Nous venons de voir que dans la larve, forme de l'insecte où la vie nutritive et de croissance est très-énergique, il y avait deux paires de stigmates; mais ceux-ci sont composés ou multiples, en sorte que, suivant les apparences, ils ont trente-six ostioles respiratoires. La nymphe, vouée à l'inaction la plus absolue, à une vie en apparence passive, n'a qu'une paire de stigmates, qui ne sont peut-être encore que des simulacres, des orifices rudimentaires. Dans la mouche, où une locomobilité des plus actives et l'exercice impérieux des organes génitaux imposent à l'organisme de grands frais d'assimilation, il existe huit paires de stigmates, dont plusieurs offrent un large accès à l'air. De ces stigmates, deux paires appartiennent au thorax et six à l'abdomen.

Les stigmates *thoraciques*, plus grands, plus développés que les abdominaux, se sous-divisent en paire *prothoracique* et paire *métathoracique* : le mésothorax n'en n'a point.

Le stigmate *prothoracique* est situé au-dessous et sur le flanc de l'angle antérieur du prothorax dans une rainure ou suture qui court vers les hanches antérieures, et qui semble une limite commune au prothorax et au mésothorax, ce qui fait présumer que cet orifice respiratoire sert à ces deux compartiments du thorax. Abrité par une touffe de poils qui partent de l'angle précité et par des soies implantées près de là, il est oblong, elliptique, atténué aux deux bouts, bivalvulaire. Les valves sont formées par un cerceau corné, garni d'un duvet fin et dense, d'un blond ou d'un gris lustré; mais ce ne sont pas des poils simples qui forment ce duvet feutré ; le microscope y constate une série de pinceaux allongés tout à fait semblables à ceux que Lyonet et Sprengel ont décrits et figurés dans le *cossus ligniperda*. Les bouts libres de ces élégants pinceaux tendent à se croiser à la ligne médiane du stigmate où se trouve l'ostiole respiratoire. Celui-ci, ainsi que le grand diamètre du stigmate, est presque perpendiculaire à l'axe du corps.

Le stigmate *métathoracique*, situé à la partie postérieure de ce compartiment du thorax et abrité par le cueilleron du balancier, a une forme très-différente du précédent; il est arrondi, bivalvulaire, formé extérieurement par un duvet blond, lustré et logé dans une dépression protégée par une série régulière de longues soies roides disposées en râteau ou en peigne. Le duvet est fixé, de part et d'autre, à un demi-cerceau corné, et forme ainsi deux valves jouant sur une charnière, et dont les bords libres forment à la ligne médiane l'ostiole respiratoire. Les poils du duvet sont pareillement pénicillés.

Les stigmates *abdominaux*, situés à la partie latérale et inférieure des segments dorsaux de l'abdomen, sur le disque même de ceux-ci, se présentent sous la forme de six petits points noirs un peu saillants, simples, constitués par un cerceau corné rond,

cupuliforme, dont le centre m'a paru fermé par une membrane. Le plus antérieur, fort difficile à mettre en évidence à cause de sa petitesse, appartient à un segment, en quelque sorte rudimentaire, de la base de l'abdomen; le second est plus rapproché des plaques ventrales que les trois suivants; le sixième, au contraire, plus avancé vers la région dorsale, est le plus souvent caché par l'embrication des segments, et il faut exercer sur l'abdomen une compression expulsive pour le constater. Dans le mâle, le segment, qui est le siége de ce sixième stigmate, est celui qui forme la base de l'armure copulatrice.

§ 2. Trachées.

C'est là le véritable système vasculaire, le seul appareil circulatoire qui existe dans la sarcophage comme dans tous les insectes hexapodes, à quelque ordre qu'ils appartiennent.

1° Larve. — Les trachées de la larve sont toutes de l'ordre des tubulaires ou élastiques. Deux troncs situés un de chaque côté de la région dorsale, deux *trachées artères*, établissent une communication directe entre les stigmates postérieurs et les antérieurs, et constituent les deux grands canaux de la circulation aérienne; ils sont droits ou flexueux, suivant les mouvements du corps, constamment un peu plus gros vers leur origine postérieure, et s'atténuant insensiblement en avant. Dans ce trajet, ils émettent, à droite et à gauche, des trachées secondaires qui se correspondent d'une manière assez régulière par leur origine, et dont le nombre m'a paru en rapport avec celui des segments du corps.

Ces trachées se ramifient en trachéoles nutritives, dont les externes se distribuent aux téguments et aux muscles sous-jacents, et les internes aux viscères ainsi qu'au tissu adipeux splanchnique. Indépendamment de ces paires régulières de trachées secondaires, chaque tronc émet, près de son origine postérieure et à son côté interne, une branche considérable dont les rami-

fications en faisceau ou en panache s'épanouissent exclusivement sur et dans les viscères de cette région.

Il existe encore, autour de la souche stigmatique postérieure, de nombreuses trachéoles rayonnantes qui s'étalent sur les tissus du voisinage et qui, lorsqu'une dissection soigneuse les a dégagées de ces derniers, s'épanouissent en une collerette ou une fraise bien fournie, sans que j'aie pu constater aucune anastomose entre les branches du tronc de droite et celles du tronc de gauche.

Mais une tout autre disposition a lieu dans le voisinage des stigmates antérieurs. Vous ne trouvez plus ici ces fraises vasculaires que je viens de signaler. Atténuées en avant, comme je l'ai dit, les trachées-artères communiquent constamment à la hauteur des stigmates, au moyen d'un tronc traversier, en sorte que les deux grands canaux latéraux de la respiration s'anastomosent directement.

Un fait qu'il importe de faire clairement ressortir dans l'intérêt des explications physiologiques, fait déjà signalé dans mon mémoire sur les larves fongivores, présenté à l'Académie des sciences[1], et que depuis lors j'ai constaté dans plusieurs autres larves, c'est la direction et le mode d'ouverture de l'angle que forment à leur origine les trachées secondaires fournies immédiatement par les grands canaux latéraux. Ces trachées naissent constamment à angle plus ou moins aigu, dont l'ouverture est toujours dirigée en avant; il n'y a d'exception à cette règle que pour un petit nombre de trachées nutritives de la partie tout à fait antérieure du système. Les unes, insérées au voisinage du stigmate, ont une direction presque horizontale ou à angle droit; les autres, nées du conduit traversier, se portent d'avant en arrière, et paraissent ainsi rétrogrades.

On peut déduire évidemment de cette disposition anatomique des trachées secondaires que la circulation, ou mieux la progression de l'air, doit se faire d'arrière en avant; que par conséquent l'inspiration a lieu par les stigmates postérieurs, et peut-être

[1] *Annal. des sc. nat.* l. c.

l'expiration par les stigmates antérieurs. Cette manière d'envisager la respiration deviendrait féconde en considérations du plus vif intérêt si elle pouvait se généraliser dans les insectes; mais il est loin d'en être ainsi, et la nature a mille moyens d'arriver à un même but[1].

Quoi qu'il en soit, il y a dans cette disposition à angle aigu des trachées secondaires, à partir des stigmates postérieurs, une analogie piquante entre le système vasculaire aérifère des insectes et le système sanguin artériel des animaux les plus élevés dans l'échelle zoologique; il y a aussi entre les grands canaux aérifères des insectes et la trachée-artère des animaux à poumons une communauté de structure et de fonctions fort digne de remarque. Voilà pourquoi je n'ai pas balancé à appliquer à ces canaux des insectes la dénomination de *trachées-artères*. Il résulte encore de ce double rapprochement la confirmation de cette vérité physiologique, que dans les insectes le système vasculaire aérifère remplit en même temps les fonctions de la respiration et de la circulation.

2° Nymphe. — L'existence dans la nymphe d'une seule paire de stigmates, les antérieurs, sa vie passive et sa reclusion dans la pupe, entraînent nécessairement une grande différence entre son appareil trachéen et celui de la larve et de la mouche. A chacun des stigmates s'abouche une trachée-artère de fort calibre qui occupe les flancs du corps et qui se termine en arrière par un bout libre, fermé en cul-de-sac ou borgne, pour me servir de l'expression consacrée. Dans son trajet, elle donne naissance à plusieurs trachées secondaires, dont les principales présentent, dans les deux moitiés du système, une parfaite symétrie. J'en ai compté à son côté externe sept ou huit distinctes, formant des arbuscules qui se distribuent surtout aux téguments, et qui sans doute, plus tard, iront se rattacher aux stigmates de la mouche.

[1] Dans les grandes larves de tipulaires (*tip. lanata*) qui n'ont que deux stigmates, les postérieurs, les deux grands canaux trachéens s'anastomosent à la partie antérieure du corps. Dans ce cas, l'air doit entrer et sortir par les mêmes stigmates.

On en trouve au côté interne un pareil nombre; la plus antérieure, en forme de houppe, les deux suivantes, toujours courbées en anneau ou en boucle, les quatre autres formant autant de fins canaux traversiers, simples ou ramifiés en guirlandes insérées aux deux trachées-artères; outre cela, le bout postérieur de celles-ci fournit un écheveau bien garni de sept à huit longues trachées rameuses, qui, s'inclinant les unes vers les autres, s'entremêlent, et vraisemblablement s'anastomosent.

A son insertion au stigmate, la trachée-artère émet d'abord au côté externe un assez grand tronc, qui se divise bientôt pour pénétrer dans les pattes et les ailes, puis, au côté interne, un canal traversier qui va d'un stigmate à l'autre et établit ainsi une communication directe entre le système de droite et celui de gauche; on voit aussi une sorte de bourre trachéenne entourant le cerveau et plusieurs trachéoles destinées au thorax.

Dans la nymphe de la seconde transition, le plus grand changement que subit l'appareil trachéen m'a paru consister principalement dans la multiplication des trachées nutritives.

3° Mouche. — La somme de respiration, toujours proportionnée au degré de l'énergie vitale et de la locomobilité, est bien plus considérable dans la mouche que dans les autres morphoses : aussi les canaux de la circulation aérienne y sont-ils bien plus multipliés. Comme insecte destiné à l'exercice fréquent du vol, la mouche possède les deux ordres de trachées : les utriculaires ou membraneuses, et les tubulaires ou élastiques. Examinons-les rapidement.

Deux grands ballons arrondis ou ovales, deux véritables aérostats, sont placés à la base de la cavité abdominale, et se rattachent aux trachées-artères qui leur correspondent. On découvre aussi de chaque côté des profondeurs du thorax une utricule oblongue qui émet une quantité si prodigieuse de trachéoles, que celles-ci semblent constituer un parenchyme comparable à celui que j'ai déjà fait connaître dans le thorax des coléoptères longicornes et dans celui des nèpes. Enfin, il existe dans l'inté-

rieur du crâne une abondance incroyable de bulles trachéennes, sur lesquelles le cerveau repose immédiatement, et au-dessous de ces bulles on trouve une sorte de feutre trachéen d'une teinte enfumée.

Quant aux trachées tubulaires, elles ont dans la mouche une disposition fort analogue à celle qu'on observe dans les insectes en général. Ainsi, il part de chaque stigmate un tronc qui s'abouche tout aussitôt dans le grand canal latéral ou trachée-artère, et celle-ci émet les diverses branches secondaires qui vont s'épanouir dans tous les viscères sur tous les tissus.

On n'aperçoit dans la larve ni dans les divers âges de la nymphe aucune trace de l'existence des trachées utriculaires : celles-ci s'improvisent donc, ou dans l'acte même de la dernière métamorphose, ou peu de temps après celle-ci.

ARTICLE 3.

Appareil digestif.

Cet appareil se compose, dans les trois formes de l'insecte, des glandes salivaires, du tube alimentaire et des vaisseaux hépatiques; il y a, outre cela, dans la larve quelques organes qui lui sont propres.

1° Larve. — Il faut se rappeler que cette larve est acéphalée, qu'elle a pour bouche une lèvre munie de deux palpes très-courts et deux crocs noirs cornés superposés, susceptibles de protraction et de rétraction. Ces crocs lui servent à la fois d'organes de préhension et de mandibules pour saisir, déchirer, triturer la viande gâtée, dont elle fait sa nourriture. C'est une larve fort vorace, et sa croissance est rapide.

Les *glandes salivaires*, que Swammerdam a aussi décrites dans le ver de sa mouche asyle et dans celui de sa mouche de fromage (*loc. cit.*), sont constituées par deux boyaux filiformes, presque aussi gros que le ventricule chylifique, à peine flexueux,

subdiaphanes, moins longs que la moitié du corps de la larve. Ces boyaux se terminent en arrière par des bouts fermés, borgnes, constamment rapprochés l'un de l'autre, unis, comme soudés par un flocon adipeux, de sorte qu'un œil peu pratique des dissections délicates pourrait croire à une anse continue formée par ces deux boyaux. J'ai découvert à ce point d'union un ligament bien plus fin qu'un cheveu, qui va se fixer au ventricule chylifique. En avant, ces boyaux *sécréteurs* de la salive aboutissent chacun à un *col* d'une ténuité plus que capillaire, et les deux cols confluent à un canal *excréteur* aussi délié qu'eux, qui va s'ouvrir dans la bouche ou à la base des mandibules.

Vers le tiers antérieur de ces boyaux, il existe toujours un cordon transversal qui se fixe à l'un et à l'autre, et que j'appellerai *épiploon salivaire*. Cette sorte de courte guirlande, étudiée au microscope, présente une texture, une composition qui semblent y déceler un organe, par conséquent des fonctions. On y constate des boursouflures subglobuleuses d'une teinte faiblement roussâtre, fixées, sans ordre, à un panicule membraniforme. Si c'est un tissu graisseux, il diffère certainement de la graisse ordinaire. J'insiste sur ce petit épiploon salivaire, soit parce qu'il constitue un organe nouveau pour la science, soit à cause de son absence absolue dans la mouche, tandis qu'on le retrouve dans la nymphe, soit enfin à raison de son analogie de texture avec ce qu'on a appelé le vaisseau dorsal. J'y reviendrai plus tard.

Le *tube alimentaire* a une longueur qui surpasse de sept fois celle du corps de la larve. L'*œsophage* est capillaire, droit et passablement long. Après s'être dégagé de la souche des mandibules, il passe dans le collier nerveux qui suit le cerveau, et va s'implanter brusquement au gésier.

La *panse* est une bourse submembraneuse, en massue oblongue, à peine atténuée en avant en un col plus ou moins boursouflé, qui s'insère, non pas à la terminaison de l'œsophage, comme dans l'insecte ailé, mais bien à son origine, de manière à mériter le

nom de panse *buccale*. Elle contient un liquide alimentaire roussâtre et fétide, parfaitement semblable à celui qui s'observe dans le ventricule chylifique, et, quand on a incisé les téguments de la larve vivante, c'est surtout elle qui fait hernie par l'incision; elle est quelquefois si énorme, qu'elle remplit les trois quarts de la cavité abdominale. Cette première poche gastrique, ne paraît pas exister dans la larve de la mouche du fromage (*piophila casei*).

Le *gésier* se voit exclusivement dans la larve, et ne se retrouve plus ni dans la nymphe confirmée, ni dans la mouche; il est ovoïde, à parois épaisses, rénitentes et calleuses. Son gros bout, où se fait l'implantation de l'œsophage, est légèrement déprimé en disque. La demi-transparence de ses parois permet de distinguer dans son intérieur un corps oblong qui en occupe l'axe et qui a une teinte obscure. Ce corps, qui est une continuation incluse de l'œsophage, semble avoir une texture plus dense, et se termine en arrière, vis-à-vis les points d'insertion des bourses ventriculaires, par un bout tronqué, où j'ai cru reconnaître une espèce de valvule par laquelle l'aliment s'écoule dans l'organe. Swammerdam [1], dans son anatomie du ver du fromage, appelle *jabot* le renflement auquel je donne le nom de gésier. Il signale dans l'estomac de la nymphe de sa mouche asyle (*stratiomys*) un corps inclus semblable à celui dont je viens de parler, et qu'il se contente de nommer *tuyau ouvert*.

Deux paires de *bourses ventriculaires* semi-diaphanes, capillaires, flexueuses, succèdent au gésier; elles ressemblent, par leur ténuité, aux vaisseaux hépatiques qui s'y entremêlent; mais elles sont bien moins longues qu'eux, et ne sont jamais ni jaunes, ni variqueuses. Elles se fixent, par quatre insertions isolées, dans un étranglement qui existe entre le gésier et le ventricule chylifique, et se terminent par des bouts libres qui flottent au milieu du tissu adipeux ambiant. Quoiqu'elles n'aient pas la forme de bourses, je leur ai donné cette dénomination à cause de leur in-

[1] *Loc. cit.* p. 476.

sertion près de l'origine du ventricule chylifique, comme les bourses ventriculaires qui s'observent, soit dans les orthoptères, soit dans plusieurs familles de diptères. On ne rencontre ni dans la nymphe, ni dans la mouche, rien qui représente l'organe que je viens de décrire. L'auteur de la *Biblia naturæ* a parlé de ces bourses sous le nom d'*appendices aveugles* [1].

Le *ventricule chylifique* ressemble à celui de la mouche, mais il est beaucoup plus long; il est filiforme et ployé sur lui-même en quatre circonvolutions complètes.

L'*intestin,* pareillement filiforme, mais moins long, ne présente à sa terminaison aucun renflement comparable à un rectum.

Les *vaisseaux hépatiques,* insérés de chaque côté de la terminaison du ventricule chylifique, sont au nombre de quatre subcapillaires très-longs, flexueux, plus ou moins remplis d'une bile jaune ou verte; ils sont variqueux, libres et flottants par un bout, et par l'autre ils s'unissent par paires, un peu avant leur insertion, en deux *canaux cholédoques* du même diamètre qu'eux.

2° Nymphe. — Dans la métamorphose de la larve en nymphe, l'appareil digestif de celle-ci a perdu, et la panse buccale, et le gésier, et les bourses ventriculaires, et enfin une grande partie de sa longueur.

Dans ce passage si fugace, que j'ai appelé la première transition, et dans le même individu qui m'avait fourni l'observation si piquante de la communauté momentanée de l'acte respiratoire pendant cette transformation, le canal digestif ressemblait encore à celui de la larve, tandis que, dans d'autres pupes de la même époque de formation, et qui avaient peut-être quelques heures de plus, ce canal, totalement différent, et pour sa forme et pour sa longueur, avait déjà revêtu tous les caractères de celui de la nymphe confirmée. Passons à celle-ci.

Les *glandes salivaires* conservent encore la forme qu'elles avaient dans la larve; mais les éléments qui les constituent ont si peu de

[1] *Loc. cit.* p. 476, pl. 28, fig. 9, ff.

cohésion, qu'ils se dissocient si la dissection n'est pas des plus circonspectes. Il faut être prévenu d'avance de leur siége, et avoir l'habitude des autopsies délicates, pour les mettre en évidence au milieu de la bouillie adipeuse où elles nagent. Ce sont deux boyaux filiformes comme dans la larve, mais d'un blanc mat (et non subdiaphanes), à cause des granules adipeux qui les remplissent. Leurs bouts postérieurs sont souvent libres et flottants par l'effet de la fonte du flocon graisseux intermédiaire. Nous trouvons facilement la raison de cette texture dissociable des glandes salivaires dans l'absence, l'inutilité des fonctions de cet organe dans un être qui ne prend aucune nourriture, et chez lequel, par conséquent, l'insalivation ne saurait avoir lieu. C'est donc un organe qui n'existe que pour la forme; il n'a survécu que pour devenir le réservoir de matériaux destinés à la reconstruction définitive des glandes salivaires dans la mouche. L'*épiploon salivaire* s'y retrouve avec les mêmes traits que dans la larve.

Le *tube alimentaire* de la nymphe confirmée, infiniment plus court que celui de la larve, a aussi une configuration spéciale intéressante à connaître dans tous ses détails. L'*œsophage*, d'une ténuité plus que capillaire et d'une fragilité désespérante, s'engage dans le collier nerveux du cerveau, pour aller s'implanter au centre du goulot ventriculaire. J'avoue que des investigations répétées, pour saisir son insertion dans un point quelconque de la tête, n'ont été suivies d'aucun résultat positif. Peut-être son bout antérieur demeure-t-il libre, ou simplement adhérent, jusqu'à la formation définitive du suçoir.

La *panse*, dans ce curieux organisme, où un semblable organe n'était pas plus nécessaire que les glandes salivaires, n'y est qu'ébauchée ou vestigiaire. Ce n'est plus une bourse vésiculaire insérée à l'origine de l'œsophage, comme dans la larve, ni une poche bilobée, surmontée d'un col capillaire, comme dans la mouche; c'est un boyau filiforme et blanc, très-fragile ou dissociable, courbé en une anse, dont les deux bouts sont fixés au goulot

du ventricule chylifique. On ne voit là, à proprement parler, qu'une gaîne de matériaux, de granules adipeux, qui attendent le moment favorable pour être employés à une création organique.

Le *ventricule chylifique* a éprouvé une refonte complète, qui le rend totalement différent de celui des deux autres morphoses de l'insecte. Au lieu d'un tube filiforme plusieurs fois reployé sur lui-même, on ne trouve plus qu'un sac assez ample, allongé et droit, dont l'origine est tantôt un bouton ovalaire, tantôt un godet mal épanoui, suivi d'un léger étranglement. Les parois de ce ventricule sont fort minces, pellucides, et le microscope y constate un pointillé des plus fins, des plus serrés; mais il ne m'y a jamais décelé la moindre trachéole. J'ai toujours trouvé cet organe plus ou moins rempli par un liquide roussâtre ou ambré, de consistance presque sirupeuse, qui ne doit pas être étranger aux créations subséquentes.

Dans l'intérieur de ce même ventricule, on rencontre constamment à tous les âges de la nymphe, et jamais dans la larve ni dans la mouche, un corps libre, détaché, d'une figure déterminée, que l'on prendrait, au premier coup d'œil, ou pour un coagulum, une concrétion, ou pour un entozoaire. L'existence de ce corps est un fait singulier, et je me suis attaché à l'étudier avec soin. C'est une *vésicule intra-ventriculaire* oblongue, à parois hyalines, remplie du même liquide ambré dont j'ai parlé plus haut. Elle renferme une substance libre, opaque, compacte, inorganique, comme sébacée, arrondie à ses deux bouts, avec un ou deux plis transversaux. La vésicule se termine en avant par un bout rond, et en arrière par une portion recoquillée sur elle-même, comme serait un prolongement tubuleux mutilé. Les lentilles les plus grossissantes ne m'y ont fait découvrir aucun vestige de trachée. On s'assure pareillement, quand on déchire la substance incluse, que celle-ci n'est effectivement qu'une concrétion albumineuse roussâtre ou blanchâtre, tantôt presque aussi grande, tantôt plus petite que son enveloppe.

Je me suis souvent demandé si cette vésicule intra-ventriculaire ne serait pas une portion du tube digestif de la larve, qui dans l'évolution métamorphosique, et par un de ces phénomènes organogéniques qui sont pour nous un mystère, se trouve incarcéré dans le nouvel estomac et y demeure comme un *caput mortuum*, destiné sans doute à être repris en sous-œuvre pour la création définitive de la mouche. Swammerdam, dans l'anatomie de la nymphe de sa mouche asyle (*stratiomys chamæleon*[1]), parle aussi longuement d'un petit intestin renfermé dans l'intestin ordinaire, mais bien plus long que dans la nymphe de notre sarcophage. Il cite aussi Thomas Willis comme ayant pareillement observé dans les vers de terre un intestin contenu dans un autre. Il présume que ce petit intestin incarcéré de la nymphe de sa mouche n'est que la membrane interne de l'estomac de la larve.

L'*intestin* de notre nymphe est parfaitement distinct du ventricule chylifique par un diamètre moindre; mais les éléments qui le constituent sont si peu cohérents, ou bien ont une si grande tendance à se dissocier, qu'il devient souvent fort difficile de le mettre en évidence. Il est filiforme et se courbe, peu après son origine, en une anse simple assez grande; il se termine en arrière par un petit renflement ovalaire, un *rectum* qui offre parfois la trace des quatre boutons charnus de la mouche, et qui dans d'autres circonstances en est dépourvu. Cet intestin, notablement plus long que celui de la larve, s'est toujours présenté à mes regards farci de granules adipeux. Dans quelques nymphes très-récentes, je l'ai trouvé si peu avancé dans sa formation, qu'il apparaissait au milieu de la pulpe abdominale comme une traînée filiforme de granules, comme un cordon fugace que le moindre contact rendait diffluent. Il est facile de se convaincre, dans le cours des dissections multipliées, que la création de l'intestin est postérieure à celle du ventricule, qui,

[1] *Loc. cit.* p. 456.

lui, semble d'origine fondamentale. Le bout postérieur du rectum se fixe à la partie correspondante de l'enveloppe abdominale, quoiqu'il n'y ait aucun vestige d'anus.

Les *vaisseaux hépatiques* ne diffèrent pas sensiblement de ceux de la larve et de la mouche; ils ont le même mode d'insertion, à peu près la même longueur, et ils se font remarquer par une couleur d'un jaune vif, passant souvent au roussâtre, excepté vers leur origine, où ils sont décolorés. Leurs canaux cholédoques s'insèrent, un de chaque côté, un peu avant la terminaison du ventricule : ces vaisseaux n'ont pas partout le même diamètre. Vers leur extrémité flottante, ils ont une finesse capillaire qui admet rarement la bile, tandis que dans d'autres points ils sont plus ou moins boursouflés; mais ces boursouflures ne présentent pas ce caractère de plis et de festons assez réguliers qu'on observe fréquemment dans les vaisseaux hépatiques qui ont fonctionné ou qui ont mis en jeu leur contractilité. Ce sont des dilatations difformes qui disparaissent à l'époque de la seconde transition, parce qu'alors ces vaisseaux sont plus uniformément remplis de bile. L'étude scrupuleuse de la distribution de ces canaux biliaires m'a dévoilé un fait dont l'application est peut-être plus générale que je ne l'avais cru jusqu'à ce jour : c'est que les deux vaisseaux hépatiques qui se distribuent à la moitié antérieure du corps de la nymphe appartiennent exclusivement au canal cholédoque droit, et ceux destinés à la moitié postérieure au canal cholédoque gauche. Depuis que j'ai eu établi ce fait, j'ai disséqué des larves pour étudier cette même disposition, et je l'ai constatée. Les canaux cholédoques varient pour leur longueur, sans doute, suivant l'époque de leur formation; ils sont le plus souvent aussi longs que dans la larve et dans la mouche; mais je les ai parfois trouvés notablement plus courts. J'ai même observé dans un individu une anomalie assez singulière : c'est que l'un de ces canaux avait la longueur ordinaire, tandis que l'autre, surpris et arrêté dans l'acte de sa création, ne consistait qu'en un flocon adipeux de forme oblongue. C'é-

tait un tas de matériaux à pied d'œuvre pour une construction fort prochaine.

Pour terminer le parallèle de l'appareil digestif dans la larve et la nymphe, et pour nous acheminer ainsi au type de perfection de celui de la mouche, il me reste à faire connaître l'état de cet appareil dans la nymphe de la seconde transition, de cette époque si importante pour l'étude des phénomènes organogéniques.

Le tube digestif et ses annexes jouent incontestablement le principal rôle physiologique dans l'acte mystérieux des créations, puisqu'ils existent avec tous leurs attributs dans les diverses morphoses de l'insecte. C'est un viscère de première formation; il est l'axe fondamental de la splanchnologie; c'est celui dont les phases organiques excitent le plus puissamment la curiosité et l'intérêt. Malgré son défaut de contractilité et de sensibilité manifestées, il doit être l'agent principal de cette nutrition moléculaire qui crée les tissus organiques; il recèle dans tous ses points le principe vital qui plus tard, mis en éveil et en activité, va animer les organes.

La métamorphose des *glandes salivaires* à l'âge de la seconde transition est des plus complètes, c'est-à-dire que ces organes sécréteurs ne ressemblent plus en rien à ce qu'ils étaient dans la larve et dans la nymphe confirmée, et qu'ils ont revêtu tous les traits propres à ceux de la mouche. Remarquons que dans la nymphe, où aucun aliment du dehors n'est introduit dans le corps, où les organes de préhension et de succion sont tout à fait inhabiles à fonctionner, les glandes salivaires sont aussi des organes déchus de leurs attributions; elles ne semblent figurer dans l'organisme que pour mémoire. Rappelons-nous que, quoique ces glandes eussent la même forme, le même épiploon salivaire que dans la larve, elles avaient déjà éprouvé dans leur cohésion, dans leur consistance, une altération telle, que leurs éléments constitutifs tendaient à se dissocier, à diffluer à la moindre traction, au moindre contact. Cette tendance à se démolir, à se

fondre, va toujours croissant, et dans les nymphes très-rapprochées de la seconde transition, les boyaux salivaires, malgré la dissection la plus circonspecte, n'offrent plus que des lambeaux, reconnaissables surtout à l'épiploon salivaire, qui subsiste encore. Ils se détachent des conduits excréteurs, qui leur survivent à raison d'une texture plus fibreuse. A l'âge révolu de la seconde transition, ils ne décèlent leur existence par aucun vestige, et ils se sont transformés en une dilatation vésiculeuse, terminée en arrière par un très-long tube capillaire. Celui-ci, dans le principe de sa création, ne semble consister qu'en un filet de granules adipeux; j'ai même disséqué des individus de cette transition où ce tube capillaire n'existait pas encore, quoique la vésicule fût bien formée. Cet échange improvisé, cette fonte dans un moule nouveau, ont éludé l'avidité de mes regards, ont trompé mon espoir de surprendre ce secret. Par des autopsies multipliées, j'ai pu suivre les progrès de la démolition de l'organe, j'ai pu en constater les matériaux épars, mais il ne m'était pas réservé d'en saisir *ex visu* la reconstruction. Un instant fugace d'une vitalité productrice aura sans doute suffi pour cette création, et il faut bien s'humilier devant le mystère.

J'ai déjà signalé la grande différence de longueur, de structure et de composition qui existe entre le canal alimentaire de la nymphe confirmée et celui de la larve. Nous allons voir maintenant par quelles modifications ce canal arrive à son type définitif de l'insecte parfait.

L'*œsophage*, tout aussi fin, mais moins fragile que dans la nymphe confirmée, est cependant un peu moins consistant que dans la mouche. La *panse*, qui dans l'âge précédent n'avait qu'une existence rudimentaire et ne consistait qu'en un boyau blanc, fort tendre, ployé en anneau, a fait sa complète évolution en passant à la seconde transition, et a revêtu la forme qu'elle doit conserver dans la mouche. Son col, long et délié, se termine par un réservoir bilobé qui a déjà gagné la cavité abdominale, et qui est affaissé, plissé, plus ou moins difforme, parce qu'il est vide.

Le *ventricule chylifique,* muni à son origine d'un bourrelet en godet comme dans la mouche, n'est pas, ainsi que dans l'âge précédent, une simple dilatation gastrique oblongue et droite. En suivant pas à pas son développement dans les nymphes qui approchent de la seconde transition, on le voit s'allonger graduellement, de manière que l'insertion hépatique s'éloigne de plus en plus du godet. Son allongement n'a d'abord lieu qu'à sa partie postérieure atténuée. Dans les nymphes où cette atténuation commence à s'opérer, j'ai constaté un fait qui, tout minime qu'il paraît, ne laisse pas que d'avoir quelque importance physiologique. Le bout postérieur du ventricule, celui où se fait l'insertion des canaux cholédoques, est devenu plus blanc, plus compacte. Les éléments de création y semblent accumulés, agglomérés, pour servir au développement des parois ventriculaires. Ce sont des matériaux qui attendent d'être passés au laminoir organogénique pour constituer la membrane de cette poche gastrique, qui va tout à l'heure prendre de l'extension. Par les progrès de l'âge, les puissances musculaires venant à se développer dans leur grand réceptacle, le thorax, la portion du ventricule qui traverse celui-ci se rétrécit, prend la forme d'un fil, tandis que celle de la cavité abdominale conserve encore son ampleur; puis cet organe devient cylindrique, tubuleux, parfois un peu boursouflé, pour être bientôt régulièrement filiforme. Dans l'acte de cette nouvelle dimension, il commence par être simplement flexueux, et finit par se replyer en une, puis en deux circonvolutions. Dans ce dernier état, il a acquis le complément de sa croissance et se conserve ainsi dans la mouche. A mesure que ces mutations s'opèrent dans le silence (et je rappelle que dans ces créations la contractilité est toujours insensible), les trachées nutritives vont se multipliant, soit à la surface, soit dans l'intérieur des parois. J'oubliais de dire que, dans cette seconde transition, on rencontre aussi dans toute l'étendue du ventricule chylifique le liquide ambré et sirupeux de l'âge précédent, et, dans sa dilatation abdominale, le corps vésiculaire dont j'ai parlé.

Au milieu de ces développements progressifs, les *vaisseaux hépatiques* semblent demeurer stationnaires, ou du moins ne subissent pas de changement notable dans les différents âges de la nymphe non plus que dans la larve; on les trouve toujours plus ou moins remplis d'une bile jaune ou verte. Cette immuabilité, pendant les trois morphoses de l'insecte, est un trait d'une grande valeur physiologique, et place cet organe parmi ceux de première formation. Cette sécrétion permanente et active de la bile dans toutes les phases de la nymphe est un fait essentiel à enregistrer, parce qu'il se lie évidemment à l'acte de cette nutrition moléculaire, de cette assimilation presque passive qui fournit aux créations ou aux développements organiques.

L'*intestin* de la seconde transition, bien plus court que le ventricule, est absolument celui de la mouche; il est blanc, filiforme, tantôt simplement flexueux, tantôt reployé en une circonvolution. Le *rectum*, qui le termine, est renflé et muni de deux paires de boutons charnus conoïdes.

3° Mouche. — C'est formuler une loi physiologique que de dire que la composition, la complication d'un appareil organique, donnent la mesure d'une fonction plus active et plus perfectionnée. On trouve l'application de cette loi dans l'étude, l'appréciation comparatives de l'appareil digestif de la mouche et de la larve.

Certes, l'organisme de l'insecte ailé, qui est le complément de toutes les créations métamorphosiques, est incontestablement plus avancé, plus parfait, que celui de la larve rampante, puisqu'il a un plus grand nombre d'organes dans le plein exercice de leurs fonctions; cependant, son appareil digestif, considéré anatomiquement et physiologiquement, est moins parfait que celui de la larve. Il faut se rappeler, à ce sujet, que celle-ci a une vaste panse buccale, un gésier et des bourses ventriculaires qui ne se rencontrent pas dans la mouche; il faut se rappeler encore que la larve concentre toutes ses facultés vitales dans un seul appareil, celui de la digestion, parce que, pour subir au temps

prescrit sa métamorphose, elle est pressée du besoin d'une croissance rapide : aussi est-elle d'une extrême voracité. Dans la mouche, dont la grande mission physiologique est la propagation de l'espèce, l'appareil digestif, plus simple et d'un exercice beaucoup moins actif, n'a qu'à entretenir l'état actuel des organes et à fournir au développement, à la turgescence de l'appareil génital.

Ce que je viens de dire sur le déroulement de l'appareil digestif dans la seconde transition de la nymphe suffirait presque pour faire connaître cet organe dans la mouche; je me bornerai donc à une description succincte, afin de compléter le parallèle de ce viscère dans les trois morphoses du diptère.

Les *glandes salivaires* de la mouche ont la composition propre aux organes sécréteurs bien conditionnés : ainsi, l'on y voit un vaisseau *sécréteur* sous la forme d'un conduit capillaire simple, très-flexueux, plus long que tout le corps de l'insecte, libre et flottant par un bout, renflé près de la tête en un *réservoir* sphéroïdal, précédé d'un col très-fin, dont l'union avec son congénère forme un canal *excréteur* qui s'ouvre à l'origine du suçoir.

Le *tube alimentaire* est filiforme, quatre fois plus long que le corps. L'*œsophage* est fort court et délié; il y a une *panse* à col long et fin comme un cheveu, inséré d'une part à la terminaison de l'œsophage, et aboutissant de l'autre à un grand réservoir bilobé, qui atteint la base de la cavité abdominale, et est plus ou moins rempli d'un liquide incolore. Le *ventricule chylifique* succède brusquement à l'œsophage et débute par un bourrelet en godet; il forme à lui seul les deux tiers de la longueur de tout le canal digestif et se reploie en deux circonvolutions. L'*intestin* en est séparé par une *valvule pylorique;* il est d'abord grêle, filiforme, flexueux, puis, avant sa terminaison à l'anus, il se renfle en un *rectum* ovalaire, qui a dans ses parois deux paires de boutons charnus pyramidaux.

Les *vaisseaux hépatiques* sont, je le répète, semblables à ceux des morphoses précédentes.

On ne rencontre plus dans le canal digestif de la mouche aucune trace de la vésicule intra-ventriculaire que nous avons constamment trouvée dans les diverses phases de la nymphe, même dans les derniers temps de la seconde transition; seulement, lorsque la mouche vient de se dépouiller de sa tunique nymphale, le tube alimentaire contient encore une certaine quantité de ce liquide sirupeux que j'ai signalé, et dans les diverses manœuvres qu'elle exécute, soit pour déployer ses ailes, soit pour disposer ses pattes à l'ambulation, elle évacue par l'anus des gouttelettes de cette espèce de méconium.

ARTICLE 4.

Tissu adipeux splanchnique.

1° LARVE. — L'organe digestif, le seul en exercice actif dans la larve, est plus ou moins enveloppé, dans tout son trajet, par des nappes, des tabliers adipeux blancs, le plus souvent membraniformes, irrégulièrement percés à jour comme un crible. Lorsque la larve se prépare à sa métamorphose, ces toiles membraneuses se condensent, se resserrent, et leurs trous se convertissent en un réseau ou une gaze grossière, dont les mailles sont formées par des granules arrondis, contigus et adhérents, placés à la file sur un même plan.

2° NYMPHE. — Ainsi que je l'ai déjà dit, le corps, dans cette morphose du diptère, est un sac sans ouverture, tellement rempli d'un liquide et de pulpe adipeuse, que la pression la plus légère fait fluer et refluer celle-ci dans tous les sens, et qu'à la moindre incision elle s'échappe hors du corps en jaillissant. Cette pulpe n'est pas tout à fait identique dans toutes les périodes de cette forme. Dans la première transition, elle a des traits qui sont communs à la dernière phase de la larve et à la nymphe confirmée; ainsi, on y voit quelques guenilles membraneuses perforées, des mailles granuleuses et des granules libres : ces

derniers sont exclusivement propres à la nymphe confirmée et à la seconde transition. Ces granules blancs, sphéroïdes et immergés dans un liquide nourricier, sont formés par un sachet rempli d'une pulpe très-fine homogène. Quand on les met dans l'eau, ils en gagnent aussitôt le fond, ce qui fait penser que c'est une graisse d'une nature spéciale. Dans ce passage de la nymphe à la mouche qui caractérise la seconde transition, j'ai observé que les granules adipeux adhéraient aux trachéoles nutritives et semblaient ainsi s'animaliser davantage.

3° Mouche. — Dans les individus récemment nés dans mon laboratoire, comme dans le plus grand nombre de ceux saisis à la campagne, j'ai trouvé le tissu adipeux consistant, ainsi que dans la nymphe, en granules globuleux libres, mais moins abondants. Dans une femelle avancée dans la gestation, et au mois d'août, j'ai constaté au-dessous des viscères des lambeaux adipeux membraniformes, semi-diaphanes et sans granules.

La circonstance d'un ovaire très-développé, condition de l'organisme, surtout dans notre diptère vivipare, où la nutrition créatrice a une grande activité, et où il doit, par conséquent, se dépenser beaucoup de granules adipeux, cette circonstance, dis-je, est peut-être la principale, sinon l'unique cause de l'absence de ceux-ci.

Dès mes premières publications entomotomiques, j'ai appelé l'attention des physiologistes sur le tissu graisseux splanchnique, qui, sous des formes très-variées, abonde plus ou moins autour des viscères, suivant le genre de vie des insectes. J'ai fait connaître ses principales attributions dans l'acte nutritif : ces dernières sont peut-être plus étendues dans les métamorphoses de la sarcophage. Les granules adipeux ont surtout à mes yeux une grande valeur physiologique : je les considère comme des matériaux de nature plastique, destinés à jouer un rôle important dans la création des tissus, dans l'organogénie. Cette substance animale ne commence à prendre la forme granuleuse qu'à l'époque où la larve se sent travaillée du besoin de subir sa trans-

formation en nymphe ; mais même alors ces granules, par leur adhérence mutuelle, constituent un réseau animé d'une vie collective. Ce n'est qu'après l'accomplissement de la forme nymphale, et particulièrement dans les deux derniers âges, qu'ils s'isolent les uns des autres, deviennent libres au milieu du liquide nourricier qui inonde et imbibe tous les tissus, et que chacun d'eux est pénétré du principe vivifiant. Soumis alors à une loi d'attraction ou d'affinité vitale que je ne saurais bien définir encore, soumis aussi à cette sensibilité élective des divers tissus dont la pathologie humaine fournit de nombreux exemples, j'ai vu ces moellons organogéniques, qu'on me passe le terme, se disposer en séries linéaires, se fondre en flocons ou s'étendre en nappes, et créer enfin, en se cimentant, des conduits, des articulations, des membranes, etc., dont ces globules avaient primitivement tracé, esquissé la configuration. Dans l'exposition des développements organiques de la nymphe, j'ai déjà signalé plusieurs exemples de cette curieuse disposition et de ses divers progrès.

ARTICLE 5.

Organe dorsal.

Je désigne provisoirement sous cette dénomination un organe que l'on rencontre toujours le long de la région dorsale des trois morphoses de la sarcophage, et qui est l'analogue du *vaisseau dorsal* des divers auteurs. On verra pourquoi j'ai substitué le mot d'organe à celui de vaisseau. Quoiqu'il présente la même composition, la même structure dans la larve, la nymphe et la mouche, comme il est sensiblement plus développé dans la nymphe, c'est celui de cette dernière qui a servi de type à ma description et à mes figures.

Cet organe est situé à la ligne médiane du dos, immédiatement au-dessous de l'enveloppe tégumentaire et au-dessus des viscères; il se fixe par un bout au godet du ventricule chylifique,

sans pénétrer dans la cavité de celui-ci, et par l'autre à l'extrémité postérieure du tégument dorsal. Cette double insertion est un fait positif que j'ai constaté un fort grand nombre de fois. Je distinguerai dans cet organe son *axe* ou *cordon*, ses *ailes* ou *garniture*.

Entre ses deux points d'insertion, le *cordon axal* est d'une texture uniforme d'un bout à l'autre; on ne lui reconnaît aucun indice, ni de cavité, ni d'articulation ou étranglement, ni de valvule, ni de ramification; il est partout aplati, uni, subdiaphane. Ce n'est donc ni un tube, ni un vaisseau; c'est un simple cordon ou ruban, où la plus forte lentille microscopique ne met en évidence qu'un pointillé subtil qui n'est pas celui des autres tissus du même insecte. Ce pointillé semble, au premier coup d'œil, analogue à celui du ventricule chylifique; mais les points y sont moins serrés, moins uniformément rapprochés.

Mais si l'axe de l'organe dorsal est d'une texture identique dans toute son étendue, il n'en est pas ainsi de sa garniture. En considérant l'organe dans son ensemble, on peut le diviser en deux parties aussi distinctes par leur siége que par leur organisation, et auxquelles je donnerai les noms de portion *thoracique* et de portion *abdominale*.

La portion *thoracique* est brusquement distincte de l'abdominale, et par un plus petit diamètre, et par l'absence de garniture latérale. Elle est simple, nue et libre, c'est-à-dire sans aucune adhérence sur ses côtés; elle se réduit à un prolongement un peu atténué de l'axe de la portion abdominale, et, ainsi que je l'ai déjà dit, elle s'insère au godet ventriculaire.

La portion *abdominale* offre aux bords de son cordon axal une garniture d'une texture assez compliquée. Son tiers postérieur est bordé de *sphérules* en nombre constant, et les deux tiers antérieurs, d'une fraise *mésentériforme*, ce qui permet d'y établir deux divisions anatomiques parfaitement tranchées.

La portion *sphéruleuse* prend cette dénomination de douze paires de sphérules sessiles, rapprochées ou même contiguës, à

parois hyalines, plus ou moins colorées par une humeur roussâtre plus foncée dans les nymphes de la seconde transition, fort rarement subdiaphanes. Ces sphérules se terminent chacune par un filet d'une ténuité qui surpasse celle du plus fin cheveu. Ce filet ne m'a paru que la continuation de la tunique propre de la sphérule, et je le regarde comme un ligament. J'ai constaté à diverses reprises l'anastomose de ces ligaments, soit entre eux, par des lambeaux de leurs bases, soit avec le panicule musculo-membraneux du tégument, soit enfin avec les premiers lobes de la portion mésentériforme. Ils ne sont ni des filets nerveux, ni des conduits excréteurs. Le microscope le plus scrupuleux n'y décèle que la texture propre aux membranes ou aux expansions musculaires en création.

La portion *mésentériforme* est garnie des deux côtés de son axe par une sorte de fraise ou de mésentère adipo-membraneux assez large; mais celui-ci ne semble pas se continuer avec le tissu du cordon : on dirait qu'il y est simplement adhérent. J'ai, du moins dans diverses dissections, pu soustraire à ce cordon de grands lambeaux du mésentère sans opérer de déchirement ni à celui-ci, ni à celui-là. Les bords de la fraise ont des lobes ou des plis qui se correspondent assez régulièrement à droite et à gauche. Quoique identique dans toute son étendue, ce tissu n'est pas, comme on pourrait le croire au premier aspect, une membrane adipeuse ordinaire. Son étude attentive y constate, indépendamment d'une membrane hyaline, de très-petites granulations, sensibles surtout au pourtour des lobes, un peu moins prononcées et parfois confuses ailleurs. Elles sont infiniment moins évidentes dans la larve et la mouche; elles rappellent par leur forme, et souvent par une nuance roussâtre, celles de l'épiploon salivaire de la larve et de la nymphe; elles ont aussi de l'analogie avec les sphérules de la portion sphéruleuse, mais elles ont une petitesse microscopique et sont nichées dans la membrane hyaline du mésentère, ou peut-être entre les deux feuillets de cette membrane.

Cette frange mésentérique a de chaque côté quatre ligaments longs, simples, capillaires, qui partent, d'une manière symétrique, d'autant de lobes principaux. Dès leur insertion à ces derniers, ils s'élargissent et semblent n'en être que des lanières; ils se perdent, par le bout opposé, dans les tissus du voisinage. J'ai soigneusement étudié, avec le secours des plus fortes lentilles microscopiques, la texture intime de ces ligaments, et je me suis assuré qu'ils ne sont ni des conduits excréteurs, ni des trachées, ni des nerfs : ils ont la plus grande analogie avec le tissu membraneux. J'ai cherché à découvrir, mais toujours infructueusement, leurs connexions avec les longues paires de nerfs qui partent du ganglion thoracique. Toutes ces investigations, cent fois renouvelées dans les divers âges de la nymphe, m'ont fixé pour la dénomination de *ligaments*.

Voilà tout ce que le témoignage de mes sens, secourus par une microscopie circonspecte, m'a appris sur les traits anatomiques de cet organe dorsal de la sarcophage, demeuré inaperçu jusqu'à ce jour. Quoique le scalpel et des méditations réitérées ne m'aient encore rien appris de très-positif sur ses fonctions, je ne laisserai pas que d'exposer mes tentatives pour soulever le voile épais qui enveloppe ce point de physiologie.

Si l'importance des attributions physiologiques est proportionnée, comme je le pense, à la complication anatomique des appareils qui y président, il n'est pas douteux que l'organe dorsal ne doive remplir des fonctions assez élevées. La forme, la contexture, la situation et les connexions sont, sans doute, des conditions anatomiques de première valeur pour nous mettre sur la voie de découvrir la destination fonctionnelle des instruments organiques. Cependant, quoique j'aie souvent et longtemps étudié ces conditions, je suis forcé de me récuser pour la solution du problème. Je ne crains pas de confesser que mon esprit flotte encore au milieu des doutes et des incertitudes. Ma curiosité, tout impatiente qu'elle est, ne s'élancera pas trop haut dans le champ des conjectures. Mon amour-propre d'auteur ne se croit

pas compromis en n'épuisant pas mon sujet, et en laissant à d'autres, contemporains ou neveux, des faits à expliquer. Quoi qu'il en soit, il est plus facile de signaler les fonctions que cet organe n'est pas appelé à exercer que de se fixer sur celles qu'il exerce en réalité. Suivons cette voie d'exclusion.

Rappelons sommairement les principales données anatomiques de l'organe dorsal.

1° Il se fixe, d'une part, au bourrelet ventriculaire, et, de l'autre, à l'extrémité postérieure du tégument dorsal, sans aucune issue à ses deux bouts.

2° Entre ces deux insertions, le cordon axal est simple, sans cavité, par conséquent sans aucun liquide contenu.

3° Ce cordon, dans la région thoracique, est nu et libre sur ses bords.

4° La portion abdominale de ce cordon a ses deux tiers antérieurs garnis d'un mésentère adipo-membraneux maintenu par des brides ligamenteuses, et le tiers postérieur bordé de douze paires de sphérules sessiles munies de ligaments propres.

5° Enfin, cet organe n'a jamais offert à mes investigations microscopiques le moindre mouvement appréciable, ni général, ni fibrillaire ou moléculaire, soit dans la mouche et la larve, qui jouissent d'une contractilité énergique, soit, à plus forte raison, dans la nymphe, dont tout l'organisme semble frappé d'une insensibilité absolue.

Pouvez-vous à ces traits reconnaître un appareil de circulation humorale? Y voyez-vous un organe central, un organe moteur, dont les dilatations et les contractions alternatives impriment à un liquide contenu un mouvement de projection? Découvrez-vous des vaisseaux plus ou moins ramifiés qui partent de cet organe central ou qui y aboutissent, qui soient destinés à pénétrer tous les tissus et à fournir partout, dans leur double trajet, des éléments nourriciers? Non, le scalpel, malgré ma longue pratique, ne m'a rien démontré d'analogue, et, avec la meilleure volonté du monde, on ne saurait voir là un organe circulatoire.

Est-ce donc un organe sécréteur, une glande? Ici, je ne saurais me prononcer pour une négative aussi absolue que dans la question précédente. Voyons si dans une revue rapide des organes sécréteurs des insectes, en général, l'invocation de l'analogie pourra nous venir en aide pour cette solution.

Parmi les glandes des insectes, les unes sont *accessoires* et les autres *essentielles*. Je vais m'expliquer.

Les glandes *accessoires* sont celles qui font partie d'un appareil organique, avec lequel elles communiquent anatomiquement par des canaux, et aux fonctions duquel elles s'associent par l'épanchement du produit de leur sécrétion. Telles sont les glandes salivaires et le foie pour l'organe digestif, et la glande sébifique pour l'organe génital femelle.

Les glandes *essentielles* ont des fonctions isolées de celles des autres appareils, et sécrètent une humeur spéciale que, dans certaines conditions, l'insecte élimine à son gré au dehors : ce sont les glandes sérifiques, vénénifiques, odorifiques, etc. Je n'y comprends pas l'appareil génital, quoique, surtout dans le sexe mâle, il revête tous les caractères d'un organe sécréteur.

Il n'y a certainement dans l'organe dorsal de la sarcophage aucune connexion avec un appareil organique qui soit établie par un conduit efférent ou excréteur : car, je le répète, son insertion au godet du ventricule ne pénètre pas dans la cavité de celui-ci, et les brides ligamenteuses destinées à le maintenir en place ne présentent, dans leur texture intime, rien qui puisse les faire envisager comme des canaux excréteurs; ainsi, cet organe ne saurait appartenir à la classe des glandes accessoires.

Si nous soumettons à une semblable analyse comparative les glandes essentielles des insectes et l'organe dorsal de la sarcophage, nous trouverons encore une énorme différence entre eux. D'abord, ces glandes sont toujours binaires ou disposées une de chaque côté du corps, ce qui ne s'observe point dans l'organe dorsal; puis, chacune de ces glandes se compose ordinairement: 1° d'un organe *préparateur*, ou chargé de la sécrétion proprement

dite; 2° d'un organe *conservateur,* ou d'un réservoir où l'humeur sécrétée s'élabore par son séjour; 3° enfin, d'un canal *excréteur* qui s'ouvre au dehors et qui met en œuvre le produit de la glande. Dans l'organe dorsal, on voit bien une portion mésentériforme et la double série des sphérules qui peuvent, jusqu'à un certain point, supporter la comparaison avec l'organe préparateur des glandes essentielles; mais où trouverons-nous un réservoir, puisque l'axe de cet organe, qui semblerait devoir en tenir lieu, ne m'a jamais offert le moindre vestige de cavité, et que ses deux extrémités par lesquelles il se fixe n'ont aucune issue?

Maintenant, je dirai en peu de mots ma façon de penser sur l'organe dorsal. Je le considère comme un organe sécréteur, dont la forme, la composition et la structure sont spéciales. Le produit de sa sécrétion, au lieu d'être émis par des canaux efférents, peut être exhalé par une sorte de transsudation dans l'intérieur du corps de l'insecte, pour être ensuite repris pour une création organique. Mais quelle est la nature de ce produit? quelle est sa destination physiologique? C'est ici que je m'humilie; c'est ici que j'en appelle à de plus habiles ou à de plus heureux que moi.

DEUXIÈME DIVISION.

DE LA PRÉTENDUE CIRCULATION DANS LES INSECTES.

Les assertions de Dugès, dans sa Physiologie posthume, sur l'existence de la circulation dans les insectes, avaient, je l'avoue, ébranlé mon opposition à cette doctrine, et m'avaient fait naître des scrupules relativement à la manière dont je m'étais expliqué sur cette question, si controversée, dans mes Recherches anatomiques sur trois ordres d'insectes (orthoptères, névroptères et hyménoptères), publiées dans les Mémoires de l'Académie des sciences. Les travaux de ce professeur, si prématurément enlevé à la science, et mes relations avec lui, m'avaient dès longtemps appris à connaître et toute la sagacité de son esprit, et

toute la solidité de son jugement Sa conviction, sa réfutation de mes écrits, portaient le cachet de la sincérité, et je fus touché de l'espèce de compensation qu'il semblait m'offrir, en me faisant l'honneur de me classer, avec Cuvier et M. Marcel de Serres, parmi les incrédules de cette circulation [1]. Stimulé par cette provocation, en même temps que jaloux de partager la conviction d'un savant pour lequel je professais une grande sympathie, j'aiguisai mes scalpels et je me livrai avec une ardeur nouvelle à des investigations spéciales sur la circulation dans les insectes. Ce sont les résultats de ces dernières que je vais exposer.

A une époque où les idées de circulation préoccupaient toutes les têtes, Malpighi, témoin des mouvements de contraction et de dilatation alternatives qui se passaient sous la peau de la ligne médiane dorsale du ver à soie, n'hésita pas à leur donner les noms de *systole* et de *diastole*, quoiqu'il eût remarqué leur irrégularité, et à consacrer celui de *cœur*, ou série de petits cœurs (*cor et corcula*), pour l'organe qu'il supposait l'agent principal de ces mouvements. Mais en même temps cet illustre anatomiste déclare n'avoir constaté aucune branche à ce cœur, et il avoue même que ses extrémités sont fermées et borgnes.

Swammerdam n'a pas été plus heureux que Malpighi pour découvrir dans le vaisseau dorsal les conditions propres à un organe central de circulation. Si, dans un de ses premiers mémoires, il a dit une fois, selon l'observation judicieuse de Cuvier, qu'en injectant un liquide coloré dans le cœur d'une sauterelle, il avait vu se colorer les autres parties du corps, il ne l'a plus répété, et sa célèbre *Biblia naturæ* n'en fait pas mention.

[1] M. le professeur Lacordaire, dans son savant Répertoire sur les généralités de l'entomologie, me désigne à tort comme le seul qui refuse une circulation aux insectes. Je n'hésite pas à placer, à la tête des mécréants de celle-ci, Malpighi, Swammerdam et Lyonet, qui, malgré la dénomination de *cœur*, déclarent n'avoir jamais découvert à ce dernier ni vaisseaux, ni ouvertures, et nient ainsi implicitement une circulation. Indépendamment de Cuvier et de M. Marcel de Serres, MM. les professeurs Duméril (*Considérations générales sur les insectes*), Duvernoy (*Leçons d'anatomie comparée*, 1839) et Audouin (*Histoire de la pyrale*) ne croient pas non plus à une circulation vasculaire dans les insectes.

Dans les dissections de la larve de l'éphémère, de la larve et de l'insecte parfait du *scarabée monocéros*, de la mère *abeille*, de la chenille et de la chrysalide du *papilio polychloros*, du ver de sa mouche asyle, etc. le cœur est toujours un organe simple, c'est-à-dire sans aucune branche.

Lyonnet, l'habile investigateur des mille canaux, des mille fibres de la chenille du saule, n'avança pas les travaux de ses prédécesseurs sur l'existence de la circulation dans les insectes. Il s'assura de l'absence de toute division au vaisseau dorsal; il confirma que ses extrémités fixées étaient sans issue, et lui refusa le nom de cœur.

Il me semble superflu de faire une sérieuse réfutation des illusions par trop patentes de Comparetti, en 1800.

Il y a plus de quarante ans (en 1798) que notre grand Cuvier, si familiarisé avec les plus fines injections, les essaya de toutes les manières sur le vaisseau dorsal; mais il le trouva constamment réfractaire. Il ne fut pas plus heureux en portant les lentilles microscopiques les plus puissantes sur les membranes intestinales des insectes, afin d'y découvrir des vaisseaux autres que les trachées; jamais il ne put en apercevoir le moindre vestige.

M. Marcel de Serres[1] a sanctionné par des expérimentations nombreuses et extrêmement variées, sur des insectes et des larves de tous les ordres, celles déjà si concluantes de Cuvier. Les autopsies et les injections l'ont convaincu, non-seulement qu'il n'existait aucune ramification au vaisseau dorsal, mais que les extrémités de celui-ci étaient fermées ou sans issues. Cet auteur nie donc formellement l'existence d'une circulation sanguine ou humorale dans les insectes.

N'est-ce pas une chose incompréhensible qu'après des autorités si imposantes, des témoignages si graves, qui s'accordent à ne pas reconnaître au vaisseau dorsal des insectes les conditions anatomiques d'un organe circulatoire, des zootomistes modernes,

[1] *Observations sur les usages du vaisseau dorsal, etc.* présentées à l'Institut en 1813.

tout en adoptant implicitement ce dernier trait négatif, s'aheurtent néanmoins à admettre une circulation humorale dans ces animaux?

Quant à mon opinion, qui est fondée sur la dissection de près de sept cents espèces d'insectes des divers ordres, tant à l'état de larves qu'à l'état parfait, je la formule hautement en ces termes : « Non, il n'existe point dans les insectes hexapodes « d'appareil vasculaire pour la circulation du sang ou d'un liquide « analogue. » Venons aux preuves.

Si je descends encore dans une arène où j'ai déjà, à plusieurs reprises, essayé mes armes, c'est avec un arsenal de faits anatomiques et d'inductions physiologiques qui porteront, je l'espère, le dernier coup aux partisans de la circulation.

Eh quoi! dans une question de si haute portée, c'est dans les simples oscillations hydrauliques ou dans des mouvements hétérochrones fournis par de jeunes larves d'éphémère, de cousin, d'agrion, de nèpe ou d'un dytique, au sortir de l'œuf, ou par la patte diaphane d'une coryze, ou par le coin pellucide d'un tégument, que Wagner, Carus, Dugès, Behn, etc. viennent établir l'existence d'un appareil circulatoire dans les insectes! Et pourquoi, si le microscope leur révèle cette circulation dans des êtres aussi minimes, aussi imparfaits, ne nous la démontrent-ils pas plus palpable, mieux conditionnée dans des larves ou des insectes parfaits, que leur taille rendrait bien plus propres à ces démonstrations? Pourquoi n'ont-ils pas choisi pour types de leurs dissections le *sphinx atropos* et sa chenille, qui a cinq pouces de longueur, l'*hamatichærus heros* et sa larve, longue de trois pouces, le *lucanus cervus*, l'*œdipoda migratoria*, la *libellula grandis*, et tant d'autres grands insectes?

Mais voyez jusqu'à quel point, pour soumettre les faits au joug d'un système préconçu, on a altéré la valeur des termes consacrés, ou quelle élasticité on leur a prêtée! Qu'entend-on par circulation, si ce n'est une fonction par laquelle le sang (ou un liquide qui le représente), renfermé dans des vaisseaux clos, est mis en mouvement continuel pour servir à l'acte nutritif?

Or, vous trouverez, dans les écrits des savants les plus accrédités sur la matière, des assertions contradictoires qui battent en ruines leur système. Prenons l'article du Système vasculaire des insectes dans l'Anatomie comparée de M. Carus [1]. Remarquez d'abord ce titre de *Système vasculaire*. N'annonce-t-il pas déjà que la circulation dans les insectes, au moyen des vaisseaux, est un fait? Vous verrez, plus tard, si les conséquences répondent aux prémisses. Oui, certainement, il y a un système vasculaire dans les insectes, et un système vasculaire des mieux conditionnés, des vaisseaux ramifiés à l'infini, et dont les imperceptibles ramuscules pénètrent et vivifient tous les tissus. Ce système, formé par ces brillants vaisseaux aérifères, par ces trachées arborisées, qui constituent l'appareil de la respiration, cumule les deux fonctions respiratoire et circulatoire pour le complément de la nutrition. Ce dernier fait physiologique, d'une si haute importance, proclamé, à la fin du siècle dernier, par Cuvier, qui, attentif à suivre pas à pas les progrès de la science, ne lui a jamais, dans ses nombreux ouvrages, fait subir la moindre modification, ce fait, dis-je, a été mal apprécié par les novateurs, et doit être désormais une vérité éternelle.

M. Carus débute, dans l'article précité par cette phrase : « Tant qu'on ignora que les insectes ont réellement une circulation, ces animaux furent une véritable pierre d'achoppement pour la physiologie; » et plus bas, après avoir cité un passage d'Oken, où ce dernier témoigne de son embarras, de ses incertitudes, sur l'existence d'un véritable appareil de circulation, M. Carus s'écrie : « Ce fut donc une grande joie pour moi, lorsqu'en 1826 je parvins à découvrir une circulation fort simple, mais extrêmement remarquable, d'abord dans des larves de névroptères, puis peu à peu dans les insectes appartenant à d'autres ordres, et tant à l'état imparfait qu'à l'état parfait. » (*Loc. cit.* t. II, p. 319.) Et où trouve-t-il cette pierre d'achoppement pour le

[1] *Traité élémentaire d'anatomie comparée, etc.* traduction de M. le docteur Jourdan; 3 vol. 1835.

physiologiste qui sait accepter les faits tels qu'ils sont et en tirer des inductions rationnelles? Quel embarras laisse donc dans l'esprit l'assimilation par imbibition de Cuvier, qui, en définitive, n'est qu'une absorption? Le scrutateur, habitué aux autopsies entomologiques, manque-t-il jamais de constater, dans les cavités splanchniques des insectes, un liquide chyleux ou nourricier, plus ou moins fluctuant ou agité pendant la vie, où sont baignés ces arbuscules trachéens qui, en filtrant l'air partout, impriment à ce liquide les qualités propres à l'animaliser? Mais je la vois bien, moi, cette anguleuse pierre d'achoppement pour les partisans de l'unité d'organisation, qui veulent à tout prix une circulation humorale dans les insectes. Vous auriez beau leur faire observer que les arachnides pulmonaires, qui dans la série animale sont supérieures aux insectes par leur organisation, ont un véritable cœur, qu'on n'a point contesté, tandis que les zoophites inférieurs aux insectes à trachées n'ont pas de cœur et n'en ont jamais été gratifiés. Vous auriez beau leur rappeler que la nature, qui ne fait pas de saut, a laissé entre les arachnides et les zoophites une trace de son passage, le simulacre, le vestige d'un organe dont les attributions physiologiques sont ou nulles ou fort douteuses, c'est pour eux un parti pris, et ils ne cessent pas de proclamer leur être de raison.

D'après la seconde phrase précitée de l'ouvrage de M. Carus, il est bien évident que cet auteur admet comme positif un système de circulation dans les insectes. Mais ne nous hâtons pas d'adopter cette idée, et suivons l'auteur dans l'exposition de sa découverte. « Au reste, dit-il, si j'insiste sur la description de ce phénomène physiologique (la circulation), c'est parce qu'évidemment une partie du système vasculaire n'a point encore ici des parois propres, et qu'en conséquence la direction des vaisseaux n'est indiquée que par le courant du sang, qui ressemble à celui du suc végétal dans les entre-nœuds des charagnes. » (*Loc. cit.* p. 321.) Vous le voyez, voilà déjà une partie de la circulation déshéritée de vaisseaux, voilà des courants subs-

titués à ceux-ci. Mais qu'importe, ces courants ne laissent pas que d'être, les uns des veines, les autres des artères, du moins dans l'opinion de cet auteur. Il va sans dire que le vaisseau dorsal est un cœur *aortique*, dont les pulsations régulières poussent vers la tête le sang, qui redescend par les courants *veineux* (*loc. cit.* p. 322). Après cela, qui ne croirait pas à une double circulation? Ces courants sont la découverte de M. Carus. Il les a observés dans les larves, surtout dans les lames caudales et les rudiments d'ailes de la larve de l'*agrion puella*. J'examinerai plus bas la valeur physiologique de ces courants.

Préoccupé par des idées théoriques que je ne puis admettre, M. Carus trouve des indices d'*artères* et de *veines pulmonaires* dans de simples anses de courants situées à la base des pattes, aux lames branchiales et aux filets de la queue d'une larve d'éphémère (*loc. cit.* p. 321); puis, MM. Wagner et Straus viennent l'assister pour le cœur aortique d'ouvertures latérales munies de valvules, et destinées à puiser le sang dans la cavité abdominale pour le diriger vers la tête. Je dirai plus tard ce qu'il faut penser des assertions de M. Straus.

Que je voudrais voir en face de l'organe dorsal de la sarcophage que j'ai décrit plus haut les savants dont je viens de citer les noms! Qui sait tout ce qu'ils découvriraient dans cet organe, qu'ils ne manqueraient pas d'appeler cœur aortique. Mais comment s'arrangeraient-ils d'un cœur sans cavité, sans issues et sans ouvertures? Ils auraient sans doute recours aux courants, et où ne va-t-on pas quand on s'y livre?

Et puisque l'occasion s'en présente, abordons les courants de M. Carus. Oui, les grandes comme les petites cavités du corps des insectes, quelle que soit leur morphose, sont plus ou moins remplies d'un liquide ordinairement incolore; oui, la moindre blessure aux pattes, aux antennes, aux téguments, est aussitôt suivie de l'exsudation ou de l'écoulement de ce liquide. Celui-ci abreuve tous les tissus, pénètre toutes les membranes. Il sert aux sécrétions, à l'accroissement, aux réparations, à l'entretien

de l'animal ; il est une condition d'existence pour l'insecte. Qu'on l'appelle sang, chyle, fluide nourricier, humeur vitale, peu importe, toutes ces dénominations sont bonnes. Placez sous vos yeux, armés d'une simple loupe, une grande chenille rase (celle du *sphinx atropos*) ou une grande larve à téguments pellucides (celle de l'*hamatichærus heros* ou du *scarabæus nasicornis*), si vous ne l'inquiétez pas et qu'elle soit en repos, le liquide renfermé dans le corps semble en stagnation ; mais, en y regardant de très-près, vous y constaterez un léger mouvement intestin ou moléculaire. Si la larve marche, si elle s'agite, et surtout si vous l'irritez en la violentant, alors le liquide, obéissant à divers agents d'impulsion, tels que les contractions successives des nombreux muscles peaussiers ou tégumentaires, les agitations péristaltiques du tube digestif, entre dans un état de perturbation où vous pourrez distinguer des balancements, de la fluctuation, des oscillations, des courants irréguliers, qui entraînent dans des espèces de flux et de reflux les organes flottants, tels que les vaisseaux biliaires, salivaires et sérifiques, les sachets adipeux, les ailes de l'organe dorsal, etc. Mais ce n'est pas seulement à la région dorsale que vous verrez ces fluctuations, vous pourrez les constater aussi à la région ventrale, en renversant la larve sur le dos.

Si, à l'imitation de la plupart des partisans de la circulation des insectes, vous dirigez votre lentille microscopique sur de très-petites larves aquatiques subdiaphanes, ou, comme M. le professeur Behn, sur la patte d'une coryze, vous n'aurez plus sous les yeux des vagues, des flots, qui ne sauraient avoir lieu que dans les masses de liquide; mais le fluide nourricier, subordonné alors aux lois combinées de la capillarité et des affinités organiques, se présente sous l'aspect de courants linéaires qui vont et viennent suivant des causes très-diverses. C'est alors que l'imagination, s'emparant de ces courants sans trop remonter à leur source, leur assigne une fonction circulatoire. Mais les partisans de celle-ci n'ont donc jamais fait attention que de semblables courants existent, non-seulement dans les grandes cavités

du corps des insectes, mais dans les viscères eux-mêmes, lorsqu'ils renferment des liquides? Je pourrais citer à l'appui cent faits tirés de mes vivisections; je leur préfère le passage suivant, qui, malgré ses cent ans de date, n'en a pas moins de valeur et d'à-propos: il est du grand Swammerdam. Il s'agit de l'anatomie de la larve de sa mouche du fromage (*piophila casei*, Macq). « Mais ce qu'il y avait de plus singulier, dit-il, c'était la vitesse avec laquelle la matière paraissait se mouvoir dans ces intestins aveugles (vaisseaux hépatiques); ses mouvements étaient si prompts, qu'il n'était pas possible de les suivre de l'œil. » (*Loc. cit.* p. 476.)

S'il est vrai, comme je ne pense pas qu'on le conteste, que le liquide renfermé dans les cavités, soit du sang ou un fluide nourricier, s'il est vrai que dans l'organisme des insectes les trachées vont étaler leurs innombrables ramifications sur toutes les surfaces, dans tous les interstices, pour déterminer l'action chimique de l'air sur les éléments nutritifs, il est d'absolue nécessité que le sang, pour remplir sa mission physiologique, ne demeure pas inerte et inactif; il faut qu'il se mette en mouvement, je ne dis pas en circulation, sur toutes les parois, qu'il s'insinue dans tous les recoins, qu'il baigne tous les tissus, pour que l'assimilation s'opère partout. C'est alors qu'en vertu d'une affinité organique dont j'ai déjà parlé, les éléments nutritifs, suivant le mode de vitalité qui les anime, vont s'apposer dans les mailles de tel ou tel tissu, pour y servir ou aux réparations, ou aux sécrétions.

Or, dans l'insecte comme dans le quadrupède, c'est l'appareil digestif qui, après avoir reçu et élaboré l'aliment en le combinant avec le produit de sécrétions spéciales, après en avoir éliminé, par une opération de chimie tout organique ou vitale, un résidu excrémentitiel; c'est l'appareil digestif, dis-je, qui amène en définitive la formation d'un liquide essentiellement destiné à la nutrition. Dans l'insecte comme dans le quadrupède, l'air atmosphérique joue le même rôle important dans l'acte nu-

tritif; mais dans le quadrupède, où l'organisation est plus compliquée et par conséquent plus parfaite, ce liquide est repris dans l'organe digestif par un ordre particulier de vaisseaux qui le livrent à la circulation générale, pour recevoir à son passage dans le poumon le complément de la propriété assimilatrice. Dans l'insecte, au contraire, où la nature, inépuisable en ressources, s'est complu à atteindre le même but physiologique avec des moyens beaucoup plus simples, avec une sévère économie d'organes, ce liquide nutritif, ne pouvant être saisi par des vaisseaux qui n'existent pas, s'exhale comme une rosée par les parois mêmes du ventricule chylifique et s'épanche dans la cavité générale du corps, pour de là pénétrer dans tous les tissus et y recevoir le baptême de l'air par son contact avec les vaisseaux trachéens qui font l'office de poumons. Ainsi, on ne saurait en disconvenir, dans le quadrupède comme dans l'insecte, malgré l'existence dans le premier d'un organe respiratoire circonscrit qui ne se trouve pas dans le second, le but principal de la circulation, l'oxygénation du sang ou du liquide nourricier, est pareillement rempli.

Je reviens à l'ouvrage de M. Carus. Voyons ce qu'il dit sur la circulation dans les insectes parfaits. « On aperçoit très-distinctement, dit-il, la circulation chez un grand nombre d'insectes parfaits, et elle s'y effectue, quant aux circonstances essentielles, de la même manière que dans les larves. » (*Loc. cit.* p. 323.) Mais, dix ou douze lignes plus bas, après avoir dit que le cœur aortique demeure actif dans tous les états de l'insecte, il déclare que « les courants cessent peut-être peu à peu chez la majorité des insectes parfaits. » Il faudrait conclure de là que dans les insectes qu'on est convenu d'appeler parfaits, et qui le sont effectivement, soit par le développement des organes locomoteurs, soit surtout par l'acquisition d'un appareil important, celui de la reproduction, appelé à concentrer dans son exercice une grande énergie vitale, il faudrait conclure, dis-je, que la circulation dans ces insectes, au lieu de se multiplier en proportion de l'activité

des organes, deviendrait au contraire fort imparfaite, et même oblitérée. Qui adoptera une opinion si contraire aux lois physiologiques?

Voici comment se termine le paragraphe que M. Carus a consacré à la circulation dans les insectes : « Je n'ai pas besoin, dit-il, d'insister sur la connexion intime que l'absence presque totale des parois vasculaires établit entre le sang qui parcourt la cavité du corps et les trachées qui pénètrent partout; ici l'air va chercher le sang, comme ailleurs c'est le sang qui va au-devant de l'air. » (*Loc. cit.* p. 324.)

Ne croiriez-vous pas lire les conclusions de Cuvier dans son vieux mémoire qui a encore tout l'accent de la jeunesse [1] ? Ces lignes terminales, d'un si grand sens physiologique, sont en effet textuellement empruntées à ce mémoire, et deviennent une censure flagrante des pages qui les précèdent. L'auteur de ces dernières se combat avec l'arme d'autrui[2].

Je vais maintenant aborder la question délicate du cœur du hanneton par M. Straus-Durckeim. Dans son ouvrage sur l'anatomie de ce coléoptère, M. Straus a fait connaître un cœur d'une complication de structure qui établit une énorme différence entre lui et le vaisseau dorsal des autres insectes: aussi cette découverte, si c'en est une, a-t-elle joui dans le monde savant de tout l'attrait de la nouveauté. On en a copié et inséré la description et les figures dans tous les ouvrages d'anatomie entomologique.

Le cœur du hanneton, suivant M. Straus, est un long vaisseau dorsal, dont la portion renfermée dans l'abdomen a un plus gros calibre et est maintenue par huit ligaments membraneux subtriangulaires, tandis que la portion thoracique, sensiblement

[1] *Mémoire sur la manière dont se fait la nutrition dans les insectes;* par le C. Cuvier. Lu à l'Institut national en vendémiaire an VI.

[2] Depuis le dépôt de mon manuscrit à l'Académie, MM. Carus et Otto, dans leur Atlas d'anatomie comparée, ont formellement déclaré que la circulation n'existait pas dans les insectes parfaits, mais ils la maintenaient encore, quoique incomplète dans les larves. En juillet 1844, j'ai pris acte de cette déclaration et je me suis inscrit contre leur réserve relative aux larves (*Comptes rendus*, tom. XIX, p. 189).

plus fine et tout à fait nue, est qualifiée d'*artère*. Ce cœur aboutit, d'une part, à la tête, et se fixe, de l'autre, au dernier segment dorsal de l'abdomen. Entre ces deux points, il est simple ou ne produit aucune branche; il a deux tuniques, l'une extérieure, membraneuse, épaisse, fibreuse; l'autre intérieure, musculeuse, avec des fibres circulaires parallèles. La portion abdominale de ce cœur est percée de huit paires d'ouvertures latérales, autant qu'il y a de segments à l'abdomen; chacune de ces ouvertures *auriculo-ventriculaires* est munie de *valvules* semi-lunaires, l'une en avant, l'autre en arrière, qui fonctionnent dans les mouvements de systole et de diastole. Le cœur se trouve ainsi divisé intérieurement en huit *chambres* ou ventricules, placées à la file les unes des autres. C'est par ces ouvertures que le sang contenu dans la cavité abdominale entre dans le cœur, qu'il passe successivement d'une chambre dans l'autre pour entrer dans l'artère, aller s'épancher dans la tête et revenir ensuite dans l'abdomen.

Je vous le demande, lecteur physiologiste, pouvez-vous, dans l'intérêt d'une circulation dont le but final est la nutrition, tirer parti d'un cœur ainsi organisé, d'un cœur tubuleux, sans vaisseaux et criblé de trous? Et quelles qualités peut acquérir le sang par son passage successif dans les huit chambres de ce tuyau avec tout l'attirail des seize valvules? A quoi bon, pour s'animaliser, que ce sang épanché dans la tête par je ne sais quelle ouverture, et de là rendu dans la cavité abdominale, soit de nouveau avalé par les bouches ventriculaires? car enfin, après cet éternel exercice de siphon, il part et revient toujours le même. Or, parcourez les diverses classes d'animaux pourvus d'une véritable circulation, et vous verrez, 1° que celle-ci coexiste constamment avec un organe respiratoire circonscrit, poumon ou branchie; 2° que le sang ou le liquide nourricier, après avoir acquis dans l'organe respiratoire, par l'action de l'oxygène, les conditions propres à l'assimilation, est porté par des ramifications vasculaires dans tous les points où la nutrition doit s'exer-

cer, où la réparation doit se faire. Voyez encore, dans l'hypothèse de M. Straus, combien la place qu'occupe le cœur contre la paroi interne du tégument dorsal, où il est comme collé, voyez, dis-je, combien cette place et la position latérale des ouvertures auriculo-ventriculaires seraient peu favorables aux fonctions de celles-ci. Dans l'attitude horizontale, qui est la plus ordinaire à l'insecte, ces ouvertures ne pourraient entrer en jeu que dans le cas où la cavité abdominale serait distendue par une exubérance de fluide nourricier ou dans un état complet de plénitude. Sans cette dernière condition, et avec l'importance physiologique qu'on donne au cœur, la vie serait à chaque instant dans le plus imminent danger. A tant faire que d'inventer un ressort pour une machine compliquée dont on n'est pas l'auteur, il faudrait au moins le mettre en harmonie d'action avec les autres pièces, afin que cette machine pût fonctionner. « L'amour outré du merveilleux, dit Réaumur, un trop fort attachement à un système, fascinent quelquefois les yeux de l'observateur [1]. »

Et moi aussi j'ai étudié dans le hanneton ordinaire l'organe que M. Straus a désigné sous le nom de cœur; je l'ai étudié avec grand soin, avec sincérité, avec le désir d'y trouver ce que ce savant dit y avoir découvert. Tout en maniant le scalpel, en braquant le microscope, j'avais sous les yeux et ses écrits et ses figures. J'ai procédé aux dissections, tantôt par la région dorsale, tantôt, et le plus souvent, par la région ventrale. Eh bien! faut-il le dire avec douleur pour la science, ou faut-il se retrancher encore derrière un sentiment de défiance de soi-même? je n'ai pas aperçu le moindre vestige, ni des ouvertures auriculo-ventriculaires, ni des chambres intérieures, ni des intersections du prétendu cœur. Dans une question aussi capitale, il ne suffit pas de formuler un témoignage négatif, il faut encore des preuves à l'appui. Exposons-les.

J'ai parfaitement constaté à la portion abdominale de cet or-

[1] Réaum. *Mém.* t. II, préface, p. 35.

gane ce qu'on est convenu, depuis Lyonet, d'appeler ses *ailes*. De chaque côté du cordon médian ou axal (cœur de M. Straus), j'ai reconnu des prolongements membraneux subtriangulaires disposés symétriquement, dont le nombre m'a paru, comme à M. Straus, conforme à celui des segments de l'abdomen, c'est-à-dire de sept ou de huit. Ces prolongements, bien plus effilés que ceux représentés par cet auteur, ne sont, à proprement parler, que des lanières d'une base commune qui adhère au bord correspondant du cordon médian, mais qui ne s'unit pas avec celle du côté opposé, en passant par-dessus le cordon, ainsi qu'on le voit dans la figure de M. Straus. Ces lanières sont appliquées immédiatement contre la paroi dorsale sans y adhérer; leur pointe se fixe, au moyen d'un ligament plus fin qu'un cheveu, près de la ligne fibro-musculeuse, qui unit les segments dorsaux aux ventraux; mais ces lanières, ainsi que le ruban basilaire d'où elles émanent, qui à la simple loupe paraissent parfois fibreuses ou plissées, présentent au microscope une membrane fine subgranuleuse ou comme floconneuse, analogue à celle que Lyonet a décrite et figurée dans son immortel traité sur l'anatomie de la chenille du saule. M. Straus, qui n'a pas constaté dans les ailes du cœur du hanneton cette structure granuleuse, a pensé que Lyonet, cet anatomiste si scrupuleux, avait été trompé par des granules adipeux. Je suis dès longtemps familiarisé avec ces derniers, je suis habitué à ne pas m'en laisser imposer par leur présence, et je déclare que les lanières en question, surtout leur ruban basilaire, ont des granules ou flocons nichés dans leur propre substance et faisant partie de leur texture intime. Les deux ou trois lanières postérieures de chaque côté, loin d'être distinctes et séparées comme celles qui les précèdent, s'épanouissent en une large membrane commune qui va se perdre dans le voisinage des attaches du rectum, en envoyant çà et là quelques fibrilles ou radicules qui la font adhérer au tégument dorsal.

Quant au cordon axal abdominal ou *cœur* de M. Straus, il

est uniformément linéaire, identique d'un bout à l'autre, d'un blanc semi-diaphane, avec une raie médiane plus claire, peu ou point saillant, sans aucune trace ni de division, ni de contracture, étroitement pressé entre les ailes de l'organe. J'ai vainement employé tous les moyens d'y constater une cavité intérieure, et je demeure convaincu qu'il n'y en existe pas plus que dans les autres insectes dont j'ai étudié l'organe dorsal. Je ne dirai pas avec M. Straus que le bout postérieur de ce cordon est en cul-de-sac, puisque cela suppose une cavité; il est même superflu de faire remarquer que ce bout est fermé : il se fixe au dernier segment dorsal de l'abdomen.

J'arrive enfin à la portion thoracique de l'organe dorsal, à l'*artère* de M. Straus. Comme lui, je l'ai trouvée simple, nue, grêle, un peu atténuée en avant et libre sur les côtés; mais cet auteur prétend que le sang s'épanche par son extrémité dans l'intérieur de la tête, ce qui rend indispensable un orifice à cette extrémité, et une cavité qui se continue avec cette dernière. Hélas! je suis bien loin d'avoir vu comme lui, et je soutiens que cette extrémité, tout aussi fermée que la postérieure, se fixe directement, non pas à la tête, mais à l'œsophage du hanneton, un peu avant l'engagement de cet œsophage dans le collier nerveux, sans pénétrer dans l'intérieur de ce conduit. Ce mode d'insertion, que j'ai très-positivement constaté dans le hanneton, dont j'ai fait connaître un exemple aussi positif dans la sarcophage, que j'ai retrouvé dans d'autres insectes, enfin que le célèbre Lyonet, dans son ouvrage posthume[1], a pareillement signalé dans la nymphe de la chenille du saule, porte un coup mortel à l'hypothèse du cœur et ruine complétement le système de la circulation dans les insectes.

Mais ce n'est pas seulement sur l'étude de l'organe dorsal d'un

[1] « J'ai bien encore trouvé dans ce sujet le canal de ce qu'on a nommé le cœur de la chrysalide, attaché près de sa bouche à la tunique extérieure de l'œsophage, mais je n'ai pu découvrir s'il s'ouvrait dans ce viscère ou non. » (*Recherches sur l'anatomie et les métamorphoses de différents insectes* (ouvrage posthume), p. 390.) Il y avait longtemps (des années) que j'avais constaté et renouvelé la découverte de ce mode d'insertion lorsque j'eus le bonheur, vivement senti, de le trouver confirmé par ce passage de Lyonet.

diptère (sarcophage) et d'un coléoptère (hanneton) que se fondent et mon incrédulité sur la circulation des insectes et ma protestation formelle. Mes recherches, puissamment corroborées par celles des autres entomotomistes, se sont étendues sur un grand nombre d'espèces de tous les ordres.

1° Dans les *orthoptères*[1], insectes qui, suivant moi, ont dans l'échelle entomologique une prééminence organique sur les coléoptères, l'organe dorsal, nu et libre, comme à l'ordinaire, dans sa portion thoracique, a les ailes de la portion abdominale formées par une membrane fine, aranéeuse, sans lanières distinctes, de manière que leur délimitation est insaisissable. Il a souvent dans cet ordre d'insectes une teinte de coloration qu'il semble emprunter au liquide nourricier ambiant. Ainsi, il est d'un brun violacé dans quelques *œdipoda*, d'un beau vert dans l'*ephippigera*, d'un blanc roussâtre dans la *blatta*. Du reste, l'axe de l'organe est toujours un cordon simple, sans cavité, fixé à ses extrémités et sans aucune ouverture.

2° *Coléoptères*. J'ai déjà parlé de plusieurs larves ou insectes parfaits de cet ordre soumis à mes vivisections. M. Marcel de Serres a multiplié ses autopsies et ses injections sur plusieurs espèces de grande taille[2] et n'a jamais découvert, non plus que moi, le moindre indice de l'existence de ramifications vasculaires à l'organe dorsal, ni d'orifice à ses extrémités.

3° *Névroptères*[3]. L'organe dorsal a les mêmes traits généraux; toutefois, le cordon axal est plus grêle, nu et libre dans le cor-

[1] *Œdipoda migratoria* et *cærulescens*, *ephippigera vitium*, *locusta viridissima*, *gryllus campestris*, *blatta orientalis*.

Le *gryllus campestris* est un des insectes que Cuvier a disséqués pour prouver la non-existence de la circulation.

M. Marcel de Serres a, dans ce même but, soumis à ses expérimentations : *locusta gigantea*, *brevipennis verrucivora* et *grisea*; *gryllotalpa vulgaris*, *gryllus domesticus*, *œdipoda migratoria* et *lineola*, *empusa pauperata*, *mantis religiosa*, *blatta occidentalis*.

[2] *Geotrupes nasicornis* et *punctatus*, *ateuchus semipunctatus*, *cetonia aurata* et *fastuosa*, *scarites gigas*, *cerambyx heros*, *blaps gigas* et *mortisagus lucanus cervus* d'après moi.

[3] *Libellula depressa*, *æshna annulata*.

Libellula grandis, par Cuvier.

selet, garni à l'abdomen d'ailes fibro-membraneuses, sans prolongements dentiformes.

4° *Hyménoptères*[1]. Cet organe ne diffère des précédents que par ses ailes membraneuses (granuleuses dans le frelon), non dentées, fixées à la paroi dorsale par tous leurs bords.

5° *Lépidoptères*. Malpighi dans le ver à soie, Lyonet dans la chenille du saule, M. Marcel de Serres dans plusieurs larves et insectes parfaits de cet ordre[2], M. Newport dans les diverses formes du *sphinx ligustri*, n'ont découvert à l'organe dorsal ni branches ni ouvertures.

6° *Hémiptères*. Dans cet ordre, à l'anatomie duquel j'ai consacré un ouvrage spécial[3], l'organe dorsal diffère de celui des autres ordres par une simplicité remarquable de texture et par l'absence absolue, non-seulement de toute ramification vasculaire, mais de tout ligament. J'avais même cru qu'on pouvait le considérer comme privé de garniture ou d'ailes. Après l'étude de cet organe dans les insectes des divers ordres, il m'était resté dans l'esprit des incertitudes et des scrupules sur ce dernier point d'anatomie. Une dissection toute récente du *pentatoma grisea* (9 mars 1841) me met à même de rectifier mes idées à ce sujet, et de ramener cet organe à des conditions qu'il partage avec les autres ordres, toutefois avec des modifications qui lui sont propres. Dans mon ouvrage précité, tout en disant que le cordon dorsal était partout homogène et identique, j'avais eu le soin de faire remarquer que « sa portion abdominale présentait une ligne « médiane plus claire et un peu enfoncée. » Eh bien! cette ligne médiane est le cordon *axal* des autres insectes, et les bords qui lui forment un très-léger bourrelet en sont la garniture ou les *ailes*. Ce que j'ai confirmé aussi dans cette nouvelle autopsie, c'est que cet organe, entre les deux points d'attache de ses extré-

[1] *Borubus hortorum* et *terrestris*, *dasypoda plumipes*, *vespa crabro*, *scolia hæmorrhoïdalis*.
M. Marcel de Serres a disséqué les *scolia flavifrons*, *xylocopa violacea*, *bombus terrestris*, *apis mellifica*.

[2] *Sphinx euphorbiæ* et *atropos*, *bombyx mori*, *media*, *quercus*, *trifolii* et *pavonia major*.

[3] *Recherches anatomiques et physiologiques sur les hémiptères*, dans les Mém. de l'Inst. 1833.

mités, est libre de toute adhérence, et est là comme une corde plus ou moins tendue. Mais ce que j'ai surtout été heureux de constater d'une manière positive, c'est l'insertion antérieure à la tunique externe de l'œsophage un peu avant l'origine de l'estomac[1].

Les mouvements de l'organe dorsal et les agents qui les déterminent ont aussi appelé toute mon attention. Ce sont ces mouvements mal appréciés, et imprudemment désignés par les premiers entomotomistes sous les noms de *systole* et *diastole*, et de *pulsations*, qui ont fait tout le mal dans la question si souvent débattue de la circulation. Ils ne sont pas toujours aperçevables, car, malgré l'application la plus soutenue des verres amplifiants, je n'ai pas pu les constater dans quelques larves de tipulaires et de prionés; j'ai aussi étudié des individus d'une même espèce où, dans certaines circonstances, ils étaient insensibles et très-apparents dans d'autres. La portion thoracique de l'organe, qui, dans toutes les morphoses et dans tous les ordres des insectes, est constamment nue et libre, ne m'a jamais présenté des signes appréciables de contractilité, et les auteurs n'en font pas non plus mention.

Les mouvements de l'organe dorsal peuvent se diviser en *généraux* ou de totalité et en *propres* ou fibrillaires.

Les mouvements généraux se passent en même temps dans les ailes et dans l'axe ou dans l'ensemble de l'organe; ils sont principalement déterminés par l'action des ligaments et des muscles peaussiers, par le jeu des troncs trachéens qui s'y distribuent, enfin par la fluctuation du liquide nourricier ambiant.

Les mouvements propres tiennent à la contractilité du tissu du cordon médian, que les partisans de la circulation ont plus particulièrement appelé *cœur* ou *vaisseau dorsal*. Ils se caractérisent par des contractions et des dilatations subalternatives ou subintermittentes, plus ou moins irrégulières, qu'on a qualifiées de

[1] Depuis la remise de mon manuscrit, j'ai constaté l'insertion de l'organe dorsal vers l'origine du tube digestif, non-seulement dans les trois morphoses de la sarcophage, mais dans plusieurs autres diptères, comme *odontomyia furcata* et *tigrina*, *platystoma umbrarum*, *etc.*

pulsations. Ce dernier terme, que j'admets provisoirement, est cependant défectueux, puisqu'il entraîne l'idée d'un liquide contenu agissant contre les parois d'un canal; or, je conteste dans cet organe et l'existence d'une cavité et celle d'un liquide. Quoi qu'il en soit, le fait des pulsations irrégulières a été noté par tous les auteurs, et Malpighi avait même dit qu'elles s'opéraient tantôt d'avant en arrière et tantôt d'arrière en avant, ce qui est loin d'être favorable au système de la circulation. Ces pulsations, d'après M. Marcel de Serres, sont plus prononcées, plus fortes, mais moins fréquentes dans les larves que dans les insectes parfaits. Il en a compté par minute 36 seulement dans la larve du grand paon, plus de 82 dans les sauterelles, et au delà de 140 dans le *bombus terrestris*. Il est à regretter que ces expériences ne soient pas rigoureusement comparatives, c'est-à-dire qu'elles n'aient pas été faites sur des larves et des insectes parfaits d'une même espèce ou d'un même genre, ou au moins d'une même famille; et puis il faudrait tenir compte, dans une semblable supputation, de l'état de calme ou d'irritation dans lequel se trouvent les insectes en expérimentation, car enfin il a fallu inciser ou déchirer l'enveloppe coriacée, opaque et très-velue du *bombus* pour constater les mouvements de son vaisseau dorsal, et, pendant un pareil supplice, il est impossible de compter sur des pulsations normales.

Les mouvements fibrillaires du cordon axal ne sont pas exclusivement dépendants de la contractilité propre de ce tissu; ils sont aussi sous l'influence des ailes ou prolongements ligamenteux. Il résulte des expériences de M. Marcel de Serres, tentées sur un taupe-grillon, qu'en faisant successivement la section de ces ailes, les pulsations du cordon médian se sont affaiblies de plus en plus. Les trachées connexées avec ces ailes, et qui envoient leurs imperceptibles ramuscules dans le tissu de l'axe, impriment également à ce dernier un mouvement intermittent ou isochrone avec celui de la respiration. Ce qui est encore une preuve de la grande participation de ces ailes aux pulsations du

cordon axal, c'est que celles-ci sont insensibles ou fort obscures dans la portion thoracique et dans tout l'organe dorsal des hémiptères, où ce cordon est dépourvu de garniture ou d'ailes.

M. Marcel de Serres, ainsi que la plupart des entomotomistes, admet une humeur dans le vaisseau dorsal, et cependant il déclare qu'ayant percé celui-ci sur divers points, il ne l'a jamais vue s'échapper; ailleurs, il dit que cette humeur est peu liquide, et que même elle est épaisse dans les larves voraces. Cet auteur affirme avoir fait pénétrer dans le vaisseau dorsal des injections, soit de mercure, soit de liquide coloré, et que ces injections n'ont pu franchir les extrémités de ce vaisseau; mais le succès de ces injections donne à supposer l'existence d'une cavité et le déplacement préalable du liquide qu'elle contenait. Cuvier, qui a aussi tenté des injections dans ce même vaisseau, n'a dit nulle part qu'il y eût constaté une cavité; or, quelle serait la destination physiologique d'un liquide ainsi contenu dans un tube sans ouverture? ce dernier fait étant clairement démontré par les expériences mêmes de M. Marcel de Serres. Cet auteur me semble ici un peu en contradiction avec lui-même. Tout en n'admettant pas dans l'organe dorsal l'existence d'une cavité ni d'un liquide, je ne lui refuse pourtant pas une humeur, pas plus que je ne la refuse à un muscle, à une membrane ou à tout autre tissu; mais cette humeur, qui est le liquide nourricier ou le sang, est simplement infiltrée.

La section de l'organe dorsal, soit à l'abdomen, soit au thorax, soit dans les deux en même temps, n'entraîne pas la mort de l'insecte. D'après les expériences de M. Marcel de Serres, l'arrachement complet du vaisseau dorsal dans la larve du *sphinx atropos* n'a pas empêché celle-ci de respirer pendant six heures, tandis qu'une arachnide pulmonaire meurt subitement si l'on tranche son vaisseau dorsal, qui est un véritable cœur. Ces faits concourent puissamment à prouver que le vaisseau dorsal des insectes n'est pas un organe circulatoire[1].

[1] L'absence, dans les insectes, d'un appareil vasculaire de circulation n'est, à mes yeux,

Mais puisque cet organe ne sert pas à la circulation, quelles sont donc ses attributions physiologiques? Je n'ignore pas que Lyonet, s'étayant du grand nombre de nerfs qui se rendaient au vaisseau dorsal de la chenille du saule, a émis l'opinion qu'il sécrétait la substance nerveuse, et que M. Marcel de Serres l'a regardé comme l'organe sécréteur de la graisse. Je me suis adressé cette même question en traitant de l'organe dorsal de la sarcophage. J'ai d'abord dit ce qu'il n'était pas; puis, séduit par sa composition singulière, j'ai cru devoir le considérer comme un organe sécréteur d'un genre particulier. Eh bien! l'avouerai-je? après la revue de l'organe dorsal dans les divers ordres d'insectes, après

qu'une conséquence obligée et très-significative de la marche graduelle de la nature dans la composition des organismes, de cette loi immuable des créations échelonnées; elle justifie en même temps le poste assigné par la méthode à cette populeuse classe d'animaux. Mettons en évidence le fil de la dégradation organique qui conduit à cette absence.

Le grand Cuvier, dans ses mémoires sur l'anatomie des mollusques (1817), avait constaté dans l'aplysie qu'une partie du système circulatoire se détériorait, s'annihilait, et que le liquide s'épanchait librement dans la cavité abdominale. « Cette vaste communication, disait-il, est sans doute un premier acheminement à celle bien plus vaste encore que la nature a établie dans les insectes où il n'y a pas même des vaisseaux particuliers pour le fluide nourricier. » (*Annales du Mus.* tom. II, p. 13.) Qu'on veuille bien peser toute la valeur scientifique de ces paroles sacramentelles.

Cette circulation, moitié vasculaire, moitié cavitaire ou lacuneuse, vient d'être tout récemment confirmée et appliquée à la généralité des mollusques par M. Milne Edwards. (*Comptes rendus de l'Académie*, février 1845.)

Les belles recherches anatomiques et physiologiques sur la circulation des crustacés, par Audouin et M. Milne Edwards (*Annales des sciences naturelles*, tom. XI, p. 283), avaient, dès 1827, établi que dans plusieurs de ces articulés le sang ou le fluide nourricier y est en partie contenu dans des vaisseaux et en partie épandu dans les cavités splanchniques, où il pénètre les organes, les tissus, par simple imbibition. Ce fait anatomique d'un système vasculaire qui, loin de former un cercle continu, s'interrompt brusquement pour laisser échapper le liquide qu'il renferme, est aussi d'un saisissant intérêt dans la question actuelle et tend à réaliser la prédiction de Cuvier. N'est-ce pas là effectivement une de ces précieuses modifications organiques qui nous préparent à voir s'effectuer, dans la série inférieure, la disparition absolue de la fraction survivante du système circulatoire? Or, les crustacés, dans le cadre de la classification, suivent les mollusques et précèdent les insectes; ils ont une infériorité organique à l'égard des premiers et une prééminence sur les seconds. Déjà même dans les crustacés *isopodes*, plus voisins encore des insectes, le cœur n'est plus qu'un long vaisseau susintestinal, fort analogue, à la fonction près, à ce qu'on a appelé *vaisseau dorsal* dans les insectes. Audouin et M. Milne Edwards avaient raison de dire, il y a déjà dix-huit ans, que de l'organisation de quelques crustacés à celle des insectes il n'y avait qu'un pas. Or ce pas est l'atrophie du demi-système vasculaire des crustacés, par conséquent l'absence complète dans les insectes de vaisseaux propres à une véritable circulation. (Note ajoutée en mars 1845.)

en avoir étudié et médité la structure, je me trouve irrésistiblement ramené à l'idée que j'ai déjà émise dans plusieurs ouvrages, que cet organe n'est qu'un rudiment, un simulacre du cœur des arachnides, un cœur obturé, un organe déchu de toute fonction, un tissu vestigiaire.

Ainsi, dussé-je encourir le reproche de me répéter à satiété, je maintiens que l'organe appelé par plusieurs anatomistes *cœur, vaisseau dorsal* ou *organe d'impulsion circulatoire*, n'est ni un cœur, ni même un conduit tubuleux. Jamais, même dans les cas où sa contractilité est le plus énergique, je n'ai constaté que celle-ci s'exerçât sur un liquide contenu. Il n'est qu'un cordon simple non rameux, fixé et fermé à ses deux extrémités, inapte par conséquent à toute fonction circulatoire. Telle est ma profession de foi sur ce point de physiologie entomologique.

EXPLICATION DES FIGURES

TOUTES FORT GROSSIES.

Fig. 1. Larve adulte de la *sarcophaga hæmorrhoïdalis*, avec, à côté, la mesure de sa longueur naturelle. Les parties de la bouche dans un état de protraction qui met en évidence la lèvre, le labre et les crocs ou mandibules en partie exsertes.

Fig. 2. Lèvre détachée avec ses lobes et ses palpes.

Fig. 3. Un stigmate antérieur détaché pour mettre en évidence ses quinze digitations.

Fig. 4. Portion détachée et énormément grossie des segments, pour mettre en évidence et les *pseudopodes* formés par la double saillie contiguë de deux segments et les aspérités spinuleuses qui en garnissent les contours.

aa. Deux mamelons ou papilles dont il n'a pas été fait mention dans le texte, et dont j'ai quelquefois surpris l'existence vers le milieu du bord latéral des segments.

Fig. 5. Portion détachée du bout postérieur de la larve, pour mettre en évidence et la caverne stigmatique, dont les six lobes antérieurs sont relevés, et les stigmates, et une partie des grands canaux trachéens.

Fig. 6. Un stigmate postérieur, isolé, avec ses trois ostioles respiratoires linéaires.

Fig. 7. Pupe ou chrysalide, avec, à côté, la mesure de sa longueur naturelle.

Fig. 8. Nymphe confirmée, avec, à côté, la mesure de sa longueur naturelle; vue par sa face inférieure. On y voit les saillies palpiformes de la face, les pattes, les ailes, les séries abdominales des six petits tubercules.

Fig. 9. La *saillie palpiforme*, isolée, biarticulée, surmontée par l'espace ovalaire.

Fig. 10. Un stigmate de la nymphe, isolé.

Fig. 11. Une patte de derrière, détachée, appartenant à la nymphe de la seconde transition, pour mettre en évidence les pièces de cette patte, déjà toutes formées dans la gaîne, et les poils couchés.

a. Portion de la cuisse dégagée de la gaîne et offrant ces poils étalés.

b. Pelottes tarsiennes, confluentes à leur base, et ongles presque droits.

Fig. 12. Appareil sensitif et portion de l'appareil digestif de la larve.

aa. Lobes du cerveau.

bb. Ganglion thoracique et paires des nerfs qui en partent.

cc. Les deux paires de corps *ganglionoïdes*.

d. Une paire de corps placés entre les deux paires précédentes.

ee. Nerfs des deux paires de corps ganglionoïdes.

ff. Corps arrondis et déprimés, analogues aux corps ganglionoïdes.

g. Panse buccale.

h. Gésier.

ii. Bourses ventriculaires tronquées.

k. Œsophage.

Fig. 13. Appareil sensitif, encore plus grossi, de la larve, vu par sa face inférieure, pour mettre en évidence les connexions des diverses parties qui le composent.

aa. Lobes du cerveau.

b. Ganglion thoracique, avec les paires de nerfs qui en partent.

cccc. Les quatre corps ganglionoïdes, avec leurs insertions et les nerfs qui en naissent.

dd. Les corps de nature ambiguë placés entre les précédents.

ee. Nerfs qui se portent vers la bouche et qui ont leur origine au pédicelle des corps ganglionoïdes.

Fig. 14. Appareil sensitif de la nymphe confirmée.

aa. Lobes cérébraux, écartés forcément l'un de l'autre pour mettre en évidence le plancher transversal qui les unit et le bourrelet semi-lunaire de la rétine.

b. Ganglion thoracique.

cc. Nerfs alaires et cruraux.

dd. Nerfs viscéraux.

e. Portion du ventricule chylifique, précédée du godet ventriculaire et de l'ébauche annulaire de la panse.

f. Portion de l'organe dorsal s'insérant au godet ventriculaire.

Fig. 15. Appareil sensitif de la même nymphe, tendu et tiraillé de manière à mettre en évidence les connexions du cerveau avec le ganglion thoracique et les origines des nerfs.

aa. Lobes cérébraux très-écartés l'un de l'autre.

b. OEsophage engagé dans le collier nerveux.

c. Portion de l'organe dorsal.

d. Portion du ventricule chylifique. (Voyez la figure précédente.)

ee. Nerfs alaires et cruraux.

ff. Nerfs viscéraux.

Fig. 16. Appareil sensitif de l'insecte ailé.

aa. Lobes cérébraux, avec la rétine, la choroïde, les trois nerfs ocellaires et le collier œsophagien.

b. Bulbe du cordon rachidien.

c. Ce cordon.

d. Ganglion thoracique.

e. Continuation du cordon rachidien.

ff. Nerfs alaires et cruraux.

gg. Nerfs génitaux.

h. OEsophage.

ii. Canaux excréteurs des glandes salivaires s'engageant avec l'œsophage dans le collier nerveux.

jj. Réservoir des glandes.

k. Ventricule chylifique, avec son godet.

l. Réservoir de la panse, avec son col inséré à l'œsophage.

m. Portion de l'organe dorsal.

nn, oo. Limites fictives du thorax.

Fig. 17. Appareil respiratoire de la larve.
a. Stigmates postérieurs.
bb. Stigmates antérieurs.
cc. Trachées-artères ou canaux dorso-latéraux de la respiration.
d. Conduit traversier qui établit l'anastomose des deux trachées-artères.
eeee. Trachées nutritives qui partent à angle aigu des deux côtés des trachées-artères.
f. Deux troncs trachéens partant de la souche stigmatique.
gg. Houppe de trachées rayonnantes, comme parenchymateuses, partant de la souche stigmatique.

Fig. 18. Appareil respiratoire de la nymphe confirmée.
aa. Stigmates, avec la portion du tégument qui les supporte.
bb. Trachées-artères, fermées à leur bout postérieur.
cc. Trachées nutritives externes.
dd. Écheveaux trachéens terminant les trachées-artères.
ee. Trachées alaires et crurales.
ff. Trachées de la tête.
ggg. Branches traversières qui établissent la communication des deux systèmes.
hhhh. Trachées courbées en boucle.
i. Tronc trachéen traversier entre les origines des trachées-artères.

Fig. 19. Mouche vue de côté pour mettre en évidence ses stigmates.
a. Stigmate prothoracique.
b. Stigmate métathoracique.
c. Stigmates abdominaux.
d. Stigmate prothoracique détaché, pour mettre en évidence sa forme et sa structure.
e. Un stigmate abdominal détaché et énormément grossi.

Fig. 20. Appareil digestif de la larve.
a. Lèvre avec les palpes labiaux.
b. Pièce bilobée analogue.
cc. Glandes salivaires.
d. Panse buccale.

e. Épiploon salivaire.
f. Gésier.
gg. Bourses ventriculaires.
h. Ventricule chylifique.
ii. Vaisseaux hépatiques, avec leurs canaux cholédoques.
j. Intestin.
k. Partie postérieure du corps de la larve, avec les lobes dentiformes de la caverne stigmatique.
l. Panneau trilobé rétractile qui sépare l'anus de la caverne stigmatique.
m. Figure que peut prendre ce panneau.

Fig. 21. Portion détachée, et plus grossie, de l'origine du canal digestif pour mettre en évidence :
a. L'œsophage.
b. La panse buccale remplie d'une bouillie brunâtre.
c. Gésier pour faire voir sa structure et la continuation intérieure *d* de l'œsophage.
ee. Portion des bourses ventriculaires.

Fig. 22. Glandes salivaires détachées et plus grossies, vues renversées ou par-dessous.
aa. Boyaux salivaires.
b. Flocon adipeux qui unit les bouts de ceux-ci.
c. Épiploon salivaire atténué aux points d'insertion.
dd. Conduits excréteurs des glandes salivaires.
e. Canal excréteur commun ou buccal.

Fig. 23. Divers états du tissu adipeux splanchnique de la larve et de la nymphe.
a. Lambeau membraniforme criblé de trous.
b. Lambeau réticulé.
c. Réseau à mailles granuleuses.
d. Granules détachés de la nymphe et de la mouche.

Fig. 24. Appareil digestif de la nymphe confirmée.
a. Tête de celle-ci.
bb. Glandes et épiploon salivaires.
c. Ébauche de la panse.
d. Ventricule chylifique, avec le godet de son origine.

e. Vésicule intra-ventriculaire.
ff. Vaisseaux hépatiques.
g. Intestin.
h. Rectum.

Fig. 25. Portion de la membrane du ventricule chylifique de la nymphe, avec son pointillé uniforme.

Fig. 26. Vésicule intra-ventriculaire détachée, pour mettre en évidence et ses bouts et sa concrétion intérieure.

Fig. 27. Appareil digestif de la mouche.
aa. Glandes salivaires.
b. Panse.
c. Portion de l'organe dorsal, avec son insertion au godet ventriculaire.
d. Ventricule chylifique.
e. Intestin.
ff. Vaisseaux hépatiques.
g. Rectum, avec ses boutons charnus conoïdes.

Fig. 28. Organe dorsal de la nymphe confirmée.
a. Portion thoracique.
bb. Ailes ou garniture mésentériforme des deux tiers antérieurs de la portion abdominale.
cc. Les huit ligaments suspenseurs.
dd. Portion sphéruleuse du tiers postérieur, avec ses ligaments.
e. Panicule peaussier où viennent se perdre les ligaments.

MÉMOIRE

SUR

L'ATTRACTION DES ELLIPSOÏDES.

SOLUTION SYNTHÉTIQUE

POUR LE CAS GÉNÉRAL D'UN ELLIPSOÏDE HÉTÉROGÈNE
ET D'UN POINT EXTÉRIEUR;

PAR M. CHASLES.

NOTICE HISTORIQUE. — ANALYSE DU MÉMOIRE.

Le problème de l'attraction des ellipsoïdes est un de ceux qui ont fait le plus d'honneur, dans le siècle dernier, à la méthode synthétique des anciens, suivie par Newton et par Maclaurin. C'est ce travail de Maclaurin, que Lagrange a appelé « un chef-d'œuvre de géométrie, comparable à tout ce qu'Archimède nous a laissé de plus beau et de plus ingénieux. » Le mérite en a été rehaussé encore par les difficultés que l'analyse a rencontrées dans cette question. Mais l'analyse, exclusivement cultivée depuis lors et devenue chaque jour plus puissante, a repris sa supériorité accoutumée, et a dépassé le point où s'était arrêté Maclaurin.

Je me propose, dans ce mémoire, de continuer la méthode synthétique, et de donner à ses résultats le degré d'extension auquel l'analyse est parvenue.

Je vais d'abord rappeler les différentes questions auxquelles a donné lieu cette importante théorie de l'attraction des ellip-

soïdes, et la part qu'y ont prise divers géomètres. Je préciserai par là le point de vue sous lequel j'envisage ce qui restait à faire à la méthode géométrique.

Le problème de l'attraction d'un ellipsoïde présente deux cas *très-distincts :* celui où le point attiré est dans l'intérieur du corps ou à sa surface, et celui où il est au dehors.

On peut encore faire une distinction, mais relative à la forme de l'ellipsoïde, qui peut être de révolution, ou avoir ses trois axes inégaux.

Newton eut, le premier, à traiter cette question de l'attraction des ellipsoïdes, qui se présentait d'elle-même dans les développements de son principe de la gravitation universelle, appliqué au mouvement des corps célestes; mais il n'y fit que les premiers pas, et calcula seulement l'attraction d'un ellipsoïde de révolution sur un point situé sur l'axe. La synthèse géométrique lui suffit dans cette question, comme dans les autres parties de son grand ouvrage[1] : exemple magnifique, qui montre la puissance de cette méthode des anciens, et fait regretter vivement qu'elle ait été abandonnée bientôt après.

Maclaurin n'eut aussi à considérer que l'ellipsoïde de révolution, parce qu'il n'avait pour but, dans sa pièce sur le *Flux et reflux de la mer*[2], que de déterminer la figure de la terre; et il lui suffisait même de prendre le point attiré dans l'intérieur ou à la surface du corps attirant. Il résolut ce problème complétement et d'une manière fort élégante, par de simples considérations de géométrie fondées sur quelques propriétés des ellipses semblables, concentriques et semblablement placées.

Une autre proposition, concernant deux ellipses décrites des mêmes foyers, qu'il découvrit, lui procura le moyen de faire

[1] Voir liv. I, prop. 91, des Principes mathématiques de la philosophie naturelle.

[2] Couronnée par l'Académie des sciences en 1740, imprimée dans le t. IV du Recueil des prix, et reproduite par les PP. Leseur et Jacquier dans leur commentaire du troisième livre des Principes de Newton. Maclaurin a réuni ces premiers résultats à ses autres recherches sur l'attraction des ellipsoïdes, dans son Traité des fluxions.

servir sa solution à deux cas où le point attiré est extérieur : savoir, le cas où le point est situé sur le prolongement de l'axe de révolution, et le cas où il est dans le plan de l'équateur.

Le passage du cas d'un point situé à la surface, au cas d'un point extérieur, reposait sur ce beau théorème : *Les attractions que deux ellipsoïdes de révolution, décrits des mêmes foyers, exercent sur un même point, extérieur à leur surface et situé sur l'axe de révolution ou dans le plan de l'équateur, sont entre elles comme les masses des deux ellipsoïdes.*

Enfin, Maclaurin vit que ce théorème s'appliquait à deux ellipsoïdes à trois axes inégaux, dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers, le point attiré étant pris sur le prolongement de l'un quelconque des trois axes principaux. (*Traité des fluxions*, art. 653.)

Voilà ce qu'a fait ce géomètre sur l'attraction des ellipsoïdes.

Il restait, pour compléter la solution de cette question difficile, à résoudre les trois cas suivants :

1° Pour l'ellipsoïde de révolution, le cas où le point attiré est extérieur et situé en un lieu quelconque du plan d'un méridien ;

2° Pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux, le cas où le point attiré est dans l'intérieur ou à la surface de l'ellipsoïde ;

3° La généralisation, pour un point quelconque de l'espace, du beau théorème sur le rapport des attractions que deux ellipsoïdes, dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers, exercent sur un même point du prolongement d'un axe principal ; généralisation qui devait comprendre la direction des attractions, indépendamment de leur rapport, et devait servir à ramener la question générale de l'attraction sur un point extérieur quelconque, à l'attraction sur un point situé à la surface.

Peu de temps après qu'eut paru l'ouvrage de Maclaurin, Th. Simpson et Clairaut eurent à faire usage de la valeur de l'attraction d'un ellipsoïde de révolution sur un point intérieur. Le premier la calcula par une méthode à lui, fondée sur l'emploi des

séries, qui est longue, compliquée et peu rigoureuse[1]; le second, quoique habile et profond analyste, et en possession d'une méthode analytique propre au cas plus difficile d'un ellipsoïde dont les parties sont hétérogènes, se contenta néanmoins de reproduire la méthode de Maclaurin pour le cas de l'ellipsoïde homogène, la trouvant la plus belle et la plus savante[2].

D'Alembert paraît être le premier qui, en traitant la question de l'attraction des ellipsoïdes pour elle-même et dans toute son étendue, ait cherché à continuer les travaux de Maclaurin et à aller au delà. Il parvint, en suivant la même méthode, c'est-à-dire par de simples considérations de géométrie, à étendre à l'ellipsoïde à trois axes inégaux les propositions que Maclaurin avait trouvées pour l'attraction d'un ellipsoïde de révolution sur des points intérieurs ou à la surface. Mais il ne put, malgré les essais les plus ingénieux[3], intégrer la formule à laquelle il fut conduit pour l'attraction absolue, parce qu'en effet, dans ce cas général, cette formule se réduit à une de ces *fonctions elliptiques* qui ne s'intègrent pas en termes finis.

Pour le cas de l'attraction sur des points extérieurs, les efforts de d'Alembert ne l'avaient conduit d'abord qu'à douter de la vérité du beau théorème de Maclaurin[4]; mais depuis il en trouva la démonstration de trois manières, sans faire d'ailleurs un nou-

[1] *Mathematical dissertations on a variety of physical and analytical. subjects.* Lond. 1743, in-4°.

[2] Voir *Théorie de la figure de la terre*, in-8°, 1743; réimprimée en 1808.

[3] Voir *Opuscules mathématiques*, t. VI et VII.

[4] « Je soupçonne que M. Maclaurin s'est trompé dans l'article 653 de son Traité des fluxions, quand il a dit que sa méthode pour trouver l'attraction d'un sphéroïde de révolution dans le plan de l'équateur ou dans l'axe pouvait s'appliquer à un solide qui ne serait pas de révolution..... Au reste, ce n'est ici qu'un doute que je propose, n'ayant pas suffisamment examiné la proposition de M. Maclaurin, qu'il se contente d'énoncer sans la démontrer. » (*Opuscules*, t. VI, p. 242.)

On voit par ces derniers mots que d'Alembert pensait que Maclaurin n'avait fait qu'énoncer son théorème sans en donner la démonstration. Il reproduit cette opinion dans une lettre adressée à Lagrange, où il dit : « J'ai trouvé que le théorème de M. Maclaurin, qu'il a énoncé sans démonstration, est en effet très-vrai. » (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1774, p. 308.)

Lagrange pensa de même. Après avoir donné une démonstration analytique du théorème en question, il ajoute : « C'est le théorème que M. Maclaurin a énoncé *sans démonstration* dans

veau pas vers la généralisation dont le théorème était susceptible.

Peu de temps après, Lagrange, s'étonnant que la méthode analytique, devenue déjà d'un usage si universel, n'eût point encore surmonté les difficultés que ces questions lui présentaient, en entreprit la solution [1]. Il parvint par cette voie aux résultats trouvés par d'Alembert pour l'attraction d'un ellipsoïde à trois axes inégaux sur des points intérieurs ou à la surface. Sa méthode consiste à regarder l'ellipsoïde comme composé de petits cônes ayant leurs sommets au point attiré : ce qui réduit la question à une intégrale double, dont la première intégration n'offre pas de difficultés. Ce mode de décomposition a été suivi depuis dans presque tous les ouvrages qui ont traité de la matière.

Pour l'attraction sur des points extérieurs, cette marche ne réussit à Lagrange que dans le cas particulier d'un ellipsoïde de révolution et d'un point situé sur l'axe ; mais d'Alembert fit voir [2] qu'elle s'appliquait au cas d'un point situé sur l'équateur, résolu déjà géométriquement par Maclaurin.

Deux ans après, dans une addition à son mémoire, Lagrange tira de son analyse la démonstration du théorème sur les ellipsoïdes qui ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, en se bornant, toutefois, comme d'Alembert, au cas particulier traité par Maclaurin [3].

Ainsi d'Alembert, par des considérations géométriques, et Lagrange, par l'analyse, ne firent qu'appliquer à des ellipsoïdes à trois axes inégaux les propositions trouvées par Maclaurin, pour l'attraction de l'ellipsoïde de révolution sur des points intérieurs

l'article 653 de son Traité des fluxions, et que nous nous étions proposé de déduire de nos formules. » (*Mémoires de l'académie de Berlin*, année 1775, p. 279.)

Cette opinion a été partagée ensuite par Legendre et plusieurs autres géomètres; cependant elle est erronée. Maclaurin a formellement démontré son théorème; mais comme sa démonstration était absolument la même, sans qu'il fût besoin d'y rien changer, que celle qu'il avait donnée dans l'article 651 pour le cas de deux ellipsoïdes de révolution, il s'est contenté de dire, au lieu de répéter cette même démonstration, *et l'on prouvera de la même manière, etc.*

[1] *Mémoires de l'académie de Berlin*, année 1773.

[2] *Ibid.* année 1774, p. 310.

[3] *Ibid.* année 1775, p. 273.

ou à la surface; et, quant à l'attraction sur des points extérieurs, ils se bornèrent à donner de nouvelles démonstrations des propres résultats de Maclaurin.

Il restait donc encore à résoudre deux questions pour le cas d'un point extérieur; la première était de calculer l'attraction sur un point situé dans le plan méridien d'un ellipsoïde de révolution, et la seconde, de généraliser le beau théorème sur les ellipsoïdes à trois axes inégaux décrits des mêmes foyers.

Ce fut Legendre qui résolut ces deux questions. Il traita la première dans un mémoire qui fait partie du tome X du Recueil des Savants étrangers. La formule à laquelle il parvint lui prouva que le théorème de Maclaurin, sur le rapport des attractions exercées par deux ellipsoïdes de révolution décrits des mêmes foyers, était général pour toutes les positions du point attiré; ce qui lui fit soupçonner dès lors que le théorème sur les ellipsoïdes à trois axes inégaux était susceptible d'une généralisation semblable.

Cette généralisation fut, dix ans après, l'objet d'un second mémoire de Legendre, où il parvint, après avoir surmonté les plus grandes difficultés analytiques, à la formule de *quadrature* qui exprime l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur quelconque. De cette formule découlait d'elle-même la démonstration du théorème en question. (Voir *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1788, p. 454-486.)

Dans l'intervalle des deux mémoires de Legendre, Laplace était parvenu à la démonstration directe de ce théorème; ce qui lui permettait de conclure, de la formule pour l'attraction des points à la surface, l'expression de l'attraction sur des points extérieurs[1]: mais cette démonstration, qui procède par la voie des séries, ne parut pas complétement rigoureuse et parfaitement satisfaisante à cet égard, quoiqu'elle repose sur des considérations analytiques profondes, dont l'auteur a fait un grand usage dans sa mécanique céleste.

On voit que le problème de l'attraction des ellipsoïdes sur des

[1] Voir *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1783, et *Mécanique céleste*, l. III.

points extérieurs présentait, sous le point de vue spéculatif, deux questions différentes; savoir, de démontrer directement le théorème de Maclaurin dans sa généralité; ou de parvenir directement à l'expression de l'attraction sur un point extérieur quelconque. Ces deux questions étaient résolues, l'une par Laplace, et l'autre par Legendre; mais leurs solutions laissaient l'une et l'autre à désirer; la première, comme étant fondée sur l'emploi des séries; la seconde, comme exigeant les calculs les plus longs et les plus épineux[1] : elles marquaient donc un sujet de recherches qui devait provoquer de nouveaux efforts.

Pendant une vingtaine d'années, quoique plusieurs géomètres, et Lagrange lui-même une seconde fois, écrivissent sur ce problème, il resta à peu près au même point.

En 1809, M. Ivory en trouva une belle et facile solution, fondée sur une curieuse propriété des ellipsoïdes décrits des mêmes foyers, qui établit une relation simple entre l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur et l'attraction d'un autre ellipsoïde décrit des mêmes foyers, sur un point intérieur; relation au moyen de laquelle on conclut immédiatement, de la formule connue pour l'attraction sur des points intérieurs, l'attraction sur des points extérieurs, et, par suite, le théorème de Maclaurin.

En 1813, M. Gauss fit paraître un mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes, dans lequel il traita ce sujet par une méthode toute nouvelle[2]. Une même analyse, qui embrasse les deux cas d'un point extérieur et d'un point intérieur, a conduit l'illustre géomètre au théorème de Maclaurin et à l'expression de l'attraction sur un point intérieur.

Deux ans après, M. Rodrigues, par une marche analytique semblable à celle de M. Gauss, mais appliquée à un autre mode de décomposition de l'ellipsoïde, donna pareillement la démonstra-

[1] Voir l'excellent mémoire de M. le baron Maurice, sur les travaux et les écrits de Legendre. (*Bibliothèque universelle de Genève;* janvier 1833.)

[2] Theoria attractionis corporum sphæroidicorum ellipticorum homogeneorum, methodo nova tractata. (*Nouveaux Mémoires de la Société royale de Gottingue;* vol. II, année 1813.)

tion directe du théorème de Maclaurin, et l'expression de l'attraction sur les points intérieurs [1].

Mais l'élégant théorème de M. Ivory, qui, joint à l'analyse de Lagrange pour le cas des points intérieurs, complétait une solution facile et brève de la question, fixa tellement l'attention des géomètres, que le beau mémoire de M. Gauss, et la solution remarquable aussi de M. Rodrigues, où se trouvait, implicitement, la considération d'une couche infiniment mince comprise entre deux ellipsoïdes semblables, restèrent, pour ainsi dire, inaperçus [2]. Quant aux méthodes de Laplace et de Legendre, quel qu'en fût le mérite, elles n'étaient pas de nature à passer dans l'enseignement; aussi ce fut la méthode de Lagrange, avec le théorème de M. Ivory comme complément, que la plupart des géomètres adoptèrent dans leurs ouvrages; et cette solution fit regarder, pendant longtemps, la question de l'attraction des ellipsoïdes comme tout à fait close et complète.

Mais aux yeux de l'analyste, qui avait rencontré dans les formules de l'attraction des ellipsoïdes deux questions distinctes de calcul intégral méritant d'être traitées séparément et indépendamment l'une de l'autre, le beau théorème de M. Ivory, quoique résolvant la question d'intégration elle-même de la manière la plus heureuse, puisqu'il équivalait à une transformation analytique, pouvait néanmoins, sous certain point de vue, être regardé comme un moyen d'éluder une grande difficulté d'analyse, qui n'avait peut-être pas été surmontée d'une manière entièrement satisfaisante par Legendre, savoir, l'intégration directe de la formule relative aux points extérieurs. Je dis que la méthode de Legendre laissait quelque chose à désirer; car, sans parler de la

[1] *Correspondance sur l'École polytechnique;* t. III, année 1815.

[2] Toutefois, c'est dans ce mémoire de M. Gauss que se trouve cette belle propriété d'une surface fermée, dont les géomètres ont fait depuis un si utile usage; savoir, que : *La somme des éléments de la surface, multipliés respectivement par les cosinus des angles que leurs normales font avec les droites menées à un point fixe, et divisés par les carrés de ces droites, est égale à zéro, ou à* 2π, *ou à* 4π, *suivant que le point est situé dans l'intérieur de la surface, ou sur la surface même, ou au dehors.*

longueur et de la difficulté des calculs nécessaires pour effectuer une première intégration, et qui conduisent à une formule de quadrature qui exprime l'attraction, il faut dire que les substitutions à effectuer dans cette formule, pour la simplifier et la réduire aux seuls éléments de la question, nécessitaient d'autres calculs qui parurent inextricables; et que c'est au moyen d'un théorème auxiliaire, puisé, il est vrai, dans la formule même, et qui, du reste, fait le plus grand honneur à la sagacité de l'auteur, qu'on parvient, en substituant à l'ellipsoïde proposé un autre ellipsoïde semblable et concentrique, à remplacer la première expression par une autre plus simple qui, après un changement de variable, devient celle dont on se sert aujourd'hui. Cette solution, assurément, est admirable par les grandes difficultés qu'il a fallu surmonter pour intégrer l'expression même qui a arrêté Lagrange; mais elle est longue et très-pénible, et puis, elle ne se borne pas à de simples transformations de variables, comme c'est le propre de l'analyse pure, elle fait usage d'un théorème de géométrie pour transporter ses calculs à un autre ellipsoïde que le proposé. Par cette double raison, il y avait encore à revenir sur la question, soit pour perfectionner et simplifier ce beau travail, soit pour obtenir une autre solution différente et plus facile : je veux dire une intégration directe de la formule relative aux points extérieurs.

Cette tâche est celle que M. Poisson s'est proposée dans ces derniers temps. Adoptant le mode de décomposition de l'ellipsoïde suivi par Lagrange, savoir, en pyramides tronquées infiniment minces qui ont leur sommet au point attiré, supposé extérieur, on a l'intégrale double qui, à raison du radical qui la distingue du cas des points intérieurs, forme la difficulté analytique du problème. C'est cette intégrale que M. Poisson prend pour point de départ, et qu'il se propose d'intégrer une fois. Pour cela il différentie cette intégrale double, c'est-à-dire qu'il la transforme en une intégrale triple. Cet essai heureux le conduit à un autre mode de décomposition de l'ellipsoïde, savoir,

en couches infiniment minces comprises chacune entre deux surfaces ellipsoïdales semblables, concentriques et semblablement placées. Deux intégrations sont nécessaires pour exprimer l'attraction d'une couche, et elles sont faciles. Mais il faut effectuer auparavant de longs calculs pour parvenir à un changement de système de coordonnées, sans lequel on ne saurait dégager la couche et exprimer convenablement l'attraction de son élément de volume. Les nouveaux axes coordonnés sont les trois axes principaux du cône circonscrit à la surface externe de la couche, qui a pour sommet le point attiré. La détermination de ces trois axes se fait par des constantes qui ne sont pas données explicitement, et qui dépendent d'une équation du troisième degré. Il a fallu une très-grande habileté pour se débarrasser de ces quantités étrangères, moins une, toutefois, qui doit subsister [1].

Enfin, après ces préliminaires, qui laissent au problème de l'attraction des ellipsoïdes le caractère d'une question d'analyse toujours très-difficile et fort compliquée, l'illustre géomètre obtient une expression assez simple de l'attraction d'une couche sur un point extérieur; et cette expression, mise sous le signe $\int$, devient l'intégrale *elliptique* qui exprime l'attraction de l'ellipsoïde. Cette intégrale a une forme différente de la formule ordinaire;

[1] On évitera en grande partie ces calculs, du moins les plus difficiles, et on simplifiera la solution, en prenant pour axes coordonnés les trois normales menées par le point attiré aux trois surfaces du 2e degré, qu'on peut faire passer par ce point, de manière qu'elles aient leurs sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche attirante. Ces normales sont précisément les axes principaux du cône circonscrit à cette surface; de sorte que l'on prend le même système d'axes coordonnés que M. Poisson; mais le point de vue sous lequel on les envisage et la propriété géométrique par laquelle on les définit permettent d'exprimer sur-le-champ leur position, au moyen de trois quantités seulement, au lieu de neuf. Ces trois constantes sont les demi-axes majeurs des trois surfaces en question, et dépendent d'une même équation connue *a priori*. De ces trois quantités, une seule reste dans les formules; c'est celle qui s'est introduite jusqu'ici dans toutes les solutions de la question.

Cette manière de considérer les trois axes coordonnés a l'avantage encore de s'appliquer au cas où l'on voudrait calculer l'attraction d'une portion quelconque de la couche sur un point situé au dedans de sa surface interne, auquel cas il n'y a plus de cône circonscrit, et où l'on serait obligé, par conséquent, de recourir à une autre définition des trois axes coordonnés, c'est-à-dire à une autre propriété propre à déterminer les directions de ces trois droites dans l'espace.

mais on la ramène à celle-ci par un changement de variable [1].

Ajoutons que cette solution, ainsi que l'a remarqué M. Poisson [2], permet de supposer la densité de l'ellipsoïde variable d'une couche à une autre, en la regardant comme une fonction quelconque d'un diamètre de la surface externe d'une couche; et que dans certains cas, les composantes de l'attraction s'obtiennent, sous forme finie, par des arcs de cercle ou des logarithmes, et sans le secours des fonctions elliptiques.

M. Jacobi, qui a fait aussi de nouvelles recherches sur l'attraction des ellipsoïdes, avait déjà annoncé à l'Académie (séance du 20 octobre 1834) ce résultat intéressant, concernant l'ellipsoïde hétérogène, et un autre, non moins curieux et inattendu, sur la possibilité de l'équilibre d'une masse fluide homogène de forme ellipsoïdale à trois axes inégaux, animée d'un mouvement de rotation autour de l'un de ses axes.

On avait pensé jusqu'ici, et regardé presque comme une vérité mathématique, que la forme de l'ellipsoïde de révolution, allongé ou aplati, trouvée par Maclaurin et d'Alembert, convenait seule à la masse fluide.

Les formules sous lesquelles M. Jacobi présente son théorème semblent se rattacher à une solution de l'attraction des ellipsoïdes qui aurait de l'analogie avec celle de M. Poisson; toutefois, M. Liouville a tiré la démonstration de ce théorème des formules employées dans la Mécanique céleste, et, par un changement de variable, l'a exprimé dans les mêmes termes que M. Jacobi [3].

Quant aux résultats relatifs à l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène, ils n'exigent pas nécessairement une solution nouvelle du problème, telle que celle de M. Poisson, car ils peuvent se conclure assez facilement, par un simple changement de variable,

[1] Voir *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut*, t. XIII; année 1835; p. 497-545.

[2] Note lue à l'Académie des sciences, le 24 novembre 1834. Voir le journal *l'Institut*, année 1834, p. 387.

[3] *Journal de l'école Polytechnique*, 23e cahier, p. 289.

des anciennes formules relatives à l'ellipsoïde homogène. Cette remarque, qui n'avait point encore été faite, est le sujet d'un mémoire que nous avons inséré récemment dans le Journal de l'école Polytechnique[1]. Ainsi, nous ne pouvons former aucune conjecture sur la méthode qui a conduit l'illustre géomètre de Kœnisberg aux belles découvertes qu'il s'est contenté d'énoncer sans démonstration.

On voit, par cet exposé, que, sous le point de vue analytique, la question de l'attraction des ellipsoïdes, considérée en elle-même et indépendamment de ses applications à diverses questions du système du monde, est résolue complétement.

Mais il reste beaucoup à faire à la synthèse; car cette méthode a procuré de si beaux résultats à Maclaurin et à d'Alembert, qu'on doit désirer de lui soumettre enfin les parties du problème laissées intactes par ces deux grands géomètres, et qui ont paru depuis, à raison de leur difficulté, devoir être plus particulièrement, et peut-être exclusivement, du domaine de l'analyse[2].

Il reste donc à la synthèse à résoudre le cas de l'attraction sur des points extérieurs, et particulièrement à démontrer, dans toute sa généralité, le beau théorème de Maclaurin.

C'est ce que je me suis proposé de faire dans ce mémoire, dont je vais présenter une succincte analyse.

[1] Voir *Journal de l'école Polytechnique*, 25ᵉ cahier, p. 244-265; année 1837.

[2] M. Legendre, à la suite de sa solution pour les points extérieurs, s'exprime ainsi : « Ce problème est vraisemblablement un de ceux auxquels *la méthode synthétique ne serait point applicable*, car, pour rendre l'intégration possible, il ne paraît pas qu'il y ait d'autre moyen que de décomposer, comme nous avons fait, le sphéroïde en couches ou en enveloppes coniques, dans lesquelles ω est constant; or, l'attraction d'une de ces enveloppes exige une intégration très-difficile et fort au-dessus des moyens ordinaires de la synthèse. » (*Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1788, p. 486.)

M. Poisson, après avoir exprimé l'opinion que l'analyse seule peut résoudre les problèmes un peu difficiles, et que la synthèse y est impuissante, dit que, néanmoins, le livre des Principes mathématiques de la philosophie naturelle fait exception à cette règle, et ajoute ce qui suit : « On peut encore citer les beaux théorèmes de Maclaurin sur l'attraction d'un ellipsoïde; mais s'il est vrai que dans cette question la synthèse ait d'abord devancé l'analyse, celle-ci a bientôt repris sa supériorité entre les mains de Lagrange, et la question n'a été enfin résolue complétement que par des transformations analytiques, que l'on n'a pas tout de suite imaginées, et *auxquelles la synthèse n'aurait pu suppléer.* » (*Note sur le mouvement de rotation d'un corps solide*, lue à l'Académie des sciences, le 26 mai 1834. Voir le journal *l'Institut*, année 1834, p. 217.)

ANALYSE DU MÉMOIRE.

Je considère l'ellipsoïde comme composé de couches infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces semblables, et je démontre un théorème analogue à celui de Maclaurin, relatif aux attractions que deux couches, dont les surfaces externes ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, exercent sur un même point extérieur. Ces attractions ont la même direction, et sont entre elles comme les masses des deux couches.

Ce théorème s'étend à deux couches d'une épaisseur finie quelconque, comprises chacune entre deux surfaces semblables, telles que les deux surfaces externes soient décrites des mêmes foyers, et que les deux surfaces internes, qui leur sont respectivement semblables, aient aussi entre elles les mêmes foyers.

Si l'on suppose maintenant que dans chaque ellipsoïde la surface interne se réduise à un point, la couche devient l'ellipsoïde entier, et l'on a le théorème de Maclaurin, sans avoir eu besoin de connaître l'expression de l'attraction de ces ellipsoïdes.

Réciproquement, du théorème de Maclaurin, on aurait pu conclure que ce théorème devait s'appliquer à deux couches d'épaisseur finie, comprises chacune entre deux surfaces semblables, telles que nous venons de les définir; et de là on eût été conduit immédiatement à la considération de ces couches infiniment minces, et à la décomposition de l'ellipsoïde en pareilles couches. On peut s'étonner qu'une remarque si simple ait échappé à tous les géomètres qui se sont occupés, depuis un siècle et demi, de cette question célèbre; car elle n'a été faite que dans ces derniers temps par M. Poinsot[1].

[1] Voici comment s'exprime l'illustre géomètre, dans son rapport à l'Académie sur le présent mémoire :

« La marche de M. Chasles est fort naturelle. Car si l'on suppose vrai le théorème de Maclaurin pour deux ellipsoïdes homogènes des mêmes foyers, on voit tout de suite qu'il le serait également pour deux autres ellipsoïdes concentriques, situés de même, et respectivement semblables aux deux proposés, pourvu que chacun d'eux fût une même fraction de l'ellip-

Quant à ma démonstration, elle revient à comparer, une à une, les attractions exercées par des éléments de volume qui se correspondent, d'une certaine manière, dans les deux corps. La détermination de ces éléments correspondants formait la vraie difficulté de la question; difficulté qui disparaît, pour ainsi dire, dans le cas particulier traité par Maclaurin.

Pour le calcul de l'attraction de l'ellipsoïde, je cherche d'abord l'expression de l'attraction d'une couche infiniment mince sur un point extérieur; de là je passe à l'expression de l'action d'une couche d'une épaisseur finie, et par suite à celle de l'ellipsoïde entier.

De cette manière, les deux questions auxquelles nous avons dit que l'attraction sur des points extérieurs donnait lieu, dont l'une est la démonstration du théorème de Maclaurin, et l'autre le calcul de l'attraction absolue, se trouvent résolues en même temps, d'une manière directe et *a priori*, c'est-à-dire, sans qu'on se soit servi de la formule pour l'attraction sur des points intérieurs, ni du théorème de M. Ivory. Et ajoutons que les deux questions sont aussi résolues indépendamment l'une de l'autre.

Cette solution s'applique à l'ellipsoïde hétérogène, où la densité est une fonction quelconque de la distance de chaque point au centre de l'ellipsoïde, divisée par le demi-diamètre sur lequel le point est situé.

La valeur de l'attraction qu'une couche infiniment mince exerce sur un point extérieur s'exprime sous une forme géométrique très-simple et donnant plusieurs conséquences qui sont des propriétés de cette attraction. Quant à sa direction, elle se présente sous un autre énoncé que dans le mémoire de

soïde auquel il appartient, parce qu'alors ces deux noyaux ou ellipsoïdes intérieurs auraient aussi entre eux les mêmes foyers. Et de là, il est aisé de voir, par la simple composition des forces, que le même théorème aurait encore lieu pour les deux couches ellipsoïdales ou ellipsoïdes creux, dont chacun est la différence de l'ellipsoïde entier au noyau semblable que l'on y considère. Et réciproquement, il est bien manifeste que si le théorème était démontré pour deux telles couches d'une épaisseur quelconque, il le serait sur-le-champ pour les deux ellipsoïdes. » (*Comptes rendus des séances de l'Académie*, t. VI, p. 810; année 1838.)

M. Poisson; je trouve que *cette direction coïncide avec la normale à un ellipsoïde mené par le point attiré et ayant ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche.*

Cet énoncé a l'avantage de faire connaître les *surfaces de niveau* relatives à l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince, sur des points extérieurs : ces surfaces sont celles d'ellipsoïdes décrits des mêmes foyers que la surface externe de la couche.

Ce théorème, curieux déjà dans la question théorique de l'attraction, peut avoir quelques applications utiles dans la théorie de l'électricité, et surtout dans celle de la chaleur; car, si l'on y joint l'expression trouvée pour l'attraction de la couche sur un point, on en conclut immédiatement l'expression de la température en chaque point d'une enveloppe solide, homogène, d'une épaisseur quelconque, comprise entre deux surfaces ellipsoïdales dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers, ces surfaces étant entretenues à des températures constantes, différentes de l'une à l'autre; ce qui offre une démonstration synthétique des résultats trouvés par M. Lamé, dans son mémoire sur les surfaces isothermes[1].

Les formules pour l'attraction, soit d'une couche ellipsoïdale infiniment mince ou d'une épaisseur finie, soit d'un ellipsoïde entier, sur un point extérieur, contiennent un coefficient qui dépend de la position de ce point dans l'espace, et qui est donné par une équation du 3ᵉ degré. Pour compléter la solution géométrique du problème, je construis graphiquement, par des considérations particulières, les racines de cette équation.

Cette solution du problème de l'attraction des ellipsoïdes repose sur quelques propriétés fort belles des surfaces du second

[1] J'ai donné cette démonstration, et fait plusieurs autres rapprochements entre l'attraction des corps et les phénomènes de la chaleur, dans un mémoire sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince, et les rapports qui ont lieu entre cette attraction et les lois de la chaleur en mouvement dans un corps solide en équilibre de température. (Voir, 25ᵉ cahier du Journal de l'école Polytechnique, à la suite du mémoire cité ci-dessus, page 640.)

degré, particulièrement des surfaces qui ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers.

La démonstration de ces propriétés, que je dois donner d'abord, parce qu'elles sont nouvelles, allonge beaucoup ce mémoire : c'est la seule partie qui offre quelque difficulté. Mais on doit considérer que ces préliminaires sont comme étrangers à la question propre qui fait l'objet de ce mémoire; car ils ne roulent que sur quelques propriétés des surfaces du second degré, qui devraient, depuis longtemps, faire partie de cette théorie, si elle avait été cultivée en raison de son importance dans les nombreuses questions qui se présentent dans l'étude de la nature.

C'est là le défaut actuel de la géométrie, qui se fait sentir souvent, et qui provient de ce que cette branche principale des mathématiques a été depuis trop longtemps négligée. Elle manque des théories qui lui sont nécessaires et qui devraient former des *éléments de haute géométrie*, comme faisait, à certains égards, cette partie de la géométrie des Grecs, appelée *analyse géométrique*, sur laquelle Pappus nous a laissé, dans ses Collections mathématiques, des détails précieux. Ces *éléments* offriraient, dans chaque question, des ressources analogues à celles que l'on trouve dans l'analyse moderne, dont les théories et les méthodes, incessamment perfectionnées, deviennent plus puissantes de jour en jour. Dépourvu de pareils secours en géométrie, on est obligé de créer, au fur et à mesure des besoins, les principes et les théories qui manquent à cette méthode; ce qui la fait regarder comme longue, difficile et impuissante, tandis qu'elle est facile et lumineuse quand les voies qui lui sont propres ont été préparées, et que l'esprit, qui tend à un but principal, trouve, comme sous sa main, les éléments nécessaires pour former la chaîne des propositions qui doivent lier le point de départ au résultat cherché. L'analyse, au moyen de ses procédés mécaniques de transformations, a, il est vrai, ce grand avantage, qu'on peut ignorer et négliger ces propositions intermédiaires. Mais aussi, combien cette méthode, dans sa marche rapide et mystérieuse, ne perd-elle pas

en lumière et en fécondité, et ne laisse-t-elle pas échapper souvent de vérités capitales.

Puisque chaque méthode a ses avantages propres, il serait donc bien important qu'elles fussent cultivées concurremment et avec le même soin.

§ 1. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

(1) Soient deux surfaces du second degré U, V, semblables entre elles et semblablement placées, ayant leurs centres G, S en deux points différents de l'espace; soit λ leur rapport de similitude, c'est-à-dire le rapport entre deux lignes homologues des deux figures; et soient H, H' les points où la droite des centres SG rencontre la première surface.

Ces deux surfaces jouiront des deux propriétés suivantes :

1° *Si autour du point* S *on fait tourner une transversale qui rencontre la première surface en deux points* Π, Π', *et la seconde en un point* π, *on aura la relation constante :*

$$(a) \qquad S\Pi \cdot S\Pi' = \lambda^2 \left(\frac{\overline{SG}^2}{\overline{GH}^2} - 1 \right) \cdot \overline{S\pi}^2 ;$$

2° *Si l'on mène deux plans tangents à la première surface, et un plan tangent à la seconde, tous trois perpendiculaires à la transversale, et la rencontrant aux trois points* Γ, Γ' *et* γ, *respectivement, on aura*

$$(b) \qquad S\Gamma - S\Gamma' = 2\lambda \cdot S\gamma .$$

En effet, soit $G\rho$ le demi-diamètre de la surface U, qui est parallèle à la transversale $S\Pi$; on sait, par une propriété générale des surfaces du second degré, commune à toutes les surfaces géométriques, qu'on aura $\frac{S\Pi \cdot S\Pi'}{\overline{G\rho}^2} = \text{const.} = \frac{SH \cdot SH'}{\overline{GH}^2}$, quelle que soit la direction de la transversale $S\Pi$; mais les deux surfaces U, V étant semblables et semblablement placées, et λ étant leur rap-

port de similitude, on a entre leurs demi-diamètres $G\rho$, $S\pi$, qui sont homologues, la relation $G\rho = \lambda \cdot S\pi$; on a donc

$$\frac{S\Pi \cdot S\Pi'}{\lambda^2 \overline{S\pi}^2} = \frac{SH \cdot SH'}{\overline{GH}^2}.$$

Or,

$$SH \cdot SH' = (SG + GH)(SG - GH) = \overline{SG}^2 - \overline{GH}^2;$$

il vient donc

$$S\Pi \cdot S\Pi' = \lambda^2 \left(\frac{\overline{SG}^2}{\overline{GH}^2} - 1 \right) \cdot \overline{S\pi}^2;$$

ce qui est la première partie du théorème.

Pour démontrer la seconde partie, remarquons que $(S\Gamma - S\Gamma')$ est la distance entre deux plans tangents à la surface U, parallèles entre eux, et $S\gamma$ la moitié de la distance entre deux plans tangents à la seconde surface parallèles aux deux premiers. Ces deux distances sont deux lignes homologues par rapport aux deux surfaces; on a donc

$$S\Gamma - S\Gamma' = 2\lambda \cdot S\gamma;$$

ce qui est la seconde partie du théorème.

(2) Maintenant faisons la *transformation polaire* des deux surfaces U, V, par rapport à une sphère concentrique à la seconde; nous aurons deux autres surfaces U', V' correspondantes, respectivement, aux deux premières[1]. Aux *points* Π, Π' de la surface U

[1] La théorie des transformations polaires, due, comme on sait, à M. Poncelet, est destinée à devenir d'un fréquent usage en géométrie; et il est à regretter qu'elle soit encore peu répandue. Les principes sur lesquels elle repose étant très-simples, je vais les rappeler ici en peu de mots.

On appelle *pôle* d'un plan, par rapport à une surface du second degré, un point par où passent tous les plans des courbes de contact de la surface et des cônes circonscrits qui ont leurs sommets situés sur le plan proposé; et ce plan est dit le *plan polaire* du point.

Quand ce plan coupe la surface, son *pôle* est précisément le sommet du cône circonscrit à la surface suivant la courbe d'intersection.

La *transformée polaire* U' d'une surface U est l'enveloppe des *plans polaires* des points de cette

correspondront deux *plans tangents* à la surface U′; ces plans seront perpendiculaires à la droite SΠ, et leurs distances au point S seront en raison inverse des lignes SΠ, SΠ′ : soient SP, SP′ ces distances. Pareillement, au point π de la surface V, correspondra un plan tangent à la surface V′, et sa distance au point S sera en raison inverse de Sπ, soit Sp cette distance. On aura donc, en supposant le rayon de la sphère égal à l'unité,

$$SP = \frac{1}{S\Pi}, \quad SP' = \frac{1}{S\Pi'}, \quad \text{et} \quad Sp = \frac{1}{S\pi}.$$

D'après cela, l'équation (*a*) donne celle-ci :

$$(a') \qquad \frac{1}{SP}\cdot\frac{1}{SP'} = \lambda^2\left(\frac{\overline{SG}^2}{\overline{GH}^2} - 1\right)\frac{1}{Sp^2}.$$

Aux plans tangents à la surface U, qui sont perpendiculaires à la transversale SΠ, correspondent les points M, M′, où cette

surface. De sorte qu'à chaque *point* de la surface U correspond un *plan* dans la surface U′.

Ce qui caractérise ce mode de transformation, parmi une infinité d'autres où des *plans* peuvent correspondre à des *points*, c'est que, *quand des points de la première figure sont situés sur un* plan, *les plans qui leur correspondent dans la seconde figure passent tous par un même* point, *qui est le* pôle *du* plan.

On conclut de là, que la première figure est l'enveloppe des plans polaires des points de la seconde figure, de même que celle-ci est l'enveloppe des plans polaires des points de la première. De sorte qu'il y a réciprocité de construction, l'une par l'autre, dans les deux figures.

Ensuite, on voit que, quand les points pris dans l'une des deux figures sont situés en ligne droite, leurs plans correspondants passent tous par une même droite.

D'où l'on conclut que le nombre des plans tangents, que l'on peut mener à l'une des deux surfaces par une même droite quelconque, est le même que le nombre des points où une transversale peut rencontrer l'autre surface. Il suit de là, en particulier, que, quand l'une des deux surfaces est du second degré, l'autre est aussi nécessairement du second degré.

Le plan polaire d'un point *m* se construit directement, sans considération des cônes circonscrits, de la manière suivante. Par le centre S de la surface du second degré, par rapport à laquelle on fait la transformation polaire, on mène le demi-diamètre Sα aboutissant au point *m*; on prend sur ce demi-diamètre un segment $S\alpha = \frac{\overline{S\alpha}^2}{Sm}$, et par son extrémité a, on mène un plan parallèle au plan conjugué au demi-diamètre Sα : *c'est le plan polaire du point* m.

Quand la surface est une sphère, ce plan est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point *m*, et sa distance au centre de la sphère est toujours en raison inverse de la distance du point à ce centre.

droite rencontre la surface U′; et les segments SM, SM′ sont en raison inverse des distances SΓ, SΓ′ du point S aux deux plans tangents. Pareillement, au plan tangent à la surface V, correspond le point m, où la transversale rencontre la surface V′, et Sm est en raison inverse de $S\gamma$. L'équation (b) devient donc

$$(b') \qquad \frac{1}{SM} - \frac{1}{SM'} = 2\lambda \frac{1}{Sm}.$$

Il faut remplacer, dans l'équation (a'), le rapport $\frac{SG}{GH}$, qui appartient à la première figure, par l'expression qui lui correspond dans la nouvelle.

Au point G, qui est le centre de la surface U, correspond le plan polaire du point S, pris par rapport à la surface U′ [1]; et aux deux points H, H′ correspondent deux plans tangents à la surface U′. Ces trois plans sont perpendiculaires à la droite SG, et la rencontrent en trois points g, h, h', pour lesquels on a

$$Sg = \frac{1}{SG}, \quad Sh = \frac{1}{SH}, \quad Sh' = \frac{1}{SH'}.$$

On a donc

$$\frac{SG}{GH} = \frac{SG}{SG - SH} = \frac{1}{1 - \frac{SH}{SG}} = \frac{1}{1 - \frac{Sg}{Sh}} = \frac{Sh}{Sh - Sg} = \frac{Sh}{hg}.$$

Les deux plans tangents à la surface U′ sont parallèles au plan polaire du point S; conséquemment ils touchent cette surface

[1] J'ai énoncé cette proposition dans les Annales de mathématiques, t. XVIII, p. 271, et j'ai démontré depuis, dans le mémoire sur le principe de dualité, qui fait suite à mon Aperçu historique (art. 17, p. 597), une proposition plus générale, d'où elle se conclut. Mais en voici une démonstration directe : Quand on fait la transformée polaire U′ d'une surface du second degré U, *à un* point *et à son* plan polaire, *par rapport à la surface* U, *correspondent dans la nouvelle figure un* plan *et son* pôle *par rapport à la surface* U′. Si le point pris dans la première figure est le centre G de la surface U, son plan polaire sera à l'infini; le point qui lui correspondra dans la nouvelle figure sera donc le centre S de la surface auxiliaire qui sert à faire la transformation, et conséquemment le plan correspondant au point G sera le plan polaire du point S par rapport à la surface U′.

aux extrémités du diamètre qui passe par le point S. Soit D l'une de ces extrémités, et G_1 le point où le diamètre perce le plan polaire du point S; on a dans le triangle ShD, coupé par la droite gG_1, parallèle à sa base hD; $\frac{Sh}{hg} = \frac{SD}{DG_1}$. Donc $\frac{SG}{GH} = \frac{SD}{DG_1}$.

Soit O le centre de la surface U′, on a

$$\frac{SD}{DG_1} = \frac{SD}{DO+OG_1} = \frac{SD}{DO+\frac{\overline{OD}^2}{OS}} = \frac{OS}{OD}\cdot\frac{SD}{OS+OD} = \frac{OS}{OD}\cdot\frac{SD}{SD} = \frac{OS}{OD}.$$

On a donc enfin

$$\frac{SG}{GH} = \frac{SO}{OD}.$$

L'équation (a') devient

$$(a'') \qquad \frac{1}{SP}\cdot\frac{1}{SP'} = \lambda^2\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1\right)\frac{1}{\overline{Sp}^2}.$$

Ainsi l'on a, relativement aux deux surfaces U′, V′, les deux équations

$$\frac{2\lambda}{Sm} = \frac{1}{SM} - \frac{1}{SM'},$$

$$\overline{Sp}^2 = \lambda^2\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1\right)SP.SP'.$$

(3) On conclut de là ce théorème :

Etant donnée une surface du second degré A, *si autour d'un point fixe* S *on fait tourner une transversale qui la rencontre en deux points* M, M′, *et que sur cette droite on prenne un point* m, *tel que l'on ait*

$$(1) \qquad \frac{2\lambda}{Sm} = \frac{1}{SM} - \frac{1}{SM'},$$

λ *étant une constante :*

1° *Le point* m *appartiendra à une surface du second degré* A′, *dont le centre sera situé au point* S;

2° *Si* SP, SP′ *sont les segments faits sur la transversale par les deux plans tangents à la surface* A, *menés perpendiculairement à cette droite, et* Sp *le segment fait par un plan tangent à la surface* A′, *parallèle aux premiers, on aura la relation constante*

$$(2) \qquad \overline{Sp}^2 = \lambda^2 \left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1 \right) SP \cdot SP',$$

le point O *étant le centre de la surface* A, *et* OD *son demi-diamètre sur lequel est situé le point* S.

La première équation servira pour construire les points de la surface A′, et la seconde, pour construire ses plans tangents [1].

(4) La formule (1) peut se transformer en une autre plus simple, qui nous sera utile. On a

$$\frac{1}{SM} - \frac{1}{SM'} = \frac{SM' - SM}{SM \cdot SM'} = \frac{MM'}{SM \cdot SM'}.$$

Soit $O\mu$ le demi-diamètre de la surface A parallèle à la transversale SM; on aura, comme ci-dessus (1),

$$\frac{SM \cdot SM'}{\overline{O\mu}^2} = \text{const.} = \frac{SD \cdot SD'}{\overline{OD}^2} = \frac{(SO + OD)(SO - OD)}{\overline{OD}^2} = \left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1 \right);$$

d'où

$$\frac{1}{SM} - \frac{1}{SM'} = \frac{MM'}{\overline{O\mu}^2} : \left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1 \right).$$

[1] Il est plusieurs autres manières de démontrer ce théorème, sans se servir de la théorie des *polaires réciproques;* mais j'ai choisi, pour la circonstance actuelle, la démonstration qui exigeait le moins de développements et de connaissances préliminaires, quoiqu'elle soit peut-être la plus difficile.

Les deux surfaces A, A′ ont entre elles plusieurs autres relations que j'ai données dans mon mémoire sur le *principe d'homographie* (§ 19, p. 783-793), et dont il est inutile de parler ici. Je me bornerai à dire que ces deux surfaces sont *homologiques,* dans l'acception de M. Poncelet, et que leur *centre d'homologie* est le point S. Cela résulte de ce que les deux surfaces U, V, dont nous avons fait la transformation polaire, étaient semblables et semblablement placées, et avaient par conséquent une courbe d'intersection plane située à l'infini, à laquelle répond, dans la nouvelle figure, un *centre d'homologie* des deux surfaces A, A′, qui est le point S.

L'équation (1) devient donc

$$\frac{2\lambda}{Sm} = \frac{MM'}{\overline{O\mu}^2} : \left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1 \right),$$

ou

$$(3) \qquad Sm = 2\lambda \left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1 \right) \frac{\overline{O\mu}^2}{MM'}.$$

Cette équation exprime que :

Si autour d'un point fixe S *on fait tourner une transversale qui rencontre une surface du second degré* A *en deux points* M, M', *et que,* Oμ *étant le demi-diamètre de cette surface mené parallèlement à la transversale, on prenne sur cette droite un segment* Sm *proportionnel au rapport* $\frac{\overline{O\mu}^2}{MM'}$, *le point* m *aura pour lieu géométrique une surface du second degré* A', *ayant son centre en* S.

(5) Plusieurs conséquences découlent de cette proposition. Appelons Sa, Sb, Sc les trois demi-diamètres principaux de la surface A', et Sm un autre demi-diamètre quelconque, faisant avec les trois premiers des angles θ, φ, ψ, on aura, comme on sait,

$$\frac{1}{\overline{Sm}^2} = \frac{\cos^2\theta}{\overline{Sa}^2} + \frac{\cos^2\varphi}{\overline{Sb}^2} + \frac{\cos^2\psi}{\overline{Sc}^2}.$$

Soient AA', BB', CC' les segments interceptés par la surface A sur les trois axes principaux de la surface A', et Oα, O$\mathfrak{E}$, Oγ les trois demi-diamètres de A, qui sont parallèles à ces trois axes principaux; on aura, d'après la formule (3),

$$(4) \qquad \begin{cases} Sa = 2\lambda \left(\dfrac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1 \right) \dfrac{\overline{O\alpha}^2}{AA'}, \\ Sb = 2\lambda \left(\dfrac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1 \right) \dfrac{\overline{O\mathfrak{E}}^2}{BB'}, \\ Sc = 2\lambda \left(\dfrac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1 \right) \dfrac{\overline{O\gamma}^2}{CC'}. \end{cases}$$

Ces expressions et celle de S*m* (formule 3) étant substituées dans l'équation ci-dessus, on a

$$(5)\qquad \frac{\overline{MM'}^2}{\overline{O\mu}^4} = \frac{\overline{AA'}^2}{\overline{O\alpha}^4}\cos^2\theta + \frac{\overline{BB'}^2}{\overline{O\mathfrak{S}}^4}\cos^2\varphi + \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{Oγ}^4}\cos^2\psi.$$

C'est l'expression du rapport $\frac{MM'}{\overline{O\mu}^2}$ compté sur une transversale quelconque issue du point S, en fonction des trois rapports pareils, comptés sur les trois axes principaux de la surface A'.

Nous verrons tout à l'heure comment on détermine dans la surface même A la direction de ces trois axes principaux.

(6) Remarquons que les trois rapports $\frac{\overline{O\alpha}^2}{\overline{AA'}}$, $\frac{\overline{O\mathfrak{S}}^2}{\overline{BB'}}$, $\frac{\overline{Oγ}^2}{\overline{CC'}}$, étant proportionnels aux trois demi-diamètres principaux de la surface A', sont les valeurs *maxima*, *minima* et *moyenne* du rapport $\frac{\overline{O\mu}^2}{\overline{MM'}}$.

Si l'on demande que ce rapport ait une valeur constante, le demi-diamètre S*m* de la surface A', auquel il est proportionnel, sera sur un cône du second degré, passant par la courbe d'intersection de la surface A' par une sphère concentrique. Ce cône a, comme on sait, ses axes principaux dirigés suivant les trois diamètres principaux de la surface A'; ainsi : *Les transversales pour lesquelles le rapport* $\frac{\overline{O\mu}^2}{\overline{MM'}}$ *a une valeur constante forment un cône du second degré; et tous ces cônes ont les mêmes axes principaux*[1].

[1] On démontre aisément que tous ces cônes ont leurs sections sous-contraires situées dans les mêmes plans; de sorte qu'ils jouissent des nombreuses propriétés qui appartiennent aux cônes qui ont les mêmes plans *cycliques*. (Voir *Mém. sur les propriétés générales des cônes du second degré*, t. VI des Mém. de l'Acad. royale de Bruxelles, ann. 1830.) Les deux plans *cycliques* des cônes jouissent ici de cette propriété particulière, relative à la surface A, savoir, de couper cette surface suivant deux coniques qui ont chacune un foyer au sommet commun des cônes.

Ces cônes sont ceux dont M. Legendre s'est servi pour régler la marche de ses intégrales, dans son mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes; mais ne les ayant considérés que sous leur expression analytique, et dans un seul but, M. Legendre n'a remarqué aucune de leurs propriétés géométriques.

(7) Les propriétés des surfaces du second degré, que nous venons de démontrer, sont générales, quelle que soit la position du point S, au dehors ou au dedans de la surface A. Dans les applications que nous aurons à en faire, nous supposerons le point S au dehors. Dans ce cas, la transversale SM peut être menée tangentiellement à la surface A; on a alors $MM' = 0$, et le demi-diamètre S*m* devient infini; ce qui prouve que la surface A′ est alors un hyperboloïde, ayant pour cône asymptote le cône circonscrit à la surface A, qui a son sommet en S. On conclut de là que

Les trois diamètres principaux de la surface A′ *sont, en direction, les trois axes principaux du cône circonscrit à la surface* A.

Ainsi, quand le point S est situé au dehors de la surface A, les trois segments AA′, BB′, CC′ de l'équation (5) sont formés sur les trois axes principaux du cône circonscrit à cette surface.

Quand le point S est pris dans l'intérieur de la surface A, on ne peut plus se servir de cette considération pour exprimer la direction des trois droites rectangulaires, sur lesquelles sont comptés ces trois segments, puisque le cône devient imaginaire; mais nous démontrerons plus loin (13) une propriété *permanente* de ces trois droites, qui sert à exprimer leur direction dans tous les cas [1].

(8) Démontrons maintenant quelques propriétés des surfaces du second degré, qui ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers.

Quand deux surfaces du second degré ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, si l'on mène deux plans tangents à ces deux surfaces respectivement, et parallèles entre eux, la différence des carrés des distances de ces plans au centre commun des deux surfaces sera constante.

[1] Cette propriété des trois droites, d'être les axes principaux du cône circonscrit à la surface A, est une de celles que j'ai appelées *propriétés contingentes*, dans mon Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (voir p. 197-207). « Ces sortes de propriétés sont très-utiles pour démontrer des théorèmes dans les cas mêmes où elles deviennent imaginaires. » (*Aperçu, etc.* p. 359-368.)

En effet, soit p la perpendiculaire abaissée du centre commun des deux surfaces sur le plan tangent à la première, la somme des carrés des projections de trois demi-diamètres conjugués quelconques de cette surface, sur cette droite, sera constante. Supposons que l'un de ces demi-diamètres soit celui qui aboutit au point de contact du plan tangent, les deux autres seront dans un plan parallèle à ce plan tangent et perpendiculaire à la droite p; conséquemment, la somme des carrés des trois projections sera égale au carré de la perpendiculaire p. Qu'on prenne maintenant, pour les trois demi-diamètres conjugués, les trois demi-diamètres principaux de la surface, que j'appelle a, b, c, et soient α, β, γ les cosinus des angles que la droite p fait avec ces trois demi-diamètres, leurs projections sur cette droite seront égales à $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$; on aura donc

$$p^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2.$$

Soient a', b', c' les trois demi-diamètres principaux de la seconde surface, et p' la perpendiculaire abaissée du centre sur son plan tangent, parallèle au plan tangent à la première surface; on aura

$$p'^2 = a'^2\alpha^2 + b'^2\beta^2 + c'^2\gamma^2.$$

On a donc

$$p^2 - p'^2 = (a^2 - a'^2)\,\alpha^2 + (b^2 - b'^2)\,\beta^2 + (c^2 - c'^2)\,\gamma^2.$$

Les deux surfaces ayant leurs sections principales décrites des mêmes foyers, on a

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2;$$

donc

$$p^2 - p'^2 = (a^2 - a'^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a^2 - a'^2 = \text{const.}$$

Ainsi le théorème est démontré.

(9) Réciproquement : *Quand deux surfaces du second degré, concentriques, sont telles, que la différence des carrés des distances de*

leur centre commun, à deux plans quelconques, parallèles entre eux et tangents, respectivement, aux deux surfaces, soit constante, ces deux surfaces ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers.

Car soient A, B les deux surfaces, et δ^2 la différence des carrés des distances de leur centre à deux plans, parallèles entre eux et tangents, respectivement, à ces deux surfaces; soient a, b, c les demi-diamètres principaux de la première. Que l'on conçoive une troisième surface B′, dont les sections principales aient les mêmes foyers que celles de la surface A, et telle, que la différence des carrés de deux demi-diamètres principaux correspondants soit égale à δ^2; la différence des carrés des distances du centre des deux surfaces à deux plans tangents, parallèles entre eux, sera aussi δ^2, d'après le théorème ci-dessus. Il s'ensuit que les plans tangents à la surface B′ se confondent avec les plans tangents à la surface B. Donc celle-ci a ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface A : *ce qu'il fallait démontrer.*

(10) Soient deux surfaces A, B, dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers : qu'on leur mène des plans tangents perpendiculaires à une transversale issue d'un point fixe S, et soient P, P′ et Q, Q′ les points où ces plans rencontrent la transversale; qu'on prenne sur cette droite deux segments Sp, Sq, déterminés par les relations

$$\overline{Sp}^2 = \nu.\mathrm{SP}.\mathrm{SP}', \qquad \overline{Sq}^2 = \nu.\mathrm{SQ}.\mathrm{SQ}',$$

ν étant une constante; et que, par les extrémités p, q des deux segments, on mène des plans perpendiculaires à la transversale; *ces deux plans envelopperont deux surfaces du second degré* A′, B′, *ayant leur centre commun au point* S. Cela résulte de la seconde partie du théorème (art. 3). Je dis de plus que :

Ces deux surfaces auront leurs sections principales décrites des mêmes foyers.

Pour le démontrer, il suffit, d'après le théorème précédent, de faire voir que la différence des carrés des distances du centre

commun des deux surfaces à deux quelconques de leurs plans tangents, parallèles entre eux, est constante, c'est-à-dire qu'on a

$$\overline{Sp}^2 - \overline{Sq}^2 = \text{const.}$$

Or, on a

$$\overline{Sp}^2 - \overline{Sq}^2 = \nu.(SP.SP' - SQ.SQ').$$

Par le centre commun des deux surfaces proposées A, B, menons un plan parallèle aux plans tangents, et soit O' le point où il rencontre la transversale, ce sera le point milieu de chacun des deux segments PP', QQ'; de sorte qu'on aura

$$SP.SP' = \overline{SO'}^2 - \overline{O'P}^2,$$

$$SQ.SQ' = \overline{SO'}^2 - \overline{O'Q}^2.$$

Donc

$$\overline{Sp}^2 - \overline{Sq}^2 = \nu\left(\overline{O'Q}^2 - \overline{O'P}^2\right).$$

Mais les lignes O'P, O'Q sont égales aux perpendiculaires abaissées du centre des deux surfaces sur leurs plans tangents respectifs. On a donc, d'après le théorème (8),

$$\overline{O'Q}^2 - \overline{O'P}^2 = \text{const.} = a'^2 - a^2.$$

Donc

$$\overline{Sp}^2 - \overline{Sq}^2 = \nu(a'^2 - a^2) = \text{const.}$$

Ce qui prouve que *les deux surfaces* A', B' *ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers :* ce qu'il fallait démontrer.

(11) Il résulte de là, que *les deux surfaces* A', B' *ont leurs diamètres principaux dirigés suivant les trois mêmes droites.*

Mais les diamètres de la première sont, en direction, les trois axes principaux du cône circonscrit à la surface A, qui a son

sommet en S, et les diamètres de la seconde sont, en direction, les axes principaux du cône circonscrit à la surface B : donc ces deux cônes ont les mêmes axes principaux.

On a donc ce théorème :

Quand deux surfaces du second degré ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, si l'on regarde un point quelconque de l'espace comme le sommet commun de deux cônes circonscrits aux deux surfaces, respectivement, ces deux cônes auront les mêmes axes principaux[1].

(12) Si le sommet commun des deux cônes est pris sur l'une des deux surfaces, le cône, pour cette surface, deviendra son plan tangent, et l'un de ses axes principaux sera la normale à la surface, de sorte que l'un des axes principaux du cône circonscrit à la seconde surface sera la normale à la première ; les deux autres axes principaux de ce cône seront pareillement les normales aux deux autres surfaces qu'on peut faire passer par son sommet, de manière que leurs sections principales aient les mêmes foyers que celles de la surface inscrite au cône.

On a donc ce théorème général :

Les axes principaux d'un cône quelconque circonscrit à une surface du second degré sont les normales aux trois surfaces qu'on peut faire passer par le sommet du cône, de manière qu'elles aient leurs sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface proposée.

(13) Il suit de là que les trois diamètres principaux de la surface A′, dans le théorème (art. 3), sont dirigés suivant les normales aux trois surfaces qu'on peut mener par le point S, de manière qu'elles aient leurs sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface A.

[1] Ces deux cônes jouissent d'une autre propriété remarquable : *ils ont les mêmes lignes focales.* Il en résulte qu'*ils se coupent à angles droits ;* et de là on conclut cette propriété des surfaces du second degré :

Quand deux surfaces du second degré ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, de quelque point de l'espace qu'on les considère, leurs contours apparents paraissent se couper à angles droits. (Voir *Aperçu historique*, p. 392.)

Ce théorème a lieu pour toutes les positions du point S, même dans l'intérieur de la surface A, de sorte qu'il sert pour déterminer, dans tous les cas, les directions des trois diamètres principaux de la surface A'.

(14) Il conduit à des expressions nouvelles des longueurs de ces diamètres, et à des valeurs des trois rapports $\frac{\overline{O\alpha}^2}{\overline{AA'}^2}$, $\frac{\overline{O\beta}^2}{\overline{BB'}^2}$, $\frac{\overline{O\gamma}^2}{\overline{CC'}^2}$, qui sont indépendantes de la considération de la surface A'.

En effet, le plan tangent à cette surface, mené par l'extrémité de son demi-diamètre Sa, est perpendiculaire à ce diamètre; soient P, P' les points où les deux plans tangents à la surface A, perpendiculaires à ce même diamètre Sa, le rencontrent, on aura, d'après l'équation (2),

$$\overline{Sa}^2 = \lambda^2 \left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1 \right) SP.SP';$$

ou, en remplaçant SP. SP' comme ci-dessus (10),

$$\overline{Sa}^2 = \lambda^2 \left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1 \right) \left(\overline{SO'}^2 - \overline{O'P}^2 \right).$$

O' est le point où le plan mené par le centre de la surface A, perpendiculairement à la droite Sa, rencontre cette droite. Par le point S, menons un plan parallèle à celui-là, il sera tangent à l'une des trois surfaces, qu'on peut faire passer par ce point, de manière qu'elles aient leurs sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la proposée (13), de sorte qu'en appelant a_1 le demi-axe majeur de cette surface, et a celui de la surface A, on aura, d'après le théorème (8),

$$\overline{SO'}^2 - \overline{O'P}^2 = a_1^2 - a^2.$$

Ainsi l'on a

$$(6) \qquad \overline{Sa}^2 = \lambda^2 \left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1 \right) (a_1^2 - a^2).$$

Soient pareillement a_2 et a_3 les demi-axes majeurs des deux autres surfaces, qu'on peut faire passer par le point S, de manière qu'elles aient leurs sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface A; on aura

$$(6)\qquad \begin{cases} \overline{Sb}^2 = \lambda^2\left(\dfrac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1\right)(a_2^2 - a^2), \\ \overline{Sc}^2 = \lambda^2\left(\dfrac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1\right)(a_3^2 - a^2). \end{cases}$$

Telles sont les expressions des trois demi-diamètres principaux de la surface A', en fonction des axes majeurs des trois surfaces qui passent par le point S.

En les comparant aux formules (4), on en conclut les expressions suivantes des trois rapports $\dfrac{\overline{O\alpha}^2}{\overline{AA'}^2}$, $\dfrac{\overline{O\mathfrak{S}}^2}{\overline{BB'}^2}$, $\dfrac{\overline{O\gamma}^2}{\overline{CC'}^2}$,

$$(7)\qquad \frac{\overline{O\alpha}^2}{\overline{AA'}^2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a_1^2 - a^2}}{\sqrt{\dfrac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1}},\quad \frac{\overline{O\mathfrak{S}}^2}{\overline{BB'}^2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a_2^2 - a^2}}{\sqrt{\dfrac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1}},\quad \frac{\overline{O\gamma}^2}{\overline{CC'}^2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a_3^2 - a^2}}{\sqrt{\dfrac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1}}.$$

Et, d'après l'équation (5),

$$(8)\qquad \frac{\overline{MM'}^2}{\overline{O\mu}^4} = 4\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{a_1^2 - a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{a_2^2 - a^2} + \frac{\cos^2\psi}{a_3^2 - a^2}\right).$$

(15) Pour avoir l'expression du rapport $\dfrac{\overline{MM'}}{\overline{O\mu}^2}$ en fonction seulement des éléments de la surface A et de la position du point S, il faut chercher les valeurs des trois demi-diamètres a_1, a_2, a_3 qui appartiennent aux trois surfaces, qu'on peut faire passer par le point S, de manière qu'elles aient leurs sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface A. On conçoit *a priori* que ces trois inconnues seront données par une même équation. Cette équation s'obtient immédiatement, car chacune

des trois surfaces ayant les mêmes foyers que la proposée A, son équation sera, en appelant a_1 son demi-axe majeur,

$$(9) \qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 - a^2 + b^2} + \frac{z^2}{a_1^2 - a^2 + c^2} = 1.$$

Cette équation, si l'on y regarde x, y, z comme les coordonnées particulières du point S, servira à déterminer les trois valeurs de a_1, qui sont les trois demi-axes majeurs cherchés; et si on l'écrit sous la forme

$$\frac{x^2}{(a_1^2 - a^2) + a^2} + \frac{y^2}{(a_1^2 - a^2) + b^2} + \frac{z^2}{(a_1^2 - a^2) + c^2} = 1,$$

et qu'on regarde $(a_1^2 - a^2)$ comme l'inconnue, ses trois racines seront précisément les trois coefficients qui entrent dans l'expression de $\frac{MM'}{O\mu^2}$.

Chassant les dénominateurs, l'équation prend la forme

$$\begin{aligned}&(a_1^2 - a^2)^3 + (a_1^2 - a^2)^2 \left[a^2 + b^2 + c^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\right] \\ &+ (a_1^2 - a^2)\left[a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - (b^2 + c^2)x^2 - (c^2 + a^2)y^2 - (a^2 + b^2)z^2\right] \\ &- a^2b^2c^2\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right] = 0.\end{aligned}$$

(16) Nous aurons à faire usage du produit des trois racines de cette équation : ce produit est égal au dernier terme pris avec un signe contraire, de sorte que l'on a

$$(a_1^2 - a^2)(a_2^2 - a^2)(a_3^2 - a^2) = a^2b^2c^2\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right].$$

x, y, z étant les coordonnées du point S, on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2};$$

car soient x', y', z' les coordonnées du point D, qui est sur la surface de l'ellipsoïde, on aura

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1.$$

Mais on a

$$\frac{\text{OS}}{\text{OD}} = \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'},$$

d'où

$$x' = x.\frac{\text{OD}}{\text{OS}},\quad y' = y.\frac{\text{OD}}{\text{OS}},\quad z' = z\frac{\text{OD}}{\text{OS}};$$

et ces valeurs, substituées dans l'équation ci-dessus, donnent

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{\overline{\text{SO}}^2}{\overline{\text{OD}}^2}.$$

D'après cela, il vient

$$(10)\qquad (a_1^2 - a^2)(a_2^2 - a^2)(a_3^2 - a^2) = a^2b^2c^2\left(\frac{\overline{\text{SO}}^2}{\overline{\text{OD}}^2} - 1\right).$$

Il nous suffit ici d'avoir démontré cette formule dont nous aurons à faire usage; mais elle est susceptible de quelques remarques qui ne sont pas sans intérêt, et nous y reviendrons dans une note à la suite de ce paragraphe.

(17) Théorème. *Étant donnés deux ellipsoïdes dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers, et dont les demi-axes majeurs sont* a *et* a'; *et étant pris arbitrairement dans l'espace un point* S;

Que l'on imagine les trois surfaces du second degré que l'on peut faire passer par ce point, de manière qu'elles aient les mêmes foyers que les deux ellipsoïdes; et soient a_1, a_2, a_3 *les demi-axes majeurs de ces trois surfaces;*

Que par le point S *on mène deux transversales, la première dans une direction arbitraire, et la seconde dans une direction telle, que les angles* φ, ψ *et* φ', ψ' *que ces deux droites feront, respectivement, avec les normales en* S *à la seconde et à la troisième surface, aient entre leurs cosinus les relations*

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{\sqrt{a_2^2 - a^2}}{\sqrt{a_2^2 - a'^2}},\qquad \frac{\cos\psi}{\cos\psi'} = \frac{\sqrt{a_3^2 - a^2}}{\sqrt{a_3^2 - a'^2}};$$

Soient E, F *et* E′, F′ *les points où ces deux transversales rencontrent, respectivement, les deux ellipsoïdes proposés, et soient* Oe, Oe′ *les demi-diamètres de ces ellipsoïdes, parallèles aux deux transversales; soient enfin* D, D′ *les points où la droite* SO *menée du point* S *au centre commun des deux ellipsoïdes rencontre leurs surfaces,*

Les deux rapports $\frac{\overline{Oe}^2}{\overline{EF}}$, $\frac{\overline{Oe'}^2}{\overline{E'F'}}$ *seront entre eux dans une raison constante, quelles que soient les deux transversales;*

Cette raison sera

$$\frac{\overline{Oe}^2}{\overline{EF}} : \frac{\overline{Oe'}^2}{\overline{E'F'}} = \frac{\sqrt{a_1^2 - a^2}}{\sqrt{\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1}} : \frac{\sqrt{a_1^2 - a'^2}}{\sqrt{\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD'}^2} - 1}}.$$

Démonstration. Soient θ, θ' les angles que les deux transversales font avec la première normale; le rapport $\frac{\overline{Oe}^2}{\overline{EF}}$ est donné par l'équation (8) : on a donc

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{Oe}^4} = 4\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{a_1^2 - a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{a_2^2 - a^2} + \frac{\cos^2\psi}{a_3^2 - a^2}\right).$$

Et en remplaçant $\cos^2\theta$ par $1 - \cos^2\varphi - \cos^2\psi$,

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{Oe}^4} = \frac{4\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1\right)}{a_1^2 - a^2} \cdot \left(1 + \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_2^2 - a^2}\cos^2\varphi + \frac{a_1^2 - a_3^2}{a_3^2 - a^2}\cos^2\psi\right).$$

On a pareillement

$$\frac{\overline{E'F'}^2}{\overline{Oe'}^4} = \frac{4\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD'}^2} - 1\right)}{a_1^2 - a'^2}\left(1 + \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_2^2 - a'^2}\cos^2\varphi' + \frac{a_1^2 - a_3^2}{a_3^2 - a'^2}\cos^2\psi'\right).$$

Remplaçons cos φ' et cos ψ' par leurs valeurs en fonction de cos φ et cos ψ, résultantes de l'hypothèse, on aura

$$\frac{\overline{E'F'}^2}{\overline{Oe'}^4} = \frac{4\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD'}^2} - 1\right)}{a_1^2 - a^2}\left(1 + \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_2^2 - a^2}\cos^2\varphi + \frac{a_1^2 - a_3^2}{a_3^2 - a^2}\cos^2\psi\right).$$

On a donc

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{Oe}^4} : \frac{\overline{E'F'}^2}{\overline{Oe'}^4} = \frac{\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1}{a_1^2 - a^2} : \frac{\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD'}^2} - 1}{a_1^2 - a'^2},$$

et par conséquent

$$\frac{\overline{Oe}^2}{\overline{EF}} : \frac{\overline{Oe'}^2}{\overline{E'F'}} = \frac{\sqrt{a_1^2 - a^2}}{\sqrt{\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1}} : \frac{\sqrt{a_1^2 - a'^2}}{\sqrt{\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD'}^2} - 1}}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

D'après l'équation (10), le second membre prend une autre expression, et l'on a

$$(11) \qquad \frac{\overline{Oe}^2}{\overline{EF}} : \frac{\overline{Oe'}^2}{\overline{E'F'}} = \frac{abc}{a'b'c'} : \frac{\sqrt{a_2^2 - a^2}\sqrt{a_3^2 - a^2}}{\sqrt{a_2^2 - a'^2}\sqrt{a_3^2 - a'^2}}.$$

C'est de cette formule que nous nous servirons.

On trouvera, à la fin de la note qui fait suite à ce paragraphe, une autre expression, extrêmement simple, du second membre de cette équation.

(18) Les surfaces du second degré, qui ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, jouissent d'un grand nombre d'autres propriétés, que j'ai fait connaître dans mon Aperçu historique (p. 384-399), sous le titre de *Propriétés nouvelles des surfaces du second degré, analogues à celles des foyers dans les coniques*[1]. Je me suis borné ici à présenter les seules propo-

[1] Cette collection de nombreux théorèmes avait été présentée à l'Académie des sciences, le

sitions indispensables pour traiter la question de l'attraction des ellipsoïdes, et j'ai cherché à les démontrer de la manière qui exigeait le moins de considérations étrangères à mon but. Dans un autre moment, je donnerai de ces mêmes propositions d'autres démonstrations, plus simples et plus naturelles, parce qu'elles se lieront à un ensemble de propriétés des surfaces du second degré, qui constituent une théorie spéciale très-étendue. Je veux parler de la théorie qui correspond, dans ces surfaces, à celle des *foyers* dans les sections coniques.

Dans une surface du second degré, en général, ce ne sont pas des *points*, ce sont des *courbes*, une ellipse et une hyperbole, ou deux paraboles, qui donnent lieu aux propriétés qui correspondent à celles des *foyers* dans les coniques. J'ai appelé ces deux courbes les *coniques focales*, ou *excentriques*, de la surface; et la théorie en question, dont on n'avait eu aucune idée jusqu'ici, est celle qui naît de la considération de ces courbes.

Deux surfaces du second degré, dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers, ont les mêmes *focales* ou *coniques excentriques;* et réciproquement, quand deux surfaces ont une même *focale*, elles ont nécessairement leurs sections principales décrites des mêmes foyers. Voilà pourquoi les propriétés de ces surfaces à mêmes foyers dépendent de la théorie primitive et particulière de leurs *coniques focales*.

Cette circonstance suffirait seule pour montrer que cette théo-

2 janvier 1835, dans un mémoire où, comme exemples des ressources que cette théorie nouvelle devait procurer en géométrie, je traitais diverses autres questions qui s'y rattachent naturellement, telle que la théorie des axes permanents de rotation et des moments d'inertie des corps.

Ce mémoire ne contenait d'abord qu'un cas particulier du théorème (art. 17) que je viens de démontrer ici dans toute sa généralité; et j'avais appelé alors l'attention des géomètres sur cette proposition restreinte, en signalant la généralisation qu'elle laissait à désirer, et qui serait la clef d'une démonstration synthétique du théorème de Maclaurin, et d'une solution directe du problème de l'attraction d'un ellipsoïde sur des points extérieurs. Depuis, je suis parvenu à cette généralisation que j'ai fait connaître dans une note, sur la fin de l'impression de mon Aperçu historique (p. 556) : et c'est ce résultat qui, en réalisant ma conjecture, a donné lieu au présent mémoire.

rie des *coniques focales* doit acquérir une grande importance dans l'étude des surfaces du second degré.

NOTE SUR LA FORMULE

$$(10)\qquad (a_1^2-a^2)(a_2^2-a^2)(a_3^2-a^2)=a^2b^2c^2\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2}-1\right).$$

(19) Cette relation entre les trois demi-diamètres a_1, a_2, a_3 mérite de fixer notre attention, parce qu'elle conduit à plusieurs autres relations, et qu'elle suffit à elle seule pour déterminer ces trois demi-diamètres et reproduire l'équation (9).

En effet, soient ε, ε_1 les demi-excentricités des sections principales de l'ellipsoïde A, contenues dans les plans des xy et des xz, de sorte qu'on ait

$$b^2=a^2-\varepsilon^2,\qquad c^2=a^2-\varepsilon_1^2.$$

Remplaçons dans le second nombre de l'équation les carrés b^2, c^2 par ces valeurs, et le rapport $\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2}$ par son expression $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, l'équation deviendra

$$\begin{aligned}(a_1^2-a^2)(a_2^2-a^2)(a_3^2-a^2)=&(a^2-\varepsilon^2)(a^2-\varepsilon_1^2)x^2+a^2(a^2-\varepsilon_1^2)y^2\\&+a^2(a^2-\varepsilon^2)z^2-a^2(a^2-\varepsilon^2)(a^2-\varepsilon_1^2),\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}a_1^2a_2^2a_3^2-(a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+a_3^2a_1^2)a^2+(a_1^2+a_2^2+a_3^2)a^4-a^6=&\varepsilon^2\varepsilon_1^2x^2\\-((\varepsilon^2+\varepsilon_1^2)x^2+\varepsilon_1^2y^2+\varepsilon^2z^2)a^2+(x^2+y^2+z^2+\varepsilon^2+\varepsilon_1^2)a^4-a^6.&\end{aligned}$$

Cette équation a lieu, quel que soit le demi-diamètre a; elle donne donc les trois relations suivantes :

$$(12)\qquad\begin{cases}a_1^2+a_2^2+a_3^2=x^2+y^2+z^2+\varepsilon^2+\varepsilon_1^2,\\ a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+a_3^2a_1^2=(\varepsilon^2+\varepsilon_1^2)x^2+\varepsilon_1^2y^2+\varepsilon^2z^2,\\ a_1a_2a_3=\varepsilon\varepsilon_1x.\end{cases}$$

Ces trois relations font voir que les demi-axes a_1, a_2, a_3 sont les racines de l'équation

$$a_1^6 - (x^2 + y^2 + z^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2)\,a_1^4 + \big((\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2)\,x^2 + \varepsilon_1^2 y^2 + \varepsilon^2 z^2\big)\,a_1^2 - \varepsilon^2\varepsilon_1^2 x^2 = 0,$$

ou

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 - \varepsilon^2} + \frac{z^2}{a_1^2 - \varepsilon_1^2} = 1;$$

ce qui est l'équation (9).

(20) Les trois équations (12) expriment trois propriétés générales des surfaces décrites des mêmes foyers.

La troisième conduit à une belle propriété des points *correspondants*, qui sont le fondement du théorème de M. Ivory sur l'attraction des ellipsoïdes. Elle donne

$$\frac{x}{a_1} = \frac{a_2 a_3}{\varepsilon\varepsilon_1}.$$

x est l'abscisse du point S, où l'ellipsoïde, qui a pour demi-diamètre a_1, rencontre la courbe d'intersection des deux hyperboloïdes auxquels appartiennent les demi-diamètres a_2, a_3. Un autre ellipsoïde, décrit des mêmes foyers, et ayant a'_1 pour demi-diamètre, rencontrera cette même courbe en un autre point S', dont l'abscisse x' sera donnée par l'équation semblable,

$$\frac{x'}{a'_1} = \frac{a_2 a_3}{\varepsilon\varepsilon_1}.$$

On a donc

$$\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{a'_1}.$$

Ainsi, les abscisses des deux points S, S' sont entre elles comme les demi-diamètres a_1, a'_1 des deux ellipsoïdes. De pareilles relations ont lieu entre les ordonnées y, y' et z, z' des deux points, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{y}{b_1} = \frac{y'}{b'_1}, \qquad \frac{z}{c_1} = \frac{z'}{c'_1}.$$

Ces relations font voir que les deux points S, S′, situés sur les ellipsoïdes, sont *correspondants*, dans l'acception de M. Ivory.

Ainsi, *deux points* correspondants *sur deux ellipsoïdes décrits des mêmes foyers sont toujours situés sur une même courbe d'intersection de deux hyperboloïdes à une et à deux nappes, décrits des mêmes foyers que les ellipsoïdes.*

En d'autres termes :

Si l'on conçoit une série d'ellipsoïdes décrits des mêmes foyers, et des points correspondants *pris sur leurs surfaces, tous ces points seront sur une ligne trajectoire orthogonale à ces ellipsoïdes.*

Il est évident que ce théorème s'applique aux points *correspondants* que l'on pourrait considérer sur des hyperboloïdes, à une ou à deux nappes, qui seraient décrits des mêmes foyers.

Cette propriété, qui constitue une définition nouvelle des points *correspondants*, permettra d'étendre, sous certains rapports, la considération de ces points à des surfaces différentes des surfaces du second degré.

(21) La première des trois relations (12) donne

$$x^2 + y^2 + z^2 = a_1^2 + (a_2^2 + a_3^2 - \varepsilon^2 - \varepsilon_1^2).$$

Pour le point S′, on aura de même

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a'^2_1 + (a_2^2 + a_3^2 - \varepsilon^2 - \varepsilon_1^2),$$

d'où

$$(x^2 + y^2 + z^2) - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = a_1^2 - a'^2_1.$$

C'est-à-dire que, *étant pris arbitrairement deux points* correspondants *sur deux ellipsoïdes décrits des mêmes foyers, la différence des carrés des distances de ces deux points au centre commun des deux ellipsoïdes est constante.*

(22) L'équation qui fait le sujet de cette note se met sous la forme

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{(a_2^2 - a^2)(a_3^2 - a^2)} = \frac{a_1^2 - a^2}{\overline{\frac{SO}{OD}}^2}.$$

On a donc, en vertu des formules (7),

$$(13) \qquad \frac{abc}{\sqrt{(a_2^2-a^2)(a_3^2-a^2)}} = 2 \cdot \frac{\overline{O\alpha}^2}{\overline{AA'}}.$$

C'est une nouvelle expression du rapport $\frac{\overline{O\alpha}^2}{\overline{AA'}}$; elle est indépendante de a_1 : donc la valeur de ce rapport reste la même, quelle que soit la position du point S sur la courbe d'intersection des deux hyperboloïdes (a_2), (a_3); or, la transversale SAA', sur laquelle est située la corde AA' de l'ellipsoïde (a), est la normale à l'ellipsoïde (a_1); conséquemment, elle est tangente à la courbe d'intersection des deux hyperboloïdes : l'équation exprime donc ce théorème :

Étant données trois surfaces du second degré, dont un ellipsoïde et deux hyperboloïdes, à une et à deux nappes, ayant, toutes trois, leurs sections principales décrites des mêmes foyers, si par différents points de la courbe d'intersection des deux hyperboloïdes, on mène les tangents à cette courbe, les segments interceptés sur ces droites par l'ellipsoïde, divisés respectivement par les carrés des demi-diamètres de l'ellipsoïde, qui sont parallèles à ces tangentes, donnent des quotients égaux.

Si l'on conçoit une série d'ellipsoïdes décrits des mêmes foyers que ces trois surfaces, ils rencontreront la courbe d'intersection des deux hyperboloïdes en des points qui seront *correspondants;* de sorte qu'on pourra donner au théorème un autre énoncé.

(23) Pour le point où la courbe d'intersection des deux hyperboloïdes rencontre l'ellipsoïde (a), le rapport $\frac{\overline{O\alpha}^2}{\overline{AA'}}$ devient $\frac{\overline{O\alpha}^2}{\overline{SA}}$, le point S se confondant alors avec le point A' : or, il est facile de reconnaître, et nous aurons occasion d'en donner une démonstration (art. 37), que ce rapport est égal à la moitié de la perpendiculaire p, abaissée du centre de l'ellipsoïde sur son plan tangent au point S. On a donc l'expression suivante de cette perpendiculaire

$$(14) \qquad p = \frac{abc}{\sqrt{a_2^2-a^2}\sqrt{a_3^2-a^2}}.$$

a_2, a_3 sont les demi-axes des deux hyperboloïdes qu'on peut faire passer par le point pris sur l'ellipsoïde (a), où l'on mène le plan tangent.

(24) Il résulte de là une expression nouvelle du rapport $\frac{\overline{O\alpha}^2}{\overline{AA'}}$ pris dans l'ellipsoïde (a) et relatif à une position quelconque du point S dans l'espace.

Que l'on conçoive l'ellipsoïde (a_1) passant par le point S, qu'on cherche sur l'ellipsoïde proposé (a) le point *correspondant* au point S de (a_1), qu'on mène en ce point *correspondant* le plan tangent à (a) : *la demi-distance de ce plan au centre de l'ellipsoïde sera la valeur du rapport* $\frac{\overline{O\alpha}^2}{\overline{AA'}}$.

(25) D'après cela, le rapport

$$\frac{\overline{Oe}^2}{\overline{EF}} : \frac{\overline{Oe'}^2}{\overline{E'F'}},$$

dans le théorème (17), prend une expression très-simple.

En effet, que l'on conçoive l'ellipsoïde (a_1) mené par le point S, et qu'on cherche sur les deux ellipsoïdes proposés les points *correspondants* au point S de (a_1), qu'en ces points on mène les plans tangents aux deux ellipsoïdes, et que p, p' soient leurs distances au centre commun des deux surfaces, on aura, quelles que soient les deux transversales issues du point S,

$$\frac{\overline{Oe}^2}{\overline{EF}} : \frac{\overline{Oe'}^2}{\overline{E'F'}} = \frac{p}{p'}.$$

§ 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE MACLAURIN.

(26) Nous démontrerons d'abord un théorème analogue à celui de Maclaurin, relatif à deux couches ellipsoïdales infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces semblables et concentriques, et dont les surfaces externes ont leurs sections

principales décrites des mêmes foyers. De là, nous conclurons immédiatement le théorème de Maclaurin, relatif à deux ellipsoïdes, et nous étendrons ce théorème à deux couches d'une épaisseur finie. Nous verrons que le théorème a encore lieu quand les deux couches, ou bien les deux ellipsoïdes, sont hétérogènes, suivant une certaine loi.

Cherchons l'expression de l'attraction exercée par l'élément de volume d'une couche infiniment mince, sur un point extérieur.

Je prends pour cet élément la portion de volume interceptée dans l'épaisseur de la couche, par la surface d'un petit cône ayant son sommet au point attiré S. Soit dv ce volume, ρ sa densité et r sa distance au point S; l'attraction qu'il exerce sur ce point aura pour expression

$$\rho\frac{dv}{r^2}.$$

Concevons menés par le point S trois axes rectangulaires SA, SB, SC, suivant lesquels nous décomposerons l'attraction; soient θ, φ et ψ les angles que le rayon r fait avec ces trois axes : les composantes de l'attraction, suivant ces axes, seront

$$\rho\frac{dv}{r^2}\cos\theta, \qquad \rho\frac{dv}{r^2}\cos\varphi, \qquad \rho\frac{dv}{r^2}\cos\psi.$$

On peut substituer aux deux angles φ et ψ une seule variable, qui est l'angle que le plan mené par le rayon r et l'axe SA fait avec le plan des deux axes SA, SB; soit ω cet angle, on aura

$$\cos\varphi = \sin\theta\cos\omega$$

et

$$\cos\psi = \sin\theta\sin\omega.$$

Les composantes de l'attraction exercée par la molécule dv, deviennent

$$\rho\frac{dv}{r^2}\cos\theta, \qquad \rho\frac{dv}{r^2}\sin\theta\cos\omega, \qquad \rho\frac{dv}{r^2}\sin\theta\sin\omega.$$

D'après la nature des deux variables θ, ω, qui déterminent la direction du rayon r, le volume dv sera celui d'un parallélipipède qui a l'une de ses arêtes, dirigée suivant le rayon r, égale à dr; une seconde, perpendiculaire au rayon r et située dans le plan des deux droites r, SA, égale à $rd\theta$, et la troisième, perpendiculaire à ce plan, égale à $r \sin\theta d\omega$. On a donc

$$dv = r^2 dr . \sin\theta . d\theta . d\omega .$$

L'attraction que ce volume infiniment petit exerce sur le point S a donc pour expression

$$\rho dr . \sin\theta . d\theta . d\omega :$$

et ses composantes, suivant les trois axes SA, SB, SC, sont

$$\rho dr . \sin\theta \cos\theta \, d\theta . d\omega ,$$
$$\rho dr . \sin^2\theta \cos\omega \, d\theta . d\omega ,$$
$$\rho dr . \sin^2\theta \sin\omega \, d\theta . d\omega .$$

(27) dr est la portion du rayon r comprise dans l'intérieur de la couche, c'est-à-dire entre ses deux surfaces externe et interne: il faudrait donc, en géométrie analytique, pour calculer l'expression de dr, chercher celle du rayon r, terminé à la surface extérieure de la couche, et en prendre la différentielle; mais ce calcul, sans être difficile, serait plus long que les considérations géométriques dont nous allons nous servir.

Soient E, F les deux points où le rayon r rencontre la surface externe de la couche, et Oe le demi-diamètre de cette surface parallèle au rayon r; soient D, D' les deux points où la droite, menée du point S au centre de la surface, la rencontre : on aura, comme on sait,

$$\frac{SE.SF}{\overline{Oe}^2} = \frac{SD.SD'}{\overline{OD}^2} ,$$

ou bien, en appelant G le point milieu de la corde EF.

$$\frac{\overline{SG}^2 - \overline{GE}^2}{\overline{Oe}^2} = \frac{\overline{SO}^2 - \overline{OD}^2}{\overline{OD}^2},$$

ou

$$\overline{SG}^2 - \overline{GE}^2 = \frac{\overline{Oe}^2}{\overline{OD}^2}\left(\overline{SO}^2 - \overline{OD}^2\right).$$

Maintenant, si l'on applique cette relation à la surface interne de la couche, comme cette surface est semblable à la première, concentrique et semblablement placée, le point G restera le même; le rapport $\frac{Oe}{OD}$ sera aussi constant; il n'y aura donc de variables dans cette équation que les deux lignes GE, OD : on a donc, en la différentiant,

$$GE.dGE = \frac{\overline{Oe}^2}{\overline{OD}^2}\,OD.dOD.$$

La différentielle de GE est précisément le segment compris sur le rayon r entre les deux parois de la couche : c'est donc dr: ainsi l'on a

$$dr = \frac{\overline{Oe}^2}{\overline{GE}}\,\frac{d.OD}{OD}.$$

OD est le demi-diamètre de la surface externe de la couche, dirigé suivant la droite OS; et (OD — dOD) celui de la surface interne; le rapport de ces deux demi-diamètres, savoir, $\frac{OD - dOD}{OD}$ est égal au rapport de deux autres demi-diamètres homologues quelconques, puisque les deux surfaces sont semblables. Soit a le demi-diamètre majeur de la première, $(a - da)$ sera celui de la seconde, et l'on aura

$$\frac{OD - dOD}{OD} = \frac{a - da}{a}, \text{ d'où } \frac{dOD}{OD} = \frac{da}{a}.$$

L'expression de dr devient

$$dr = \frac{\overline{Oe}^2}{GE}\frac{da}{a},$$

ou enfin

$$dr = 2\frac{\overline{Oe}^2}{EF}\frac{da}{a}.$$

L'attraction exercée par le volume dv devient donc

$$2\rho\frac{\overline{Oe}^2}{EF}\frac{da}{a}.\sin\theta d\theta.d\omega;$$

et ses composantes sont

$$2\rho\frac{\overline{Oe}^2}{EF}\frac{da}{a}\sin\theta\cos\theta d\theta.d\omega,$$

$$2\rho\frac{\overline{Oe}^2}{EF}\frac{da}{a}\sin^2\theta\cos\omega d\theta.d\omega,$$

$$2\rho.\frac{\overline{Oe}^2}{EF}.\frac{da}{a}\sin^2\theta\sin\omega d\theta d\omega.$$

(28) Concevons une seconde couche, comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables entre elles, et supposons que sa surface externe ait ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la première couche. Conservant les mêmes notations, mais *accentuées*, que pour la première couche, nous aurons, pour les composantes de l'attraction exercée par un élément de volume de cette seconde couche sur le même point S, estimées suivant les mêmes axes SA, SB, SC, les expressions

$$2\rho'.\frac{\overline{Oe'}^2}{E'F'}\frac{da'}{a'}\sin\theta'\cos\theta' d\theta'.d\omega',$$

$$2\rho'.\frac{\overline{Oe'}^2}{E'F'}\frac{da'}{a'}\sin^2\theta'\cos\omega' d\theta'.d\omega',$$

$$2\rho'.\frac{\overline{Oe'}^2}{E'F'}.\frac{da'}{a'}.\sin^2\theta'\sin\omega' d\theta'.d\omega'.$$

Les composantes, suivant l'axe SA, des attractions des éléments de volume des deux couches ont leur rapport égal à

$$\frac{\rho \left(\frac{\overline{Oe}}{EF}\right)^2 \cdot \frac{da}{a} \cdot \sin\theta\cos\theta . d\theta . d\omega ,}{\rho' \left(\frac{\overline{Oe'}}{E'F'}\right)^2 \cdot \frac{da'}{a'} \cdot \sin\theta'\cos\theta' d\theta . d\omega' .}$$

Les demi-axes majeurs des surfaces externes des deux couches sont a, a'. Ces deux surfaces ont, par hypothèse, leurs sections principales décrites des mêmes foyers. Que l'on conçoive les trois surfaces que l'on peut faire passer par le point S, de manière que leurs sections principales soient décrites des mêmes foyers que celles des deux surfaces proposées; soient a_1, a_2, a_3 les demi-axes majeurs de ces trois surfaces, et prenons leurs normales au point S pour les trois axes rectangulaires SA, SB, SC, dont jusqu'ici nous n'avions pas déterminé la direction.

Cela posé, supposons que le rayon qui va du point attiré à l'élément dv de la première couche ait une direction arbitraire, mais que le rayon qui va du même point à l'élément dv' de la seconde couche ait une autre direction, dépendante de celle du premier rayon, et déterminée par la condition que les cosinus des angles que cette direction fait avec les deux axes SB, SC aient des rapports constants avec les cosinus des angles que le premier rayon fait avec ces deux mêmes axes, et que ces rapports soient respectivement

$$\sqrt{\frac{a_2^2 - a'^2}{a_2^2 - a^2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a_3^2 - a'^2}{a_3^2 - a^2}} .$$

On aura

$$\sin\theta\cos\omega = \sin\theta'\cos\omega' . \frac{\sqrt{a_2^2 - a^2}}{\sqrt{a_2^2 - a'^2}} ,$$

$$\sin\theta\sin\omega = \sin\theta'\sin\omega' . \frac{\sqrt{a_3^2 - a^2}}{\sqrt{a_3^2 - a'^2}} .$$

Ces deux équations servent à déterminer ω' et θ' en fonction de ω et θ, et déterminent, par conséquent, la direction de chaque élément de la seconde couche, correspondant à chaque élément de la première.

Divisant ces deux équations l'une par l'autre, membre par membre, on a

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang}\omega' \cdot \frac{\sqrt{a_3^2 - a^2}}{\sqrt{a_3^2 - a'^2}} : \frac{\sqrt{a_2^2 - a^2}}{\sqrt{a_2^2 - a'^2}}.$$

Cette équation prouve que l'angle ω' ne dépend que de l'angle ω, et que, par conséquent, quand celui-ci est constant, ω' l'est aussi.

La première équation donne

$$\sin^2\theta = \frac{\cos^2\omega'}{\cos^2\omega}\sin^2\theta' \cdot \frac{a_2^2 - a^2}{a_2^2 - a'^2}.$$

Différentions par rapport à θ et θ', en regardant ω et ω' comme constants; nous aurons

$$\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \sin\theta'\cos\theta'\, d\theta' \cdot \frac{\cos^2\omega'}{\cos^2\omega}\frac{a_2^2 - a^2}{a_2^2 - a'^2};$$

donc

$$\frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\omega}{\sin\theta'\cos\theta'\, d\theta'\, d\omega'} = \left(\frac{d\omega}{\cos^2\omega} : \frac{d\omega'}{\cos^2\omega'}\right) \cdot \frac{a_2^2 - a^2}{a_2^2 - a'^2} = \frac{a_2^2 - a^2}{a_2^2 - a'^2}\frac{d.\operatorname{tang}\omega}{d.\operatorname{tang}\omega'}.$$

Or, l'équation ci-dessus, qui exprime le rapport de tang ω à tang ω', donne aussi le rapport des différentielles

$$\frac{d\operatorname{tang}\omega}{d\operatorname{tang}\omega'} = \frac{\sqrt{(a_3^2 - a^2)(a_2^2 - a'^2)}}{\sqrt{(a_3^2 - a'^2)(a_2^2 - a^2)}}.$$

On a donc enfin

$$\frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\omega}{\sin\theta'\cos\theta'\, d\theta'\, d\omega'} = \frac{\sqrt{(a_2^2 - a^2)(a_3^2 - a^2)}}{\sqrt{(a_3^2 - a'^2)(a_2^2 - a'^2)}}.$$

D'après cela, le rapport des attractions des éléments de volume des deux couches, estimées suivant l'axe SA, est

$$\frac{\rho \cdot \frac{\overline{Oe}^2}{EF} \frac{da}{a} \cdot \sqrt{(a_2^2 - a^2)(a_3^2 - a^2)}}{\rho' \frac{\overline{Oe'}^2}{E'F'} \frac{da'}{a'} \cdot \sqrt{(a_2^2 - a'^2)(a_3^2 - a'^2)}}.$$

Mais on a par le théorème de l'article 17, formule (11),

$$\frac{\frac{\overline{Oe}^2}{EF} \cdot \sqrt{(a_2^2 - a^2)(a_3^2 - a^2)}}{\frac{\overline{Oe'}^2}{E'F'} \cdot \sqrt{(a_2^2 - a'^2)(a_3^2 - a'^2)}} = \frac{abc}{a'b'c'}.$$

Le rapport des attractions se réduit donc à

$$\frac{\rho\, b\, c\, da}{\rho' b' c' da'}.$$

(29) Ce rapport est égal à celui des masses des deux couches.

En effet, soit V le volume compris sous la surface externe de la première couche, dV sera celui de cette couche, et $V - dV$ le volume compris sous sa surface interne. Les deux surfaces étant semblables, les volumes qu'elles comprennent sont entre eux comme les cubes de deux lignes homologues : on a donc

$$\frac{V - dV}{V} = \frac{(a - da)^3}{a^3};$$

d'où

$$\frac{dV}{V} = \frac{a^3 - (a - da)^3}{a^3};$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second et du troisième ordre,

$$\frac{dV}{V} = 3\frac{da}{a}.$$

Or,

$$V = \frac{4}{3}\pi abc;$$

donc

$$dV = 4\pi bc\,da.$$

Pareillement, le volume dV' de la seconde couche est $4\pi b'c'da'$; de sorte que le rapport des attractions est

$$\frac{\rho\,dV}{\rho'dV'}.$$

Si l'on suppose chaque couche homogène, la densité pouvant être différente d'une couche à l'autre, ρdV sera la masse de la première couche, et $\rho' dV'$ celle de la seconde. Le rapport des composantes, suivant l'axe SA, des attractions exercées par les éléments des deux couches sera donc constant et égal au rapport des masses de ces deux couches; donc le rapport des attractions totales exercées par les deux couches, suivant l'axe SA, sera égal, lui-même, au rapport des deux masses.

Les attractions des deux couches, estimées suivant chacun des deux autres axes SB, SC, seront entre elles dans le même rapport, parce que la démonstration s'applique indifféremment à l'un quelconque des trois axes SA, SB, SC. Il résulte de là, que les attractions effectives des deux couches sont entre elles dans le même rapport, et, en outre, qu'elles s'exercent dans la même direction.

(3o) Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Étant données deux couches ellipsoïdales, infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces d'ellipsoïdes semblables et concentriques;

Si les surfaces externes de ces deux couches ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, les attractions que ces couches exerceront sur un même point de l'espace situé au dehors de leurs surfaces externes auront la même direction, et seront entre elles dans le rapport de leurs masses;

Les deux couches étant supposées homogènes, mais de densité quelconque, l'une et l'autre.

(31) Remarquons que si les épaisseurs des deux couches, estimées suivant les axes majeurs de leurs surfaces externes, sont proportionnelles à ces axes, *les attractions exercées par les deux couches seront proportionnelles aux masses des deux ellipsoïdes compris sous leurs surfaces externes*, ces deux ellipsoïdes étant supposés homogènes et de même densité, respectivement, que les deux couches.

Car le rapport des attractions étant $\frac{\rho\, b\, c\, da}{\rho' b' c' da'}$, si l'on a $\frac{da}{da'} = \frac{a}{a'}$, ce rapport devient $\frac{\rho\, a\, b\, c}{\rho' a' b' c'}$; ce qui démontre la proposition.

(32) Maintenant passons à la démonstration du théorème de Maclaurin.

Soient deux ellipsoïdes dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers; soient A, B, C les trois demi-diamètres principaux du premier, et A′, B′, C′, ceux du second.

Regardons chacun des deux ellipsoïdes comme composé de couches infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces ellipsoïdales semblables à la surface de l'ellipsoïde auquel elle appartient, c'est-à-dire que les demi-diamètres principaux des surfaces des couches du premier ellipsoïde seront proportionnels à A, B, C, et que les demi-diamètres principaux des surfaces des couches du second ellipsoïde seront proportionnels à A′, B′, C′.

Ainsi, les trois demi-diamètres principaux de la surface externe d'une couche du premier ellipsoïde seront nA, nB, nC, et les trois demi-diamètres principaux de la surface externe d'une couche du second ellipsoïde seront n'A′, n'B′, n'C′.

Pour chaque couche du premier ellipsoïde, n aura une valeur différente, et pour chaque couche du second ellipsoïde, n' aura aussi une valeur différente. Si les variables n, n' ont la même valeur, nous dirons que les deux couches qu'elles déterminent se *correspondent*.

Cela posé, deux couches *correspondantes* jouissent de cette propriété importante, savoir, que *leurs surfaces externes, ou internes,*

sont deux surfaces d'ellipsoïdes ayant leurs sections principales décrites des mêmes foyers.

En effet, les demi-axes principaux des deux surfaces externes sont, pour la première, nA, nB, nC, et pour la seconde, nA′, nB′, nC′. Les carrés des demi-excentricités des sections principales de la première sont :

$$n^2(A^2 - B^2), \quad n^2(A^2 - C^2), \quad n^2(B^2 - C^2),$$

et les carrés des demi-excentricités des sections principales de la seconde sont :

$$n^2(A'^2 - B'^2), \quad n^2(A'^2 - C'^2), \quad n^2(B'^2 - C'^2).$$

Ces quantités sont égales aux trois premières respectivement, car les deux ellipsoïdes proposés ayant leurs sections principales décrites des mêmes foyers, on a

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= A'^2 - B'^2, \\ A^2 - C^2 &= A'^2 - C'^2, \\ B^2 - C^2 &= B'^2 - C'^2. \end{aligned}$$

Ainsi, les surfaces externes de deux couches *correspondantes* ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers. Cette démonstration s'applique aux surfaces internes; il suffit de mettre dans les expressions précédentes $(n - dn)$ à la place de n. De sorte que la proposition énoncée se trouve démontrée complétement.

Considérons un point extérieur aux deux ellipsoïdes; les attractions que deux couches correspondantes exerceront sur ce point auront, d'après le théorème (30), la même direction et seront entre elles dans le rapport

$$\frac{\rho n\mathrm{B}.n\mathrm{C}.d.n\mathrm{A}}{\rho' n\mathrm{B}'.n\mathrm{C}'.d.n\mathrm{A}'} = \frac{\rho \mathrm{BCA}.n^2 dn}{\rho' \mathrm{B}'\mathrm{C}'\mathrm{A}'.n^2 dn} = \frac{\rho \mathrm{ABC}}{\rho' \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'}.$$

Supposons que la densité soit la même dans toutes les couches de chaque ellipsoïde, ce rapport sera constant.

Les attractions des deux couches s'exerçant suivant la même direction, leurs composantes, suivant une même droite quelconque menée par le point attiré, seront aussi entre elles dans le rapport constant $\frac{\rho ABC}{\rho' A'B'C'}$. Donc les sommes des composantes des attractions de toutes les couches des deux ellipsoïdes, respectivement, seront entre elles dans ce même rapport : d'où l'on conclut que ces attractions elles-mêmes sont aussi entre elles dans ce rapport, et qu'elles s'exercent suivant la même direction ; or, ce rapport est celui des masses des deux ellipsoïdes. Donc

Les attractions que deux ellipsoïdes homogènes dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers exercent sur un même point, situé au dehors de leurs surfaces, ont la même direction et sont entre elles comme les masses des deux ellipsoïdes.

C'est le théorème connu sous le nom de Maclaurin, parce qu'on en doit la connaissance à ce géomètre, qui l'a démontré pour le cas particulier où le point attiré est sur le prolongement d'un des axes principaux des ellipsoïdes.

(33) Nous avons supposé que les deux ellipsoïdes étaient homogènes, leurs densités respectives pouvant être différentes; mais notre démonstration s'applique au cas où la densité, dans chaque ellipsoïde, est variable d'un point à un autre, en satisfaisant à la condition d'être constante dans toute l'étendue d'une couche infiniment mince, comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables, et de varier, d'une couche à une autre, proportionnellement à une puissance quelconque, entière ou fractionnaire, du demi-axe majeur de la surface externe de la couche.

En effet, le rapport des attractions exercées par deux couches *correspondantes* est

$$\frac{\rho ABC}{\rho' A'B'C'},$$

ρ ρ' étant les densités des deux couches. Les demi-axes majeurs

des surfaces externes de ces deux couches sont $n\mathrm{A}$, $n\mathrm{A}'$: leurs densités seront donc, d'après l'hypothèse,

$$\rho = (n\mathrm{A})^{\mu}, \qquad \rho' = (n\mathrm{A}')^{\mu};$$

μ étant un nombre constant quelconque.

On a donc

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\mathrm{A}^{\mu}}{\mathrm{A}'^{\mu}}.$$

Ainsi, le rapport des densités de deux couches correspondantes est constant. Le rapport des attractions exercées par ces deux couches, savoir $\frac{\rho \mathrm{ABC}}{\rho' \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'}$, est donc constant aussi.

Or cette expression est aussi le rapport des masses des deux couches, puisque leurs volumes sont, respectivement, $4\pi\mathrm{ABC}n^2dn$ et $4\pi\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'n^2dn$. Ce rapport étant constant, celui des masses totales des deux ellipsoïdes lui est égal. Nous pouvons donc dire que le rapport des attractions de deux couches *correspondantes* est égal au rapport des masses des deux ellipsoïdes. Et l'on conclut de là, comme ci-dessus, que les attractions totales des deux ellipsoïdes sont entre elles dans le même rapport, c'est-à-dire dans le rapport des masses des deux corps, et que ces attractions s'exercent dans la même direction.

Le demi-axe majeur d'une couche du premier ellipsoïde est $n\mathrm{A}$, et la densité de cette couche est $\rho = (n\mathrm{A})^{\mu}$. Soit m un point quelconque de cette couche, et D l'extrémité du demi-diamètre de l'ellipsoïde qui passe par le point m, on aura, puisque les surfaces des couches sont semblables à celle de l'ellipsoïde,

$$\frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{OD}} = \frac{n\mathrm{A}}{\mathrm{A}}; \text{ d'où } n\mathrm{A} = \mathrm{A}.\frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{OD}},$$

O étant le centre de l'ellipsoïde.

La densité de la couche est donc

$$\rho = A^{\mu}\left(\frac{Om}{OD}\right)^{\mu}.$$

On peut donc dire que la densité, en chaque point de chacun des ellipsoïdes, est proportionnelle à une puissance de la distance de ce point au centre de l'ellipsoïde divisée par le demi-diamètre qui passe par ce point.

On a donc ce théorème général :

Si deux ellipsoïdes ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, et si dans chacun d'eux la densité en chaque point est proportionnelle à une même puissance quelconque, entière ou fractionnaire, de la distance de ce point au centre de l'ellipsoïde, divisée par le demi-diamètre passant par ce point, les attractions que les deux ellipsoïdes exerceront sur un même point situé au dehors de leurs surfaces auront la même direction et seront entre elles comme les masses des deux corps.

(34) Notre démonstration a consisté à regarder les deux ellipsoïdes comme composés de couches élémentaires *correspondantes* dont le rapport des attractions, sur un même point extérieur, était constant et égal au rapport des masses des deux ellipsoïdes. Si, au lieu de considérer toutes les couches élémentaires du premier ellipsoïde, on n'en prend qu'une partie formant une couche d'une épaisseur finie, et qu'on prenne dans le second ellipsoïde les couches *correspondantes*, formant une seconde couche d'une épaisseur finie, on parvient, par le même raisonnement, à ce résultat, que les attractions des deux couches ont la même direction et sont entre elles comme leurs masses. Les surfaces internes des deux couches appartiendront à deux couches élémentaires *correspondantes* : elles seront donc décrites des mêmes foyers. On peut donc énoncer ce théorème très-général :

Si l'on a deux couches d'une épaisseur quelconque, comprises chacune entre deux surfaces d'ellipsoïdes concentriques, semblables et

semblablement placés, et si les surfaces externes des deux couches sont décrites des mêmes foyers, ainsi que leurs surfaces internes;

La densité, en chaque point de chacune des deux couches, étant proportionnelle à une même puissance de la distance de ce point au centre de la couche, divisée par le demi-diamètre de sa surface externe, sur lequel ce point est situé,

Les attractions que les deux couches exerceront sur un même point situé au dehors de leurs surfaces, auront la même direction et seront entre elles comme les masses des deux couches.

Si l'on conçoit que la surface interne de chaque couche se réduise à un point, de manière que la couche devienne un ellipsoïde, on aura le théorème de Maclaurin, étendu à deux ellipsoïdes hétérogènes.

§ 3. CALCUL DE L'ATTRACTION EXERCÉE PAR UNE COUCHE ELLIPSOÏDALE INFINIMENT MINCE, SUR UN POINT EXTÉRIEUR.

(35) L'attraction exercée par un élément de volume de la couche ellipsoïdale sur le point S a pour expression :

$$2\rho \frac{da}{a} \frac{\overline{Oe}^2}{EF} \sin\theta \, d\theta \, d\omega. \qquad (27)$$

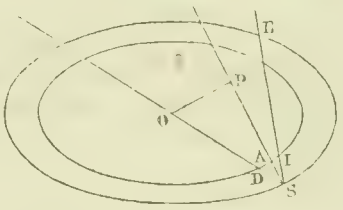
Le rayon mené du point S à l'élément attirant dv, situé en E, traverse la couche en un autre point F, où se trouve un second élément, dont l'attraction sur le point S a la même expression. Ainsi, les deux éléments de volume situés sur une même transversale menée par le point attiré exercent des attractions égales sur ce point.

Quand le point S est situé au dehors de la surface externe de la couche, ces deux attractions s'exercent dans le même sens et s'ajoutent; mais quand le point S est situé au dedans de la surface interne de la couche, les attractions des deux éléments s'exercent en sens opposés et se détruisent, ce qui prouve que *la couche n'exerce aucune action sur un point situé dans l'espace compris sous*

sa surface interne. Cette proposition est bien connue, et elle n'a pas à nous servir ici ; mais sa démonstration se présentait trop naturellement, pour que nous n'en fissions pas mention.

Revenons au cas où le point attiré est situé au dehors de la couche ellipsoïdale : supposons que l'axe SA soit la normale à l'ellipsoïde qui fait partie des trois surfaces qu'on peut mener par le point S, de manière que leurs sections principales soient décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche ; cette normale SA sera, comme il a été démontré (12), l'axe principal intérieur du cône qui a son sommet au point S et qui est circonscrit à cette surface externe.

Reprenons l'expression primitive $\rho\, dr.\, \sin\theta.\, d\theta.\, d\omega$ de l'attraction qu'un élément de volume de la couche exerce sur un point S, et supposons que ce point soit situé sur la surface externe de la couche. Que A soit le point où la normale en S rencontre la surface interne, et I le point où la transversale SE rencontre cette même surface : ce point I étant considéré comme le lieu de l'élément de volume que l'on considère, SI représentera *dr.* Or on a dans le triangle SAI rectangle en A,



$$SI = \frac{SA}{\cos ISA} = \frac{SA}{\cos\theta}.$$

L'expression de l'attraction de l'élément de volume situé en I devient donc

$$\rho SA.\ \frac{\sin\theta.\, d\theta.\, d\omega}{\cos\theta}.$$

Et comme l'attraction du second élément de volume, situé en E, a la même valeur, on a pour l'attraction totale exercée par les deux éléments situés sur la transversale,

$$2\rho SA.\ \frac{\sin\theta.\, d\theta.\, d\omega}{\cos\theta}.$$

Concevons dans le plan déterminé par l'axe SA et la transversale SE, une seconde transversale faisant avec l'axe SA un angle $\theta' = 400^\circ - \theta$: l'angle ω reste le même; de sorte que l'attraction due aux deux éléments de volume situés sur cette nouvelle transversale sera

$$2\rho SA \frac{\sin\theta' . d\theta' . d\omega}{\cos\theta'} = 2\rho SA \frac{\sin\theta . d\theta . d\omega}{\cos\theta};$$

c'est-à-dire qu'elle est égale à l'attraction due aux deux éléments de volume situés sur la première transversale. Donc la résultante de ces attractions est dirigée suivant l'axe SA, puisque les deux transversales sont également inclinées sur cet axe; donc l'attraction totale de la couche est dirigée elle-même suivant cet axe. Ainsi,

L'attraction qu'une couche infiniment mince, comprise entre deux ellipsoïdes semblables, concentriques et semblablement placés, exerce sur un point quelconque situé sur sa surface externe, est dirigée suivant la normale à cette surface en ce point.

De sorte qu'en quelque lieu de la surface externe qu'un petit corps soumis à la seule attraction de la couche soit placé, il y reste en équilibre.

(36) D'après cela, pour calculer la valeur de cette attraction, il suffit d'intégrer l'expression de sa composante suivant l'axe SA; l'intégrale sera évidemment l'attraction effective de la couche, puisque celle-ci s'exerce suivant cet axe. Cette composante a pour valeur

$$2\rho SA . \sin\theta \, d\theta \, d\omega.$$

Les limites des deux intégrales seront $\theta = 0$ et $\theta = 100^\circ$, $\omega = 0$ et $\omega = 400^\circ$. Or $\sin\theta \, d\theta \, d\omega$ est l'expression de l'élément superficiel de la sphère décrite du point S comme centre, avec un rayon égal à l'unité, et l'intégrale de cette quantité, prise dans les limites convenues, exprime la surface de la demi-sphère,

et conséquemment est égale à 2π; de sorte que la valeur de l'attraction de la couche sur le point S est

$$4\pi\rho.\,\mathrm{SA}.$$

SA est l'épaisseur de la couche, comptée sur sa normale en S. Nous dirons donc que:

Les attractions qu'une couche ellipsoïdale infiniment mince exerce sur les différents points de sa surface externe sont proportionnelles aux épaisseurs de la couche en ces points [1].

(37) L'attraction peut s'exprimer d'une autre manière. Concevons la perpendiculaire OP abaissée du centre de la couche sur la normale SA, et soit D le point où la droite SO rencontre la surface interne. Le petit triangle SAD est rectangle en A, et conséquemment est semblable au triangle SPO, rectangle en P. On a donc $\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SP}} = \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{SO}}$. Or les deux parois de la couche étant des surfaces semblables, concentriques et semblablement placées, le rapport $\frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{SD}}$ est constant, quelle que soit la position du point S sur la surface externe; ce rapport est donc égal à $\frac{a}{da}$, a étant, comme précédemment, le demi-axe majeur. De sorte qu'on a $\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SP}} = \frac{da}{a}$ [2]; et l'expression de l'attraction devient

$$4\pi\rho\,\frac{da}{a}.\,\mathrm{SP}.$$

[1] Cette proposition et la précédente, relative à la direction de l'attraction, ne sont pas spéciales à la couche ellipsoïdale; elles ont lieu pour toute couche infiniment mince qui jouit de la propriété de n'exercer aucune action sur les points situés dans l'intérieur de sa surface interne, comme sont les couches électriques formées à la surface des corps conducteurs; c'est-à-dire que: *Quand une couche infiniment mince, comprise entre deux surfaces fermées, n'exerce aucune action sur les points situés dans l'intérieur de sa paroi interne, l'attraction de la couche sur un point de sa surface externe est dirigée suivant la normale en ce point, et a pour expression* $4\pi\rho\varepsilon$, ε *étant l'épaisseur de la couche comptée sur la normale.* Ce théorème général est dû à M. Laplace. (Voir le premier mémoire de M. Poisson, sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. *Mém. de l'Instit. t. XII,* 1re part. année 1811.)

[2] On a donc $\mathrm{SP} = \mathrm{SA}.\,\frac{a}{da}$. Or d'après l'expression générale $dr = 2\,\frac{\overline{\mathrm{Oe}}^2}{\mathrm{EF}}.\,\frac{da}{a}$ (26), on a

Donc

L'attraction qu'une couche ellipsoïdale infiniment mince exerce sur un point de sa surface externe est proportionnelle au segment fait sur la normale en ce point, par le plan diamétral perpendiculaire à cette droite [1].

Il suit de là, que l'attraction a sa valeur *maximum* quand le point attiré est à l'extrémité de l'axe majeur de la surface externe de la couche, et que sa valeur *minimum* a lieu à l'extrémité de l'axe mineur.

(38) Maintenant il est facile de déterminer, en direction et en grandeur, l'attraction de la couche sur un point extérieur.

En effet, que l'on conçoive une seconde couche ellipsoïdale dont la surface externe passe par le point attiré S, et ait ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche proposée, les attractions des deux couches auront la même direction et seront entre elles comme les masses de ces couches (30). On conclut d'abord de là, d'après le théorème ci-dessus (35), que

L'attraction qu'une couche ellipsoïdale infiniment mince exerce sur un point extérieur est dirigée suivant la normale à l'ellipsoïde mené par ce point, de manière que ses sections principales aient les mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche.

Et comme nous avons démontré (12) que cette normale coïncide avec l'axe intérieur du cône circonscrit à la surface externe de la couche, nous pouvons dire que

L'attraction qu'une couche ellipsoïdale infiniment mince exerce sur

$SA = 2\,\frac{\overline{O\alpha}^2}{SA'}\,\frac{da}{a}$. Donc $SP = 2\,\frac{\overline{O\alpha}^2}{SA'}$; ce qui est l'expression de SP que nous avons admise précédemment, article 23, où SA a la même signification que SA′ ici.

[1] On démontre aisément que le produit des segments faits sur une normale, en un point d'une surface du second degré, par le plan diamétral qui lui est perpendiculaire et par un plan principal de la surface, est constant; de sorte que le premier segment est en raison inverse du second. On peut donc dire que : *l'attraction qu'une couche ellipsoïdale infiniment mince exerce sur un point situé sur sa surface externe est en raison inverse du segment formé sur la normale en ce point par un des trois plans principaux de cette surface.*

un point pris au dehors de sa surface externe est dirigée suivant l'axe du cône qui a son sommet en ce point et qui est circonscrit à la couche.

Ce théorème est celui auquel est parvenu M. Poisson, dans le cours de sa solution analytique du problème de l'attraction sur des points extérieurs [1].

(39) Pour calculer l'expression de l'attraction de la couche sur le point S, appelons a_1, b_1, c_1, les trois demi-axes principaux de l'ellipsoïde mené par ce point, comme nous avons dit, et qui recouvrira une seconde couche infiniment mince; soit ρ_1 la densité de cette couche : l'attraction qu'elle exercera sur le point S, situé à sa surface, aura pour expression

$$4\pi\rho_1 \frac{da_1}{a_1} \text{SP}. \qquad (37)$$

Les masses des deux couches sont $4\pi\rho\, bc\, da$ et $4\pi\rho_1\, b_1c_1\, da_1$;

[1] M. Poisson a remarqué que ce théorème pouvait servir dans la théorie de l'électricité, pour faire connaître la direction qu'un petit corps placé dans le voisinage d'un ellipsoïde électrisé suivrait, en s'approchant de la surface de l'ellipsoïde, par suite du pouvoir attractif de l'électricité. (*Mémoires de l'Acad. des sciences*, t. XIII, p. 501.)

Mais il sera utile surtout de savoir que cette direction coïncide avec la normale à l'ellipsoïde, qu'on peut mener par le point attiré, de manière que ses sections principales aient les mêmes foyers que celles de l'ellipsoïde proposé. Cette notion donne lieu à plusieurs conséquences immédiates qui ont leur application dans l'étude des phénomènes électriques. Ainsi, elle fait voir quelle est la surface sur laquelle plusieurs petits corps soumis à l'action attractive ou répulsive d'un ellipsoïde électrisé resteraient en équilibre, sans glisser dans aucun sens, en quelque point de la surface qu'on les plaçât. On voit aussi quelle serait la route qu'un petit corps placé à distance finie de la couche électrique, et soumis à son action attractive, suivrait pour venir se précipiter à sa surface, si l'on pouvait faire abstraction, dans le cours de son mouvement, des vitesses acquises, de la résistance du milieu, et de la réaction du petit corps tendant à changer l'état électrique de l'ellipsoïde. Cette route serait la courbe formée par une suite de petites lignes qui seraient les normales consécutives à une série d'ellipsoïdes décrits des mêmes foyers que le proposé. Cette courbe est la ligne à double courbure du quatrième ordre, provenant de l'intersection de deux hyperboloïdes, à une et à deux nappes, décrits des mêmes foyers que l'ellipsoïde proposé.

Si le corps attiré était placé dans le plan d'une des sections principales de l'ellipsoïde électrisé, il parcourrait une hyperbole ayant les mêmes foyers que cette section.

L'ellipsoïde pourrait être infiniment aplati et se réduire à une surface plane elliptique; les mêmes phénomènes électriques subsisteraient.

donc, puisque les attractions des deux couches sur le point S sont comme leurs masses, celle de la couche proposée sera

$$4\pi\rho_1 \frac{da_1}{a_1} \text{ SP. } \frac{4\pi\rho\, bc\, da}{4\pi\rho_1 b_1 c_1 da_1},$$

ou

$$4\pi\rho \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \text{ SP. } \frac{da}{a}.$$

Telle est l'expression de l'attraction qu'une couche infiniment mince, comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables, concentriques et semblablement placées, exerce sur un point situé au dehors de sa surface externe.

a, b, c, sont les demi-axes principaux de cette surface externe, et a_1, b_1, c_1, ceux d'une autre surface ellipsoïdale menée par le point attiré, de manière que ses sections principales aient les mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche; SP est le segment fait sur la normale à cette nouvelle surface par le plan diamétral qui lui est perpendiculaire.

(40) Nous aurions pu déterminer directement, en grandeur et en direction, l'attraction de la couche sur un point extérieur, sans calculer préalablement l'attraction sur un point situé à la surface externe, et sans nous servir du théorème sur les attractions de deux couches dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers; mais la marche que nous avons suivie nous a offert l'avantage de ne faire usage que de simples considérations de géométrie, sans aucun calcul, et c'est là le but que nous nous sommes proposé. Nous donnerons dans un dernier paragraphe, à la fin de ce mémoire, l'autre manière de résoudre la question.

La valeur trouvée pour l'attraction de la couche ellipsoïdale sur un point extérieur peut s'exprimer sous diverses autres formes, et donner lieu à plusieurs théorèmes concernant cette attraction. Nous n'entrerons pas ici dans ces détails, pour lesquels nous renvoyons à notre mémoire sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale

infiniment mince qui fait partie du 25e cahier du Journal de l'école polytechnique.

Nous avons fait voir, dans cet autre mémoire, que nos théorèmes relatifs à l'intensité et à la direction de l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince, qui peuvent être utiles dans la théorie de l'*électricité*, ont aussi une application immédiate à la théorie de la *chaleur* : ils conduisent sans difficulté à l'expression de la température en chaque point d'une enveloppe solide homogène comprise entre deux surfaces ellipsoïdales dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers, ces surfaces étant soumises à des sources constantes de chaleur et de froid : ce qui offre une démonstration synthétique de divers résultats obtenus par M. Lamé dans son mémoire sur les surfaces isothermes.

§ 4. CALCUL DE L'ATTRACTION EXERCÉE PAR UN ELLIPSOÏDE SUR UN POINT EXTÉRIEUR.

(41) Nous regarderons l'ellipsoïde comme composé de couches infiniment minces comprises chacune entre deux surfaces semblables, ainsi que nous avons fait pour démontrer le théorème de Maclaurin, et nous prendrons les composantes, parallèles à trois axes fixes, de l'attraction exercée sur le point S par l'une de ces couches; les intégrales des expressions de ces composantes seront les composantes de l'attraction totale de l'ellipsoïde.

Prenons pour les trois axes fixes les axes principaux de l'ellipsoïde proposé, lesquels sont aussi les axes principaux de chacune des couches élémentaires. Soient x, y, z, les coordonnées du point attiré S, rapportées à ces trois axes, l'attraction exercée sur ce point par une couche dont a, b, c, sont les demi-diamètres de sa surface externe, a pour expression

$$4\pi\rho \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \mathrm{SP} \frac{da}{a}.$$

Cette attraction est dirigée suivant la normale en S à l'ellipsoïde auxiliaire mené par ce point et dont a_1, b_1, c_1, sont les demi-diamètres. Pour avoir les composantes parallèles aux trois axes coordonnés, il suffit donc de connaître les angles que cette normale fait avec ces axes. Or, le plan tangent à l'ellipsoïde, au point S, rencontre l'axe des x à une distance du centre qui est égale à $\frac{a_1^2}{x}$ [1]. La perpendiculaire abaissée du centre sur ce plan tangent est égale à la ligne SP : on a donc, en appelant e l'angle que cette perpendiculaire fait avec l'axe des x,

$$\mathrm{SP} = \frac{a_1^2}{x} \cos e; \text{ d'où } \cos e = \frac{\mathrm{SP}.x}{a_1^2}.$$

Par conséquent, la composante de l'attraction de la couche sur le point S, parallèle à l'axe des x, est

$$4\pi\rho \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \frac{\overline{\mathrm{SP}}^2}{a_1^2} x \frac{da}{a},$$

et la somme des composantes des attractions de toutes les couches, qui forme la composante de l'attraction totale de l'ellipsoïde, est

$$4\pi\rho x \int \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \frac{\overline{\mathrm{SP}}^2}{a_1^2} \frac{da}{a},$$

l'intégrale devant être prise depuis $a = o$ jusqu'à $a =$ le demi-axe majeur de l'ellipsoïde proposé.

Or, il faut observer qu'il n'y a que a de variable indépendante dans cette expression, car les autres quantités b, c, a_1, b_1, c_1 et SP dépendent de la valeur de a. Il faut donc exprimer toutes ces variables en fonction d'une seule.

Soient A, B, C, les trois demi-axes principaux de l'ellipsoïde

[1] Cela résulte, en géométrie pure, de la théorie des *pôles* et *plans polaires*, et en géométrie analytique, de l'équation du plan tangent en un point d'une surface du second degré.

proposé; la surface externe de la couche que l'on considère étant semblable à cet ellipsoïde, on a

$$b = a\frac{B}{A},\quad c = a\frac{C}{A}.$$

a_1, b_1, c_1, sont les demi-axes principaux d'un ellipsoïde dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche; de sorte qu'on a

$$b_1^2 = a_1^2 + b^2 - a^2, \qquad c_1^2 = a_1^2 + c^2 - a^2,$$

ou

$$b_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right),\ c_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right).$$

Cet ellipsoïde passe par le point S, dont les coordonnées sont x, y, z: ainsi l'on a

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1,$$

ou

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right)} = 1.$$

Cette équation établit la relation entre a_1 et a.

Enfin, la ligne SP est égale à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à ce nouvel ellipsoïde mené par le point S : on a donc

$$\overline{SP}^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{a_1^4} + \frac{y^2}{b_1^4} + \frac{z^2}{c_1^4}},$$

[1] Cette expression résulte, soit de l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde, soit des valeurs que nous avons trouvées pour les cosinus des angles que la normale à la surface fait avec les axes coordonnés, car on a $\cos e = \frac{SP.x}{a_1^2}$, et pareillement pour les deux autres angles

ou

$$\overline{\mathrm{SP}}^2 = \frac{1}{\dfrac{x^2}{a_1^4} + \dfrac{y^2}{\left[a_1^2 + a^2\left(\dfrac{B^2}{A^2} - 1\right)\right]^2} + \dfrac{z^2}{\left[a_1^2 + a^2\left(\dfrac{C^2}{A^2} - 1\right)\right]^2}}.$$

Ainsi, nous connaissons les six relations qui ont lieu entre les sept variables a, b, c, a_1, b_1, c_1 et SP.

Pour exprimer toutes ces variables en fonction d'une seule, nous ferons

$$\frac{a}{a_1} = u.$$

La relation ci-dessus entre a et a_1 devient, par l'élimination de $a_1 = \frac{a}{u}$,

$$u^2x^2 + \frac{y^2}{\dfrac{1}{u^2} + \left(\dfrac{B^2}{A^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{\dfrac{1}{u^2} + \left(\dfrac{C^2}{A^2} - 1\right)} = a^2.$$

Différentiant par rapport à u et à a, on a

$$\left[\frac{u^4}{a^4}x^2 + \frac{y^2}{\left[\dfrac{a^2}{u^2} + a^2\left(\dfrac{B^2}{A^2} - 1\right)\right]^2} + \frac{z^2}{\left[\dfrac{a^2}{u^2} + a^2\left(\dfrac{C^2}{A^2} - 1\right)\right]^2}\right]\frac{a^4}{u^3}\,du = da.$$

Or, la quantité entre crochets est l'expression de $\frac{1}{\overline{\mathrm{SP}}^2}$: on a donc

$$\frac{a^4}{u^3}\frac{1}{\overline{\mathrm{SP}}^2}\,du = da,$$

ou

$$\frac{a^2}{u^2}\frac{1}{\overline{\mathrm{SP}}^2}\frac{du}{u} = \frac{da}{a},$$

$\cos f = \dfrac{\mathrm{SP}.y}{b_1^2}$, $\cos g = \dfrac{\mathrm{SP}.z}{c_1^2}$; et de ces expressions, à cause de $\cos^2 e + \cos^2 f + \cos^2 g = 1$, on conclut

$$\overline{\mathrm{SP}}^2 = \frac{1}{\dfrac{x^2}{a_1^4} + \dfrac{y^2}{b_1^4} + \dfrac{z^2}{c_1^4}}.$$

ou

$$\frac{a_1^2}{\overline{SP}^2}\frac{du}{u} = \frac{da}{a},$$

et

$$\frac{\overline{SP}^2}{a_1^2}\frac{da}{a} = \frac{du}{u}.$$

D'après cela, l'expression de la composante de l'attraction de la couche élémentaire devient

$$4\pi\rho x\,\frac{abc}{a_1b_1c_1}\,\frac{du}{u} = 4\pi\rho x\,\frac{bc}{b_1c_1}\,du.$$

Mettant à la place de b, c, b_1, c_1, leurs valeurs en fonction de u, on a

$$\frac{bc}{b_1c_1} = \frac{BCu^2}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\cdot\sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}}.$$

La composante de l'attraction de la couche est donc

$$4\pi\rho x BC\,\frac{u^2du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\,\sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}}.$$

Et conséquemment, la composante de l'attraction totale de l'ellipsoïde est

$$4\pi\rho x BC\int\frac{u^2du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\,\sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}}.$$

Il fallait intégrer depuis $a=0$ jusqu'à $a=A$; on a $\frac{a}{a_1}=u$; il faudra donc intégrer depuis $u=0$ jusqu'à $u=\frac{A}{A_1}$, A_1 étant le demi-axe majeur de l'ellipsoïde décrit des mêmes foyers que l'ellipsoïde attirant et mené par le point attiré. Ce demi-axe A_1 sera déterminé par l'équation

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_1^2+(B^2-A^2)}+\frac{z^2}{A_1^2+(C^2-A^2)}=1.$$

Ainsi, nous poserons pour l'expression de la composante de l'attraction de l'ellipsoïde, parallèle à l'axe des x,

$$4\pi\rho x\mathrm{BC}\int_0^{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_1}}\frac{u^2\,du}{\sqrt{\mathrm{A}^2+u^2(\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2)}\,\sqrt{\mathrm{A}^2+u^2(\mathrm{C}^2-\mathrm{A}^2)}}.$$

La valeur de A_1, d'où dépend la seconde limite de l'intégrale, étant déterminée par l'équation ci-dessus, sera la plus grande racine de cette équation; car les deux autres racines seront les demi-axes majeurs des deux hyperboloïdes à une et à deux nappes qui passent par le point attiré, et qui sont décrits des mêmes foyers que l'ellipsoïde mené par ce point, et l'on sait, par des considérations de géométrie, que ces deux demi-axes sont plus petits que celui de l'ellipsoïde.

(42) On aura des formules semblables à la précédente pour les composantes de l'attraction parallèles aux axes des y et des z, car le cosinus de l'angle que la normale à l'ellipsoïde mené par le point S fait avec l'axe des y est égal à $\frac{\mathrm{SP}y}{b_1^2}$; conséquemment, la composante de l'attraction d'une couche parallèle à l'axe des y est

$$4\pi\rho y\,\frac{abc}{a_1b_1c_1}\,\frac{\overline{\mathrm{SP}}^2}{b_1^2}\,\frac{da}{a}.$$

Or, les deux surfaces, externe et interne, de la couche étant semblables et semblablement placées, on a

$$\frac{da}{a}=\frac{db}{b};$$

la composante de l'attraction devient donc

$$4\pi\rho y\,\frac{abc}{a_1b_1c_1}\,\frac{\overline{\mathrm{SP}}^2}{b_1^2}\,\frac{db}{b}.$$

Ainsi, elle est absolument de même forme que la composante parallèle à l'axe des x. Les composantes de l'attraction to-

tale de l'ellipsoïde seront donc aussi de même forme, et ne différeront dans leurs expressions que par les lettres qui se rapportent, respectivement, aux trois axes des x, des y et des z. Soient donc B_1 et C_1 les demi-axes de l'ellipsoïde mené par le point attiré, qui sont dirigés suivant les axes des y et des z, on aura pour les trois composantes de l'attraction de l'ellipsoïde sur le point S, dont les coordonnées sont x, y, z,

$$4\pi\rho BCx \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\ \sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}},$$

$$4\pi\rho CAy \int_0^{\frac{B}{B_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{B^2+u^2(C^2-B^2)}\ \sqrt{B^2+u^2(A^2-B^2)}},$$

$$4\pi\rho ABz \int_0^{\frac{C}{C_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{C^2+u^2(A^2-C^2)}\ \sqrt{C^2+u^2(B^2-C^2)}}.$$

EXPRESSION DES TROIS COEFFICIENTS A_1, B_1, C_1, EN FONCTION D'UNE SEULE INCONNUE.

(43) Les limites des trois intégrales sont différentes. Ces limites ne sont pas données *a priori;* elles dépendent d'équations du troisième degré. Nous avons donné ci-dessus l'équation qui déterminera la quantité A_1, d'où dépend la première limite. Les équations qui donneront les deux quantités B_1, C_1, d'où dépendent les deux autres limites, sont semblablement

$$\frac{x^2}{B_1^2+(A^2-B^2)} + \frac{y^2}{B_1^2} + \frac{z^2}{B_1^2+(C^2-B^2)} = 1,$$

$$\frac{x^2}{C_1^2+(A^2-C^2)} + \frac{y^2}{C_1^2+(B^2-C^2)} + \frac{z^2}{C_1^2} = 1.$$

Mais il suffira de résoudre l'une des trois équations, parce que quand on connaîtra A_1, par exemple, les valeurs de B_1 et C_1 s'ensuivront, puisque, l'ellipsoïde dont ces quantités sont les demi-

axes principaux ayant ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de l'ellipsoïde proposé, on a

$$B_1^2 = A_1^2 + B^2 - A^2,$$
$$C_1^2 = A_1^2 + C^2 - A^2.$$

On peut même exprimer les trois quantités A_1, B_1, C_1 au moyen d'une seule inconnue, et remplacer les trois équations ci-dessus par une équation unique. Il suffit de faire

$$A_1^2 - A^2 + \omega,$$
$$B_1^2 = B^2 + \omega,$$
$$C_1^2 = C^2 + \omega;$$

et l'équation qui détermine ω est

$$\frac{x^2}{A^2+\omega} + \frac{y^2}{B^2+\omega} + \frac{z^2}{C^2+\omega} = 1.$$

Celle des trois racines de cette équation qu'on devra prendre pour la valeur de ω sera la plus grande, d'après ce que nous avons dit au sujet de l'équation qui déterminait A_1; mais nous pouvons ajouter ici que cette racine sera seule positive; car les trois valeurs de ω, mises dans $(A^2+\omega)$, donneront les carrés des demi-axes majeurs des trois surfaces, ellipsoïde et hyperboloïdes, qui passent par le point S, et ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers que celles de l'ellipsoïde proposé; et l'on sait, par des considérations de géométrie, que les demi-axes majeurs des deux hyperboloïdes sont renfermés dans des limites resserrées, et que leurs valeurs *maximum*, qu'ils n'atteignent que quand les hyperboloïdes se réduisent à des surfaces planes, sont $\sqrt{A^2-B^2}$ pour l'hyperboloïde à deux nappes, et $\sqrt{A^2-C^2}$ pour l'hyperboloïde à une nappe[1]. Ainsi, dans les valeurs de $\sqrt{A^2+\omega}$, correspondantes aux deux hyperboloïdes,

[1] Voir *Développements de Géométrie*, par M. Ch. Dupin, IV^e^ et V^e^ Mémoires.

ω sera négatif. Quant à la troisième valeur de ω, elle sera positive, parce que l'ellipsoïde auquel elle correspond enveloppant l'ellipsoïde proposé, son demi-axe majeur $\sqrt{A^2+\omega}$ est plus grand que A.

Des considérations analytiques, fondées sur la composition des coefficients de l'équation qui donne ω après qu'on a chassé les dénominateurs, font voir aussi qu'une seule de ses racines est positive. C'est ainsi qu'a fait M. Poisson, articles 17 et 24 de son mémoire.

CHANGEMENT DE VARIABLE; FORMULES EN USAGE.

(44) Nos expressions des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde (42) diffèrent des formules ordinaires; mais on les ramène à celles-ci par un simple changement de variables. En effet, qu'on fasse dans les trois formules, respectivement,

$$u = \frac{A}{A_1} v,$$

$$u = \frac{B}{B_1} v,$$

$$u = \frac{C}{C_1} v,$$

elles deviennent

$$4\pi\rho \frac{ABC}{A_1} x \int_0^1 \frac{v^2 dv}{\sqrt{A_1^2+v^2(B^2-A^2)}\ \sqrt{A_1^2+v^2(C^2-A^2)}},$$

$$4\pi\rho \frac{ABC}{B_1} y \int_0^1 \frac{v^2 dv}{\sqrt{B_1^2+v^2(C^2-B^2)}\ \sqrt{B_1^2+v^2(A^2-B^2)}},$$

$$4\pi\rho \frac{ABC}{C_1} z \int_0^1 \frac{v^2 dv}{\sqrt{C_1^2+v^2(A^2-C^2)}\ \sqrt{C_1^2+v^2(B^2-C^2)}}.$$

ATTRACTION D'UNE COUCHE D'UNE ÉPAISSEUR FINIE.

(45) Les formules auxquelles nous sommes parvenu directement, ont sur ces dernières l'avantage de s'appliquer à l'attraction d'une couche d'une épaisseur finie, comprise entre deux surfaces ellipsoïdales concentriques, semblables et semblablement placées.

En effet, les composantes de l'attraction exercée par la couche sur un point extérieur seront les différences des composantes des attractions exercées sur ce point par les deux ellipsoïdes compris sous les surfaces externe et interne de la couche. Soient A, B, C les demi-axes du premier de ces deux ellipsoïdes, et a, b, c, ceux du second; et soient A_1, a_1 les demi-axes majeurs de deux ellipsoïdes menés par le point attiré, et ayant, respectivement, les mêmes foyers que les deux ellipsoïdes proposés; les composantes, parallèles à l'axe des x, des attractions exercées par ces deux-ci auront pour expressions

$$4\pi\rho BCx \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\ \sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}},$$

$$4\pi\rho bcx \int_0^{\frac{a}{a_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2+u^2(b^2-a^2)}\ \sqrt{a^2+u^2(c^2-a^2)}}.$$

Les deux ellipsoïdes étant semblables, on a $\frac{b}{a} = \frac{B}{A}$, $\frac{c}{a} = \frac{C}{A}$; et l'expression de l'attraction du second ellipsoïde devient

$$4\pi\rho BCx \int_0^{\frac{a}{a_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\ \sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}}.$$

Par conséquent, la différence des composantes des attractions des deux ellipsoïdes est

$$4\pi\rho\,\mathrm{BC}\,x\int_{\frac{a}{a_1}}^{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_1}}\frac{u^2du}{\sqrt{\mathrm{A}^2+u^2(\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2)}\ \sqrt{\mathrm{A}^2+u^2(\mathrm{C}^2-\mathrm{A}^2)}}.$$

Telle est la valeur de la composante, parallèle à l'axe des x, de l'attraction exercée par la couche comprise entre les surfaces des deux ellipsoïdes. On lui donnera une autre expression, dans laquelle l'une des limites sera l'unité, en remplaçant, comme ci-dessus, u par $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_1}v$. Elle devient

$$4\pi\rho\,\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{A}_1}\,x\int_{\frac{a}{a_1}\cdot\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_1}}^{1}\frac{v^2dv}{\sqrt{\mathrm{A}_1^2+v^2(\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2)}\ \sqrt{\mathrm{A}_1^2+v^2(\mathrm{C}^2-\mathrm{A}^2)}}.$$

CAS DE L'ELLIPSOÏDE HÉTÉROGÈNE.

(46) Nous avons considéré jusqu'ici un ellipsoïde homogène. Nous allons chercher maintenant l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène, dans lequel la densité, en chaque point, est une fonction quelconque de la distance du point au centre de l'ellipsoïde, divisée par le demi-diamètre sur lequel ce point est situé, ce qui revient à dire que la densité est constante dans toute l'étendue de chacune des couches élémentaires qui composent le volume de l'ellipsoïde, et variable d'une couche à une autre suivant une fonction du demi-axe majeur de chaque couche; car soit m un point pris dans l'intérieur de l'ellipsoïde sur un demi-diamètre OM, la densité en ce point sera, par hypothèse, une fonction du rapport $\frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{OM}}$, de sorte qu'on aura

$$\rho=\mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{OM}}\right).$$

Soit a le demi-axe majeur de la surface externe de la couche élémentaire à laquelle appartient le point m; cette surface étant semblable à celle de l'ellipsoïde proposé, dont le demi-axe majeur est A, on aura $\frac{Om}{OM} = \frac{a}{A}$; d'où $\rho = F\left(\frac{a}{A}\right)$. Et comme A est constant, on peut dire que la densité du point m est une fonction du demi-axe majeur a de la couche.

Nous avons trouvé (41), pour la composante de l'attraction exercée par la couche, l'expression

$$4\pi\rho BCx \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}}.$$

L'équation d'où dépend la valeur particulière de la variable u, correspondante à cette couche, s'écrit ainsi :

$$u^2\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2+u^2(B^2-A^2)}+\frac{z^2}{A^2+u^2(C^2-A^2)}\right)=\frac{a^2}{A^2}.$$

Puisqu'on suppose que la densité ρ, en chaque point de la couche, est une fonction F du rapport $\frac{a}{A}$, cette densité s'exprimera en fonction de la variable u. On aura

$$\rho = F\left[u\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2+u^2(B^2-A^2)}+\frac{z^2}{A^2+u^2(C^2-A^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

et la composante de l'attraction de l'ellipsoïde, parallèle à l'axe des x, sera

$$4\pi BCx\int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{F\left[u\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2+u^2(B^2-A^2)}+\frac{z^2}{A^2+u^2(C^2-A^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]u^2 du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}}.$$

(47) Si l'on suppose que la densité soit en raison inverse du

rapport $\frac{Om}{OM}$ ou $\frac{a}{A}$, hypothèse que quelques auteurs ont faite au sujet de la masse de la terre, on aura

$$F\frac{a}{A} = 1 : \frac{a}{A} = \frac{1}{u\left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 + u^2(B^2 - A^2)} + \frac{z^2}{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

et l'expression de la composante de l'attraction de l'ellipsoïde deviendra

$$4\pi ABCx \int_{\cdot}^{\frac{A}{A_1}} \frac{u\,du}{\sqrt{x^2(A^2 + u^2(B^2 - A^2))(A^2 + u^2(C^2 - A^2)) + y^2A^2(A^2 + u^2(C^2 - A^2)) + z^2A^2(A^2 + u^2(B^2 - A^2)}}.$$

Faisons $u^2 = t$, cette intégrale prend la forme

$$\int \frac{dt}{\sqrt{\alpha + \beta t + \gamma t^2}},$$

et s'obtient sous forme finie.

Diverses autres suppositions sur la forme de la fonction F pourront rendre les formules de l'attraction d'un ellipsoïde indépendantes des fonctions elliptiques et intégrables en termes finis.

CAS D'UNE COUCHE HÉTÉROGÈNE.

(48) Pour une couche d'une épaisseur quelconque, où la densité est variable et fonction du rapport $\frac{Om}{OM}$, OM étant le demi-diamètre de la surface extérieure de la couche, on trouve, comme pour l'ellipsoïde, que la composante de l'attraction exercée par la couche a pour expression

$$4\pi BCx \int_{\frac{a}{a_1}}^{\frac{A}{A_1}} \frac{F\left[u\left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 + u^2(B^2 - A^2)} + \frac{z^2}{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right] u^2\,du}{\sqrt{A^2 + u^2(B^2 - A^2)}\,\sqrt{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}}.$$

On peut donner à cette expression une forme semblable à celle sous laquelle on présente ordinairement l'attraction d'un ellipsoïde homogène, où le coefficient A_1 entre dans l'expression à intégrer. Pour cela on fera

$$u = \frac{A}{A_1} v.$$

Les limites de l'intégrale, $\frac{a}{a_1}$ et $\frac{A}{A_1}$, deviennent $\frac{a}{a_1} \cdot \frac{A_1}{A}$ et 1, et la composante de l'attraction de la couche est

$$4\pi \frac{ABC}{A_1} x \int_{\frac{a}{a_1}\cdot\frac{A_1}{A}}^{1} \frac{F\left[v\left(\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_1^2 + v^2(B^2 - A^2)} + \frac{z^2}{A_1^2 + v^2(C^2 - A^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right] v^2 dv}{\sqrt{A_1^2 + v^2(B^2 - A^2)}\ \sqrt{A_1^2 + v^2(C^2 - A^2)}}.$$

AUTRES FORMULES.

(49) M. Poisson a obtenu, dans son mémoire sur l'*attraction d'un ellipsoïde homogène*, des formules différentes des nôtres, quoique les coefficients A_1, B_1, C_1 n'y entrent, aussi, que dans les limites des intégrales, et non dans les intégrales elles-mêmes, comme cela a lieu dans les formules anciennes. On passera des unes aux autres par un changement de variable.

Ainsi, que dans l'expression de la composante, parallèle à l'axe des x, de l'attraction de l'ellipsoïde homogène (42), on fasse

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+v}}, \text{ d'où } du = \frac{dv}{(1+v)\sqrt{1+v}},$$

elle devient

$$4\pi\rho x \int_{\infty}^{\frac{A_1^2}{A^2} - 1} \frac{dv}{(1+v)\sqrt{1+v}\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}v}\sqrt{1+\frac{A^2}{C^2}v}}.$$

C'est la formule de M. Poisson.

La formule relative au cas général d'une couche hétérogène (48) se change pareillement en celle-ci :

$$4\pi x \int_{\frac{a_1^2}{a^2}-1}^{\frac{A_1^2}{A^2}-1} \frac{F\left[\left(\frac{x^2}{A^2v+A^2}+\frac{y^2}{A^2v+B^2}+\frac{z^2}{A^2v+C^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]dv}{(1+v)\sqrt{1+v}\,\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}v}\,\sqrt{1+\frac{A^2}{C^2}v}}.$$

Si la couche attirante est homogène, cette expression se réduit à

$$4\pi\rho x \int_{\frac{a_1^2}{a^2}-1}^{\frac{A_1^2}{A^2}-1} \frac{dv}{(1+v)\sqrt{1+v}\,\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}v}\,\sqrt{1+\frac{A^2}{C^2}v}}.$$

Enfin, en faisant $a = 0$, d'où $\frac{a_1^2}{a^2} = \infty$, on retrouve la formule relative à l'ellipsoïde homogène.

§ 5. CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DU COEFFICIENT A_1 QUI DÉPEND D'UNE ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

(50) Je n'ai fait usage dans ce mémoire que de simples considérations géométriques, ainsi que je l'avais annoncé ; mais il reste dans les formules un coefficient A_1 qui n'est pas donné explicitement et qui dépend d'une équation du troisième degré. On peut demander, pour compléter cette solution géométrique du problème de l'attraction des ellipsoïdes, d'effectuer par une construction graphique la résolution de cette équation.

Les propriétés des surfaces du second degré démontrées dans le premier paragraphe, procurent une solution facile de cette question.

En effet, le coefficient A_1 est le demi-axe majeur de l'ellipsoïde auxiliaire mené par le point attiré S et ayant ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de l'ellipsoïde attirant. Concevons deux plans parallèles entre eux et tangents,

respectivement, à ces deux ellipsoïdes; soient p, p_1 leurs distances au centre commun des deux surfaces, on aura $p^2 - p_1^2 = A^2 - A_1^2$ (8): d'où $A_1^2 = A^2 - (p^2 - p_1^2)$. Il suffit donc, pour déterminer A_1, de savoir mener un plan tangent à l'ellipsoïde auxiliaire. Nous ne connaissons explicitement de cet ellipsoïde que le point S; cherchons son plan tangent en ce point. Sa normale en ce point est l'axe principal intérieur du cône circonscrit à l'ellipsoïde proposé, qui a pour sommet le point S (12); la question se réduit donc à ce problème:

Une surface de second degré étant donnée, et un point pris dans l'espace étant regardé comme le sommet d'un cône circonscrit à la surface, déterminer les axes principaux de ce cône.

Nous avons démontré que si l'on conçoit plusieurs autres surfaces de mêmes foyers que la proposée, et des cônes circonscrits à ces surfaces, ayant pour sommet commun le point donné, tous ces cônes auront les mêmes axes principaux (11). Parmi toutes ces surfaces, il en est deux, comme on sait, qui ont un axe nul et se réduisent à des sections coniques; pour ces deux-là, les cônes circonscrits sont précisément ceux qui ont pour bases, respectivement, les deux coniques.

Soit, pour fixer les idées,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde proposé; supposons $A > B > C$; les deux coniques en question seront :

L'ellipse située dans le plan des $x\,y$, qui a pour équation

$$\frac{x^2}{A^2 - C^2} + \frac{y^2}{B^2 - C^2} = 1;$$

Et l'hyperbole située dans le plan des $x\,z$, ayant pour équation

$$\frac{x^2}{A^2 - B^2} - \frac{z^2}{B^2 - C^2} = 1.$$

Disons, en passant, que ces deux coniques sont celles que nous

avons appelées précédemment les *coniques focales* de l'ellipsoïde (18).

Puisque les deux cônes qui auront pour sommet commun le point S et pour bases ces deux coniques, auront les mêmes axes principaux que le cône circonscrit à l'ellipsoïde proposé, la question se réduit à déterminer ce système d'axes principaux, commun aux deux cônes.

Pour cela, je remarque qu'un plan transversal quelconque coupe les deux cônes suivant deux coniques, et les trois axes en trois points qui jouissent de la propriété, que chacun d'eux a pour polaire, par rapport à chacune des deux coniques, la droite qui joint les deux autres. Or, on sait qu'il n'existe dans le plan des deux courbes qu'un système de trois points jouissant de cette propriété, et que ce sont les points de concours des diagonales et des côtés opposés du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points d'intersection des deux courbes. La détermination de ces points, qui est très-facile, suffit donc pour résoudre le problème.

(51.) Résumant cette solution, nous dirons que, pour déterminer la normale à l'ellipsoïde auxiliaire mené par le point S, on décrira dans les plans principaux de l'ellipsoïde proposé ses deux *coniques focales*, ellipse et hyperbole; on regardera l'une de ces courbes, l'hyperbole par exemple, comme la base d'un cône ayant son sommet au point S, et on tracera la conique provenant de l'intersection de ce cône par le plan de l'ellipse. Cette conique rencontrera l'ellipse en quatre points qu'on regardera comme les sommets d'un quadrilatère. Le point d'intersection des deux diagonales de ce quadrilatère appartiendra à la normale cherchée. De sorte que cette droite sera déterminée.

Le plan tangent en S à l'ellipsoïde auxiliaire sera donc déterminé, et par conséquent la distance p_1 de ce plan au centre de l'ellipsoïde sera connue. On mènera un plan parallèle tangent à l'ellipsoïde proposé; soit p sa distance au centre, on aura pour l'expression du carré de la quantité cherchée

$$A_1^2 = A^2 + p_1^2 - p^2.$$

Ainsi le problème est résolu graphiquement.

On peut éviter de mener le plan tangent à l'ellipsoïde proposé, et le remplacer par un plan parallèle, tangent à l'ellipse focale située dans le plan des $x\,y$; la construction de celui-ci sera plus simple. Soit q sa distance au centre de l'ellipsoïde; l'ellipse étant regardée comme une surface infiniment aplatie, ayant les mêmes foyers que l'ellipsoïde, le théorème (art. 8) lui sera applicable, et l'on aura :

$$q^2 - p_1^2 = A^2 - C^2 - A_1^2;$$

d'où

$$A_1^2 = A^2 - C^2 + p_1^2 - q^2.$$

§ 6. AUTRE MANIÈRE DE CALCULER L'ATTRACTION D'UNE COUCHE ELLIPSOÏDALE INFINIMENT MINCE.

(52) J'ai eu en vue principalement, dans ce mémoire, de démontrer le théorème de Maclaurin directement, c'est-à-dire en comparant les attractions des éléments de volume des deux ellipsoïdes, et sans connaître la valeur absolue de l'attraction, soit d'un ellipsoïde, soit d'une couche.

La marche que j'ai suivie m'a conduit ensuite naturellement à un calcul synthétique fort simple de la valeur de cette attraction. Pour cela, j'ai calculé d'abord l'attraction d'une couche infiniment mince *sur un point situé à sa surface,* ce qui est sans difficulté, et j'en ai conclu, par un théorème analogue à celui de Maclaurin, mais relatif au rapport des attractions de deux couches, l'attraction de la couche sur un point extérieur quelconque.

Je me propose maintenant de calculer directement cette attraction, sans connaître le théorème sur le rapport des attractions de deux couches, et sans passer par le cas particulier d'un point situé à la surface.

Nos propriétés des surfaces du second degré vont encore nous servir ici, mais une partie seulement; car la question, quoiqu'elle

comprenne le problème de l'attraction d'un ellipsoïde dans toute sa généralité, est beaucoup plus facile que la démonstration directe du théorème de Maclaurin ; elle n'exige pas la connaissance de cette propriété des surfaces du second degré (art. 17), sur laquelle repose cette démonstration, et dont la découverte était la vraie difficulté de cette théorie.

(53) Concevons une couche ellipsoïdale infiniment mince, et un point S situé au dehors. Une transversale issue de ce point rencontre la surface externe de la couche en deux points E, F, qui sont le lieu de deux éléments de volume de la couche. Les attractions que ces deux éléments de volume exercent sur le point S sont égales, et ont pour valeur commune

$$2\rho\,\frac{\overline{Oe}^2}{EF}\,\frac{da}{a}\sin\theta\,d\theta\,d\omega. \qquad (27)$$

Les deux points E, F sont situés de part et d'autre de la courbe de contact de la couche et du cône circonscrit qui a son sommet en S ; et, puisque les deux éléments de volume exercent des attractions égales sur le point S, on en conclut cette propriété de la couche :

Quand un cône est circonscrit à la surface externe d'une couche infiniment mince, comprise entre deux ellipsoïdes semblables, concentriques et semblablement placés, le plan de la courbe de contact du cône et de cette surface divise la couche en deux portions de volume, dont les attractions sur un point situé au sommet du cône sont égales et de même direction.

(54) Concevons que la transversale SE tourne autour du point S, de manière que le rapport $\frac{\overline{Oe}^2}{EF}$ conserve une valeur constante ; cette droite décrira un cône du second degré C qui aura les mêmes axes principaux que le cône circonscrit à la couche (art. 6 et 7) Soit SA l'axe principal intérieur. Tout plan mené par cet axe coupera le cône C suivant deux arêtes également inclinées sur

l'axe. Or le rapport $\frac{\overline{Oe}^2}{EF}$ étant constant, l'attraction des deux éléments de volume situés sur chaque arête aura la même valeur; et, puisque ces deux arêtes sont également inclinées sur l'axe SA, il s'ensuit que la résultante des attractions est dirigée suivant cet axe. On a donc ce théorème :

L'attraction que la portion de volume interceptée dans la couche, entre les surfaces des deux cônes C, C′ *déterminés par deux valeurs, infiniment peu différentes, du rapport* $\frac{\overline{Oe}^2}{EF}$, *exerce sur le point* S, *est dirigée suivant l'axe interne du cône circonscrit à la couche, qui a son sommet en ce point.*

Il suit de là, que *l'attraction totale de la couche est dirigée elle-même suivant cet axe.* C'est le théorème (38), que nous avions démontré par la comparaison des attractions de deux couches sur un même point situé à la surface de l'une d'elles, et qui se trouve démontré ici directement.

Passons au calcul de l'attraction de la couche sur un point extérieur.

(55) La composante, suivant l'axe SA, de l'attraction exercée par un élément dv, a pour valeur

$$2\rho\,\frac{da}{a}\,\frac{\overline{Oe}^2}{EF}\,\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\omega.$$

En supposant le rapport $\frac{\overline{Oe}^2}{EF}$ constant, et en intégrant par rapport à ω, on aura l'expression de l'attraction effective exercée par la portion de la couche comprise, comme nous venons de le dire, entre deux cônes infiniment voisins.

Nous avons par la formule (8), article 14,

$$\frac{\overline{Oe}^2}{EF} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1}\,\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a_1^2 - a^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\omega}{a_2^2 - a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\omega}{a_3^2 - a^2}}}.$$

Représentons $\frac{\overline{Oc}^2}{\overline{EF}}$ par $\frac{1}{\xi}$; la composante de l'attraction exercée par le volume dv sera

$$2\rho\,\frac{da}{a}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\omega}{\xi},$$

et l'on aura

$$\xi^2 = 4\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{a_1^2 - a^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\omega}{a_2^2 - a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\omega}{a_3^2 - a^2}\right).$$

Différentiant par rapport à ξ et à θ, on a

$$\xi d\xi = 4\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1\right)\left(\frac{\cos^2\omega}{a_2^2 - a^2} + \frac{\sin^2\omega}{a_3^2 - a^2} - \frac{1}{a_1^2 - a^2}\right)\sin\theta\cos\theta\,.\,d\theta.$$

L'expression de l'attraction devient donc

$$\frac{\rho\,\frac{da}{a}}{2\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1\right)}\,\frac{d\xi\,.\,d\omega}{\left(\frac{\cos^2\omega}{a_2^2 - a^2} + \frac{\sin^2\omega}{a_3^2 - a^2} - \frac{1}{a_1^2 - a^2}\right)} =$$

$$\rho\,\frac{da}{a}\,\frac{(a_1^2 - a^2)\,d\xi}{2\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1\right)}\,\frac{d\omega}{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_2^2 - a^2}\cos^2\omega + \frac{a_1^2 - a_3^2}{a_3^2 - a^2}\sin^2\omega} =$$

$$\rho\,\frac{da}{a}\,\frac{(a_1^2 - a^2)\,d\xi}{2\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2} - 1\right)}\,\frac{d.\tang\omega}{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_2^2 - a^2} + \frac{a_1^2 - a_3^2}{a_3^2 - a^2}\tang^2\omega}.$$

Intégrant depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 400^\circ = 2\pi$, on a

$$\frac{\pi\rho\,\frac{da}{a}\,(a_1^2-a^2)\,d\xi}{\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2}-1\right)\sqrt{\frac{(a_1^2-a_2^2)\,(a_1^2-a_3^2)}{(a_2^2-a^2)\,(a_3^2-a^2)}}} =$$

$$\frac{\pi\rho\,\frac{da}{a}\,d\xi\,.\,\sqrt{a_1^2-a^2}\,\sqrt{(a_1^2-a^2)\,(a_2^2-a^2)\,(a_3^2-a^2)}}{\left(\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2}-1\right)\sqrt{(a_1^2-a_2^2)\,(a_1^2-a_3^2)}},$$

ou, d'après la formule (10),

$$\frac{\pi\rho\,\frac{da}{a}\,d\xi\,.\,\sqrt{a_1^2-a^2}\,.\,abc}{\sqrt{\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2}-1}\,\sqrt{(a_1^2-a_2^2)\,(a_1^2-a_3^2)}}$$

Or, on a

$$\frac{\overline{O\alpha}^2}{\overline{AA'}^2} = \frac{\sqrt{a_1^2-a^2}}{2\sqrt{\frac{\overline{SO}^2}{\overline{OD}^2}-1}} \qquad \text{(art. 14)}$$

L'attraction devient

$$\frac{2\pi\rho\,\frac{da}{a}\,\frac{\overline{O\alpha}^2}{\overline{AA'}^2}\,abc\,.\,d\xi}{\sqrt{(a_1^2-a_2^2)\,(a_1^2-a_3^2)}}.$$

Soit SP la portion de la normale à l'ellipsoïde (a_1) interceptée par le plan diamétral qui lui est perpendiculaire, on a, par la formule (14) de l'article 23,

$$SP = \frac{a_1\,b_1\,c_1}{\sqrt{(a_1^2-a_2^2)\,(a_1^2-a_3^2)}}.$$

L'expression de l'attraction devient donc

$$2\pi\rho\,\frac{da}{a}\,\frac{\overline{O\alpha}^2}{AA'}\cdot \mathrm{SP}.\,\frac{abc}{a_1b_1c_1}\cdot d\xi.$$

Pour avoir l'attraction de la couche, il faut intégrer cette expression entre les valeurs de ξ, qui répondent aux limites du rapport $\frac{EF}{\overline{Oe}^2}$, lesquelles sont $\frac{AA'}{\overline{O\alpha}^2}$ et o ; et l'on doublera le résultat, sans quoi l'on n'aurait l'attraction que d'une des deux portions de la couche interceptées par le plan de la courbe de contact de sa surface externe et du cône circonscrit.

L'intégrale définie est donc

$$4\pi\rho\,\frac{da}{a}\,\mathrm{SP}.\,\frac{abc}{a_1b_1c_1}.$$

Telle est l'expression de l'attraction exercée par la couche sur le point S.

Cette manière de l'obtenir est plus directe et plus analytique que celle que nous avons suivie d'abord ; mais, quoiqu'elle repose aussi sur des considérations géométriques et sur les propriétés des surfaces du second degré démontrées dans le premier paragraphe, elle n'est pas absolument exempte de calculs, et à cet égard, peut-être paraîtra-t-elle renfermer quelque chose de moins élémentaire que la première.

(56) Ayant eu à traiter cette même question de l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince, dans le mémoire cité (article 40), j'en ai donné une solution fondée sur l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0,$$

à laquelle satisfait la fonction V, qui exprime la somme des molécules d'un corps divisées par leurs distances respectives à un point x, y, z pris au dehors du corps.

(57) Les surfaces coniques dont nous venons de nous servir (54), et qui répondent à des valeurs constantes de ξ, c'est-à-dire du rapport $\frac{EF}{\overline{Oe}^2}$, peuvent être définies géométriquement par une propriété qui mérite d'être remarquée : c'est que, *pour chaque surface conique, les segments compris sur ses arêtes, entre les deux parois de la couche infiniment mince, sont égaux.*

En effet, nous avons trouvé pour le segment *dr,* compris sur une transversale SE, entre les deux surfaces de la couche, l'expression

$$dr = 2\,\frac{\overline{Oe}^2}{EF}\,\frac{da}{a}; \qquad \text{(art. 27.)}$$

donc, puisque, pour chaque surface conique, $\frac{\overline{Oe}^2}{EF}$ est constant, *dr* l'est aussi.

(58) On tire encore de là cette remarque, que la droite SA, suivant laquelle s'exerce l'attraction de la portion de la couche comprise entre deux cônes, est la transversale pour laquelle le segment *dr,* compris sur elle, entre les deux parois de la couche, est *minimum;* car nous avons vu (6) que pour cette droite le rapport $\frac{\overline{Oe}^2}{EF}$ est un *minimum.*

Ainsi, la droite SA peut être définie de ces quatre manières différentes :

1° Comme étant l'axe principal intérieur du cône circonscrit à la surface externe de la couche;

2° Comme étant la normale à l'ellipsoïde mené par le point S, et ayant ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de cette surface externe;

3° Comme étant la droite issue du point S, pour laquelle le rapport $\frac{\overline{Oe}^2}{EF}$ a sa valeur *minimum;*

4° Enfin, comme étant la droite issue du point S, pour la-

quelle le segment compris sur cette droite, entre les deux parois de la couche, est *minimum*.

(59) Si l'on veut calculer l'attraction qu'une portion de la couche ellipsoïdale exerce sur un point situé au dedans de la surface interne, les mêmes expressions que pour le cas du point extérieur serviront, c'est-à-dire que l'axe SA étant mené par le point attiré, la composante, suivant cet axe, de l'attraction exercée par un élément de volume de la couche, sera

$$2\rho\,\frac{da}{a}\,\frac{\overline{Oe}^2}{EF}\,\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\omega,$$

et la valeur de l'attraction effective, exercée par la portion de la couche comprise entre une nappe d'un cône déterminé par une valeur ξ du rapport $\frac{EF}{Oe}$, et la nappe du cône infiniment voisin, sera

$$2\pi\rho\,\frac{da}{a}\,\frac{\overline{Oa}^3}{\overline{AA'}}\,SP\,\frac{abc}{a_1b_1c_1}\,d\xi.$$

Intégrant entre deux valeurs ξ', ξ'', on aura

$$2\pi\rho\,\frac{da}{a}\,\frac{\overline{Oa}^3}{\overline{AA'}}\cdot SP\,\frac{abc}{a_1b_1c_1}\,(\xi'-\xi'').$$

C'est l'attraction exercée sur le point S par la portion de la couche comprise entre deux cônes d'ouverture quelconque, chaque cône étant formé d'une seule nappe.

Peu de temps après avoir présenté ce mémoire à l'Académie, j'ai donné une autre solution, beaucoup plus simple, du problème de l'attraction des ellipsoïdes, qui a été insérée dans les

Comptes rendus des séances de l'Académie (t. VI, p. 902, année 1838), et reproduite dans le Journal de mathématiques de M. Liouville (t. V, année 1840); et depuis j'ai fait connaître des théorèmes généraux sur l'attraction des corps, où l'on considère des couches infiniment minces, qui, comme la couche ellipsoïdale, et, en général, comme les couches électriques formées à la surface des corps conducteurs, jouissent de la propriété de n'exercer aucune action sur les points intérieurs, et présentent, quant aux points extérieurs, des propriétés analogues au théorème de Maclaurin. Ces théorèmes, d'où se déduirait encore une solution du problème de l'attraction des ellipsoïdes, ont été énoncés d'abord dans les Comptes rendus de l'Académie (t. VIII, février 1839), et font le sujet d'un mémoire inséré dans la Connaissance des temps pour 1845.

FIN DU TOME NEUVIÈME.

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

BACHET, sieur de MÉZIRIAC. — Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. 3e édition, revue, simplifiée et augmentée par *A. Labosne*, Professeur de Mathématiques. Petit in-8, caractères elzévirs, titre en deux couleurs, papier vergé, couverture parchemin; 1874 (*Tire à petit nombre*)..... 6 fr.

BOUSSINGAULT, Membre de l'Institut. — Agronomie, Chimie agricole et Physiologie. 2e édition. Tomes I, II, III, IV et V; in-8, avec planches sur cuivre et figures dans le texte; 1860-1861-1864-1868-1874. 26 fr.
Chacun des tomes I à IV se vend séparément..... 5 fr.
Le tome V se vend séparément..... 6 fr.
(Le tome VI est *sous presse*.)

BRIOT et BOUQUET, Professeurs à la Faculté des Sciences. — Théorie des fonctions elliptiques. 2e édition. In-4, avec figures; 1875..... 30 fr.

CAHOURS (Auguste), Membre de l'Académie des Sciences. — Traité de Chimie générale élémentaire.
CHIMIE INORGANIQUE, *Leçons professées à l'École Centrale des Arts et Manufactures*. 3e édition. 2 volumes in-18 jésus avec 230 figures et 8 planches; 1874..... 10 fr.
Chaque volume se vend séparément..... 6 fr.
CHIMIE ORGANIQUE, *Leçons professées à l'École Polytechnique*. 3e édition. 3 volumes in-18 jésus avec figures; 1874-1875. Prix pour les souscripteurs..... 15 fr.
Chaque volume se vend séparément..... 6 fr.

DUBOIS (Edm.), Examinateur-Hydrographe de la Marine. — Les passages de Vénus sur le disque solaire, considérés au point de vue de la détermination de la distance du Soleil à la Terre; *Passage de* 1874; *Notions historiques sur les passages de* 1761 *et* 1769. In-18 jésus, avec figures dans le texte; 1873. 3 fr. 50 c.

FRENET (F.), Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Lyon. — Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal. Ouvrage destiné aux Candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale, aux Élèves de ces Écoles et aux personnes qui se préparent à la licence ès Sciences mathématiques. 3e édition. In-8, avec figures dans le texte; 1873..... 7 fr. 50 c.

INSTITUT DE FRANCE. — Recueil de Mémoires, Rapports et Documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil. In-4, avec 6 pl., dont 3 en chromolithographie; 1874... 12 fr. 50 c.
Ce Recueil contient : 1° Documents officiels relatifs à la mission de l'Académie, à la constitution de sa Commission et à son fonctionnement; 2° Mémoires, Rapports et Documents qu'elle a suscités ou recueillis dans la période qui a précédé le départ des Observateurs.

JAMIN (J.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris. — Petit Traité de Physique, à l'usage des Établissements d'instruction, des aspirants aux Baccalauréats et des candidats aux Écoles du Gouvernement. In-8, avec 686 figures dans le texte; 1870. 8 fr.
Depuis le commencement de ce siècle, la Physique a été renouvelée dans son ensemble : aussi ne peut-on qu'approuver l'Auteur du *Petit Traité de Physique* d'avoir, même dans un livre élémentaire, exposé cette science au point de vue des théories nouvelles. Dès les premiers mots, l'Auteur démontre que la Chaleur est un mouvement moléculaire, et cette idée guide ensuite le lecteur dans toutes les expériences, et les explique. La Terre et les aimants n'étant que des solénoïdes, on fait dépendre le Magnétisme de l'Électricité. L'Acoustique montre dans leurs détails les vibrations longitudinales, transversales, circulaires et elliptiques; elle prépare à l'Optique. Cette dernière Partie enfin est l'étude des vibrations de toute sorte qui se produisent dans l'éther; les interférences et la polarisation sont expliquées de la manière la plus élémentaire, et la Théorie vibratoire est rendue accessible à tous.
Un tel mode d'enseignement est appelé à rendre un réel service aux Élèves en les délivrant de ce que les savants ont abandonné, en élevant leur esprit jusqu'à de plus hautes conceptions, en leur montrant l'ensemble philosophique d'une science déjà très-avancée et qui semble toucher à son terme.

PONCELET, Membre de l'Institut. — Cours de Mécanique appliquée aux machines; publié par M. Kretz, Ingénieur en chef des Manufactures de l'État. In-8, avec 117 figures dans le texte et 2 planches gravées sur cuivre; 1874..... 12 fr.

TYNDALL (J.), Professeur de Philosophie naturelle à l'Institution Royale de la Grande-Bretagne. — La Chaleur, *Mode de mouvement*. 2e édition française, traduite de l'anglais, sur la 4e édition, par M. l'*Abbé Moigno*. Un beau volume in-18 jésus de XXXII-576 pages, avec 110 figures dans le texte; 1874.. 8 fr.

TYNDALL (John), Professeur à l'Institution royale et à l'École royale des Mines de la Grande-Bretagne. — Le Son, traduit de l'anglais et augmenté d'un *Appendice* par M. l'Abbé Moigno. Un beau volume in-8, orné de 171 figures dans le texte; 1869..... 7 fr.
« J'ai cherché, dit le célèbre Auteur dans sa Préface, à rendre la science de l'Acoustique accessible à toutes » les personnes intelligentes, en y comprenant celles qui n'ont reçu aucune instruction scientifique particulière. » J'ai traité mon sujet d'une manière tout à fait expérimentale, et j'ai cherché à placer tellement chaque expé- » rience sous les yeux et dans la main du lecteur, qu'il puisse la réaliser lui-même ou la répéter. » Il serait impossible, en effet, de mieux choisir et de décrire dans un style plus attrayant les expériences nécessaires à la manifestation des faits et à la détermination des lois qui les régissent. Cet Ouvrage sera donc lu avec un vif intérêt, non-seulement par les Professeurs, qui y trouveront toutes les découvertes ayant renouvelé pour ainsi dire l'Acoustique depuis quelques années, mais encore par tous les amis d'une science claire et pratique.